

数学コース アブストラクト

シュワルツシルト時空とブラックホール

われわれ相対性理論ゼミは 1 年間かけて Schutz の相対性理論を読んできました。その中で、今回は簡単に調べることのできる静的な球対称（シュワルツシルト時空）の性質を紹介したいと思います。一般相対性理論では重力は力ではなく時空の歪みとして捉え、その歪みの効果をメトリックという空間の距離を表す数学的な道具に押し付けます。まずは、静的で球対称という時空の対称性を利用して線素がどのようにかけるのかを簡単に説明し、Einstein 方程式の外部解を求めることでシュワルツシルト・メトリックを導出する。その後このメトリックを利用してこの時空の性質を見ていくが、まずは粒子や光子をブラックホールに落とす時にどのような軌道を描くのかを調べる。その結果として有名な近日点移動や重力による光の屈折（重力レンズ）が導かれるが、この 2 つの効果はシミュレーションを行って視覚的に見ていく。次に、時空の赤道面での光子の運動を調べ、光子が脱出することのできない面（事象の地平面）の存在を示す。今回の発表ではテンソルなどの数学的な道具はあまり表に出さずに、初等的な解析学だけで理解できるように心がけた。従って、あまり数学的なことは気にせずに気軽に聞いてほしい。

群論における基本的定理としてのラグランジュの定理

群論において、特に有限群を考えれば、部分群との位数との関係を与えるラグランジュの定理は基本的であり、重要である。今回の発表では、群論における基本的な概念として部分群、コセット分解等を紹介し、ラグランジュの定理を簡単にではあるが証明する。

イデアルの起源と整数論

環論の重要な概念であるイデアルについて、その起源と応用を述べる。クンマー (Kummer) はフェルマーの最終定理の研究を進めていた際、代数的整数の範囲では素因数分解の一意性が成り立たないという困難に直面したが、その困難を「理想数」というものを考案することで乗り越えた。この理想数の理論をもとに、デデキント (Dedekind) はイデアルを定義し、代数体の整数環で「素イデアル分解の一意性」が成り立つことを示した。発表の最後では、実際に $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ という環におけるイデアルを素イデアルに分解してみる。

濃度

私たちの班は、「集合と位相」をテーマにしました。教科書は「集合と位相」(小林貞一著 培風館)を使い、集合と写像、濃度、順序集合という順に進めました。

集合と写像では単射、全射、集合族といった基本的なことや同値関係、同値類についても学び、順序集合では集合の元に順序という関係を定義したり、順序同型といった重要な概念を学びました。今回発表するのは集合の濃度についてです。濃度を学ぶことで例えば自然数と有理数、整数と実数ではどちらの元が多いのかを知ることができます。ベルシュタインの定理は2つの集合の濃度が等しいかどうか調べる一つの手段として役立ちます。ここで話す集合論に関しては高校の文系の人でも理解でき、学びやすいと思います。