# 大学数学のための準備　(北海道大学理学部数学科編)

数学では専用の記号や数式を用いて条件や概念を記述します. それらによって論理的に議論したり計算を行うことができるのです. そして定理や公式を証明したり応用したりします. このような過程において使用される文字や記号や式は大変重要です. 皆さんには大学数学の勉強においてそれらに習熟し, 使いこなせるようになることを期待します. 本冊子では数学の基本的な記号や用語や概念について述べます. いくつかは既に高校数学における学習で知っていることでしょう. それらはもう一度知識として確認してください. 記号や数式や数学用語を正確に記述したり正しく式変形したりできるようになることが数学の上達の第一歩です.

## §1. 数学でよく使用されるギリシャ文字, ローマ数字

数学では数式を記述するため多くの文字を使用します. 中学高校までの勉強ではローマ字 (26 文字) はフルに活用されますので慣れ親しんでいると思います. さらに高いレベルの数学ではローマ字だけでは不足し, ギリシア文字も利用されます. ギリシア文字は数理系の学術的な書物以外ではあまりお目にかかることはありませんが, 大学レベルの数学の書物では頻出なので練習しましょう. また, ローマ数字および対応する算用数字の表をあげておきます.

| ギリシア文字 | | カタカナ表記 | 英語表記 |
|---|---|---|---|
| (A) | $\alpha$ | アルファ | alpha |
| (B) | $\beta$ | ベータ | beta |
| $\Gamma$ | $\gamma$ | ガンマ | gamma |
| $\Delta$ | $\delta$ | デルタ | delta |
| (E) | $\varepsilon$ | イプシロン | epsilon |
| (Z) | $\zeta$ | ゼータ | zeta |
| (H) | $\eta$ | エータ | eta |
| $\Theta$ | $\theta$ | シータ | theta |
| (K) | $\kappa$ | カッパ | kappa |
| $\Lambda$ | $\lambda$ | ラムダ | lambda |
| (M) | $\mu$ | ミュー | mu |
| (N) | $\nu$ | ニュー | nu |
| $\Xi$ | $\xi$ | グザイ | xi |
| $\Pi$ | $\pi$ | パイ | pi |
| (P) | $\rho$ | ロー | rho |
| $\Sigma$ | $\sigma$ | シグマ | sigma |
| (T) | $\tau$ | タウ | tau |
| $\Phi$ | $\varphi$ $\phi$ | ファイ | phi |
| (X) | $\chi$ | カイ | chi |
| $\Psi$ | $\psi$ | プサイ | psi |
| $\Omega$ | $\omega$ | オメガ | omega |

| ローマ数字 | アラビア数字 |
|---|---|
| | 0 |
| I | 1 |
| II | 2 |
| III | 3 |
| IV | 4 |
| V | 5 |
| VI | 6 |
| VII | 7 |
| VIII | 8 |
| IX | 9 |
| X | 10 |
| XI | 11 |
| L | 50 |
| C | 100 |
| D | 500 |
| M | 1000 |

## §2. 代表的な数の集合と記号

数学で非常によく現れる集合について述べます. 自然数, 整数, 有理数, 実数など中学高校までも個別的にはしばしば登場してきました. 大学ではそれぞれを集合として全体的に扱うことも必要になります. 集合としての記号は以下のように定められ, 国際的にも共通のものとなっています.

$\mathbf{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ 自然数全体の集合. $\mathbb{N}$ とも書く.

$\mathbf{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$ 整数全体の集合. $\mathbb{Z}$ とも書く.

$\mathbf{Q} = \{q/p \mid p, q \in \mathbf{Z}, p \neq 0\}$ 有理数全体の集合. $\mathbb{Q}$ とも書く.

$\mathbf{R}$ 実数全体の集合. $\mathbb{R}$ とも書く. 図形的には直線とも見なせる.

$\mathbf{C}$ 複素数全体の集合 $\{x+yi \mid x, y \in \mathbf{R}\}$. $i$ は虚数単位である $(i^2=-1)$. $\mathbb{C}$ とも書く. 図形的には平面とも見なせる (このときの平面を複素平面という).

$\mathbf{R}^2 = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbf{R}\}$ 2 次元ユークリッド空間, あるいは, 2 次元平面.

$\mathbf{R}^3 = \{(x, y, z) \mid x, y, z \in \mathbf{R}\}$ 3 次元ユークリッド空間, あるいは, 3 次元空間.

