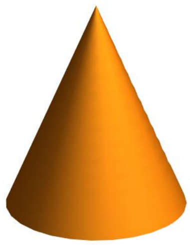
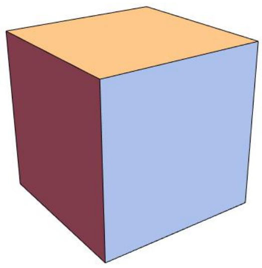
北海道大学大学院理学研究院数学部門（２０１６年作成）
http://www.math.sci.hokudai.ac.jp/museum

シャボン玉の形

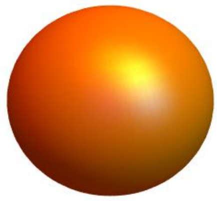
シャボン玉を作って遊んでみると丸くなります．なぜ他の形にならないのでしょうか？実は，シャボン玉は，囲む体積が同じ曲面たちの中で**表面積が最小の曲面**になっています．つまり，シャボン玉は「効率の良い」形なのです．このことは，例えば建物を設計するとき，広い空間を少ない材料で建築できるので，実際に役立つことがわかります．下に，同じ体積（$\frac{4}{3}\pi = 4.18\cdots$）の円錐，立方体，球の表面積をそれぞれ記しています．



[1] 円錐 （半径 1, 高さ 4)：表面積 $(\sqrt{17}+1)\pi = 16.09\cdots$



[2] 立方体 （1 辺 $(\frac{4}{3}\pi)^{\frac{1}{3}}$)：表面積 $6(\frac{4}{3}\pi)^{\frac{2}{3}} = 15.59\cdots$

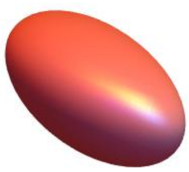


[3] 球 （半径 1)：表面積 $4\pi = 12.56\cdots$

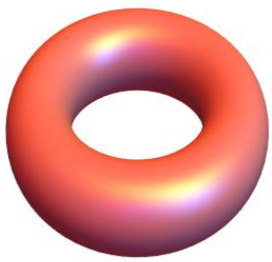
数学者ホップの考えた問題

数学の言葉で言えば，シャボン玉は**平均曲率一定曲面**というなめらかな曲面になります．数学者のハインツ・ホップ (Heinz Hopf, 1894 – 1971) は，1951 年，穴がない閉じた平均曲率一定曲面が球面（つまりシャボン玉）しかないことを証明しました．例えば，下の [4] の楕円面は閉じた穴のない曲面ですが，平均曲率一定曲面ではありません．

さらに，ホップは穴が空いた閉じた平均曲率一定曲面がないだろうかと考えました．これは**ホップの問題**と呼ばれるようになりました．穴が一つ空いた閉じた曲面は，例えばドーナツの表面のような曲面を想像して下さい（数学ではトーラスといいます）．下の [5] のような曲面ですが，これも平均曲率一定曲面ではありません．当時の多くの研究者は，穴の空いた閉じた平均曲率一定曲面は**ないだろう**と考えていました．



[4] 楕円面



[5] トーラス

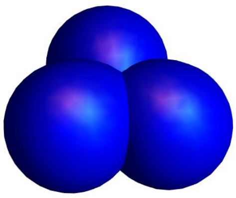
[4], [5]：閉じた曲面

ウェンテのトーラス

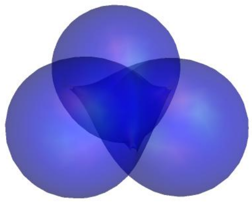
ホップの問題は長らく未解決の問題でしたが，1986 年ヘンリー・ウェンテ (Henry C. Wente) によって解決されました．解答は多くの研究者の予想に反して，**否**，すなわち，彼は穴が一つ空いた閉じた平均曲率一定曲面を発見したのです．これは，**ウェンテ・トーラス**と呼ばれています．下の [6], [7] を見ればわかるように，ウェンテ・トーラスはドーナツのような簡単なものではなく，交わりを持つような非常に複雑な曲面になっています．ホップの問題が出た当時の研究者が，穴の空いた閉じた平均曲率一定曲面がないだろうと思ったのも不思議はありません．皆さんはこの曲面に穴が一つ空いていることがわかりますか？

ウェンテの発見の後，さまざまな人々の努力によって平均曲率一定トーラスが無限個存在することが示され，その分類がなされました．この分類には現代数学の深い理論が使われており，シャボン玉という身近な対象から導かれる数学がとても興味深いことがわかります．

現在では，ウェンテ・トーラスなどの複雑な曲面も 3D プリンターを使えば簡単に造形する事ができます．写真の [8], [9], [10] は，ウェンテトーラスの樹脂モデルとその造形過程です．



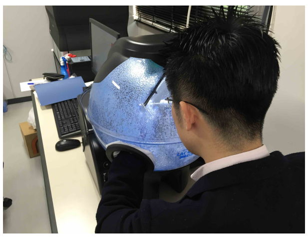
[6] ウェンテ・トーラス



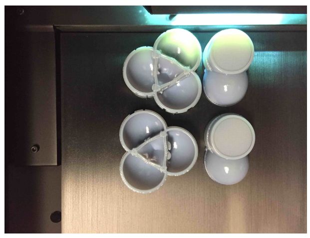
[7] ウェンテ・トーラスの透過図

[6], [7]：ウェンテの発見した平均曲率一定トーラス

[8] 樹脂モデル



[9] 造形過程（その 1）



[10] 造形過程（その 2）

[8], [9], [10]：ウェンテ・トーラスの樹脂モデルとその造形過程

参考文献

[1] H. C. Wente, Counterexample to a conjecture of H. Hopf. *Pacific J. Math.*, **121** (1986), no. 1, 193-243.

[2] ヒルデブラント, トロンバ, 形の法則 自然界の形とパターン, 東京化学同人, 1994 年.

[3] 井ノ口順一, 曲面と可積分系, 朝倉書店，現代基礎数学 18, 2015 年.