## §3. 集合

数学的に規定された “もの” あるいは “要素” の集まりを集合といいます. 集合を $X, Y, Z, \ldots$ など大文字で表し, 集合の要素 (あるいは元ともいう) には $x, y, z, \ldots$ など小文字を用いることが普通です. $x$ が集合 $X$ の要素であること. あるいは $x$ が $X$ に属することを

$$x \in X$$

と表します. これは $X \ni x$ と書いても同じことです. $x$ が $X$ に属さないことを $x \notin X$ または $X \not\ni x$ と書きます. たとえば $3 \in \mathbf{N}$ です.

複数の集合を扱う際に互いの関係が重要になることもあります. まず包含関係について述べましょう.

$$X \subset Y$$

これは集合 $X$ が集合 $Y$ に包含されること, 言い換えると『$X$ のすべての要素が $Y$ に属すること』を表します. これを $Y \supset X$ とも書きます. また, $X$ は $Y$ の**部分集合**であるといいます. 例えば $\mathbf{N} \subset \mathbf{Z}$ となっています. 空集合は $\emptyset$ で表します.

集合を表すにはいろいろな方法があります. 例をあげてみましょう.

$$X = \{1, 3, 5, 7, 9\}$$

を考えます. これは要素をすべて羅列する方法ですが, 一方

$$X = \{x \in \mathbf{Z} \mid x \text{ は} 9 \text{以下の正の奇数}\}$$

と表すことも可能です. 集合はなるべく単純で理解しやすい形に表すことが論理的にも技術的にも望まれます. 次の例として

$$Y = \{x \in \mathbf{R} \mid x^2 - 3x + 2 \leqq 0\}$$

を考えます. これは実数 $x$ のうち不等式 $x^2 - 3x + 2 \leqq 0$ を満たすようなもの全体という意味です. 2 次式を因数分解すれば $x^2 - 3x + 2 = (x-2)(x-1)$ ですから $Y$ は 1 以上 2 以下の実数 $x$ の全体と言い換えることができます. 次の例は

$$E = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1, x + y > 0\}$$

ですが, これは原点を中心とする半径 1 の円の内部のうち直線 $x + y = 0$ で区切られた一方の側 ($x + y > 0$ の領域) に属する点 $(x, y)$ の全体ということになります. $E$ のような場合は要素が無数に存在するのですべての要素を羅列式に表すことが困難です. よって, このように条件式を用いて集合を規定しているのです.

## §4. 集合の演算と操作

集合が複数個あるとそれらを操作して新たな集合を定めることができます. まず集合算と呼ばれる演算について述べます.
2 つの集合 $A$, $B$ にたいして **和集合** (あるいは **和**) $A \cup B$, **共通部分** $A \cap B$, **差** $A \setminus B$ を次のように定めます.

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ または } x \in B\}$$

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ かつ } x \in B\}$$

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ かつ } x \notin B\}$$

$A \setminus B$ は $A - B$ と書くこともあります. 数の引き算のマイナスと意味が異なるのでそれを意識するため普通は横棒を斜めにします. さてこれらの集合算には次の法則が成立します.

$$A \cup B = A \cup (B \setminus A)$$
$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$
$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

このような集合算は固定された集合 $X$ (全体集合とよぶ) があって, その部分集合同士で行われるのが普通です. $X$ を全体集合とし, $A \subset X$ にたいして $X \setminus A$ を $A$ の $X$ における**補集合**といい $A^c$ と書きます. $A \subset X, B \subset X$ にたいして

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c, \quad (A \cap B)^c = A^c \cup B^c \quad (\text{ド・モルガンの法則})$$

が成り立ちます.

その他の集合の操作として集合の直積について述べます. 2つの集合 $A, B$ があったときに, それぞれから取った要素 $a, b$ の組 $(a, b)$ の全体を考え $A$ と $B$ の**直積集合**といいます.

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$$

例えば $\mathbf{R}^2 = \mathbf{R} \times \mathbf{R}$ であり, また, 2次元平面は2つの実数直線の直積とみなせます.

## §5. 写像

2つの集合 $X$ と $Y$ があるとしましょう. 集合 $X$ の各要素 $x$ にたいして集合 $Y$ のある要素 $y$ が対応する一定の規則があるとき, この対応関係あるいは対応規則

$$X \ni x \longmapsto y \in Y$$

を写像といいます. これをひとつの数学的対象とみなし $f$ と記し図式

$$f : X \longrightarrow Y$$

で表現します. $X$ を**始集合**, $Y$ を**終集合**と言います. $Y$ が $\mathbf{R}$ や $\mathbf{C}$ の場合 $f$ を特に**関数**といいます. 写像の対応関係を $y = f(x)$ と記述します. 関数の場合はよく使用されている表現なのでおなじみのものと思われます. $X = Y$ のときは写像は**変換**とも呼ばれます. 代表例として線形代数で扱われる線形写像をあげておきます.

2次元の実ベクトルの全体 $\mathbf{R}^2$ を $X, Y$ として取ります. すなわち

$$X = Y = \mathbf{R}^2 = \left\{ \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \mid u_1,\, u_2 \in \mathbf{R} \right\}$$

とおきます. $f : X \longrightarrow Y$ を

$$f : \mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \longmapsto \mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1/2)\, u_1 - (\sqrt{3}/2)\, u_2 \\ (\sqrt{3}/2)\, u_1 + (1/2)\, u_2 \end{pmatrix}$$

により定めると, これは線形写像の1例となっています (幾何的にはベクトルを $\pi/3$ 回転する作用となっています).

## §6. 条件と論理

数学では条件が複数あったときにそれらの間の関係を論じることがしばしば重要になります. 高校でも学びましたがここで復習しておきましょう. 2 つの条件 $A$, $B$ があったとき, “$A$ ならば $B$” のことを記号で

$$A \Longrightarrow B$$

と表します. また

$$B \Longleftarrow A$$

も同じことを意味します．この $A$ と $B$ の関係を “$A$ は $B$ であるための**十分条件**である” と言います．また，“$B$ は $A$ であるための**必要条件**である” とも言います．また，条件 $A$ は条件 $B$ より**強い**と表現することもあります．

$A \Longrightarrow B$ かつ $B \Longrightarrow A$ を満たすとき，“$A$ と $B$ は**同値**である” といい，

$$A \Longleftrightarrow B$$

と書きます．$A$ は $B$ であるための**必要十分条件**であるといいます．例をあげましょう．整数 $x$ に対する次の条件として

条件 $A$: $x$ は 6 の倍数,　　　条件 $B$: $x$ は 3 の倍数

を考えます．この場合 $A$ ならば $B$ なので $A \Longrightarrow B$ となります．条件 $A$ をみたす $x$ の全体は，条件 $B$ をみたす $x$ の全体に包含されます．このように 2 つの条件の強弱が，対応する集合では包含関係に関連します．

**[条件の否定]**

数学の議論においてある条件に対してその否定となる条件を考えることがあります．条件 $P$ にたいして $P$ が成立しないという条件もひとつの条件で, これを $\neg P$ と記述します．例えば, 関数 $f$ に対する条件 $P$ を次のように与えます．

$P$ :『任意の $x \in \mathbf{R}$ にたいして $f(x) \geqq 0$ 』となる．

このとき, $P$ の否定は $\neg P$ :『ある $x \in \mathbf{R}$ にたいして $f(x) < 0$』, です．

**[全称記号, 存在記号]**

数学の講義で条件を記述する際によく現れる論理記号として, $\forall$ , $\exists$ があります．これらの用法を説明します．

(i) 『 $\forall x$, ... 』 は 『任意の $x$ にたいして ... 』の意味です．

例：『$\forall x \in \mathbf{R}$, $x^2 \geqq 0$』．

(ii) 『 $\exists x$, ... 』 は 『... をみたす $x$ が存在する．』の意味です．

例：『$\exists x \in \mathbf{R}$, $f(x) < 0$』．これは『$f(x) < 0$ となるような実数 $x$ が存在する』という意味になります．この条件は, もし $f(x) = x^2 - 2x$ なら成立し，$f(x) = x^2 + 6x + 9$ なら成立しないことを確認してください．

**最後にひとこと:** 数学では文字や記号や言葉の意味を理解することが肝要でそれが上達への第一歩です．疑問が生じたときは担当教員にどんどん質問してください．また，クラスのメンバーと疑問を共有したり討論することも大変良いことです．自分で調べたいときは大学の図書室で参考書や文献にあたることも良いと思います．数学用語や解説については次のような数学の辞典がありますので北大附属図書館 (北図書館, 本館) や理学部数学図書室 (理学研究院 3 号館) を訪問することをすすめます．

**「岩波数学入門辞典」(岩波書店)，「岩波数学辞典」（岩波書店)**

2018 年 4 月発行