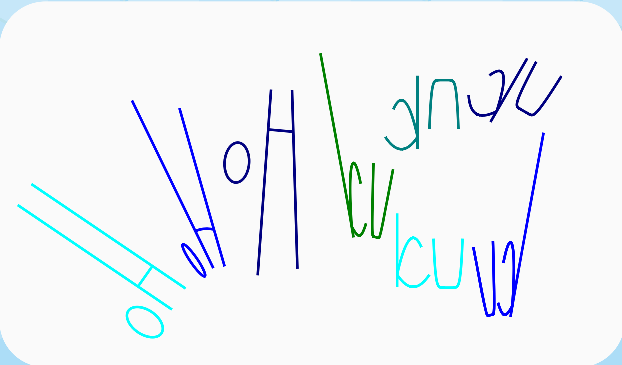
ミラーボールのフシギ　HokuHokuHOKUDAI

北海道大学大学院理学研究院数学部門（２０１９年作成）
http://www.math.sci.hokudai.ac.jp/museum/

展示台の上には固定された２つのミラーボールと，動かすことができるミラーボールがあります．台の上のボードにはいくつかの文字らしいものが描かれています．



ひとつのミラーボールはあなたを映す
ひとつのミラーボールは世界を映す
まっすぐなものは曲がったものに
曲がったものはまっすぐなものに
でも　まっすぐってなぁに　曲がっているのはどっち

ミラーボールに ku がちゃんと映ったよ.

ボードにはそれらしい模様が 5 つあるけれど,
よく考えるとミラーボールに ku と映るのはひとつだけだね.

ボードでは k が反転していないといけないし,
k とuの関係からうまく映りそうなものがわかったよ.

あとはミラーボールを置く位置と, どこから見るかを工夫すればいいね.

直線はミラーボールに映すと大抵曲がって見えるけれど,
直線に映る場合もあるね.

それにしても k の字がちょっとかっこ悪いけど...

曲がったところは放物線らしいよ.

放物線って, 学校で習う $y = ax^2$ という式のグラフ?
a を変えると形が変わることは知っているけど.

ミラーボールに映った k の曲線が放物線に見えるように
計算してボードに書いたみたい.
高校で習う数学でできるようだよ.

ほお!　u は?

$y = x^8$.

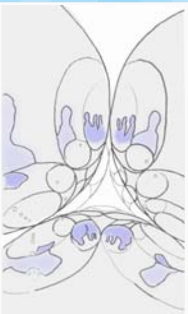
...それより直方体が映るほうがおもしろかったね.

こんどは３つのミラーボールを合わせて，いろんな角度から見てみたふたり...

ミラーボールがキスしたら
世界はふしぎ
ミラーボールたちが生む
くりかえしの先には何が見える?
かんたんなしくみがつくりだす複雑な宇宙
考える無限へのアプローチは数学で

鏡に映った鏡って, その鏡にまた鏡が映っているから,
ずぅっと続いているね.

スケッチするのは難しかったけど,
仕組みがわかった気がするよ.



suga

きれいだし, 不思議だね.

複雑だけど, 繰り返しだから規則的とも言えるね.

無限 . . . 素敵な響き!

数学は無限を真剣に扱う学問なんだね.

フラクタルというのも聞いたことがあるよ.

とりあえず, つぎからの解説を読んでみよう.

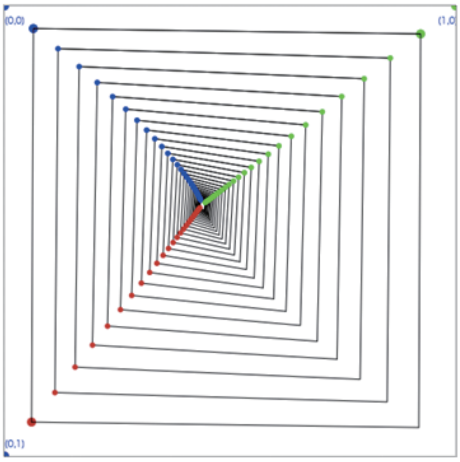
. . . ふたりのお話はここまで.

▶次ページからは,
「ミラーボールで作る入れ子図形」 (北海道大学総合博物館数学ブースで2016 年から 2019 年まで 展示) の会場における解説の一部,
ミラーボールで作る入れ子図形
およびインターネット上の解説,
ミラーボールで作る入れ子図形(補遺)
の再掲です.

現在の博物館展示は上記のリニューアル版で,
株式会社エフ・オブジェクト
北海道大学総合博物館研究支援推進室
北海道大学大学院理学研究院数学部門
により共同制作され, 2019 年12 月から展示されています.

続きもご覧ください!

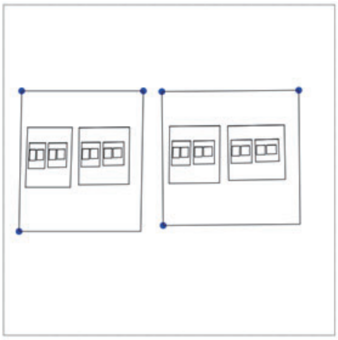
ミラーボールで作る入れ子図形



万華鏡で遊んだことはあるでしょうか。鏡の反射面を内側に向けて三角柱を作り、底面には光が入るような蓋をして、中に数粒のガラス粒を入れます。上面には小さなのぞき穴をつけて蓋をします。のぞいてみると、ガラス玉は鏡で反射を続け、無限に広がる幾何学模様を織り成します。ちょっと動かすだけで全く異なる模様が現れますから、興に乗ると時間の経つことも忘れてしまいます。

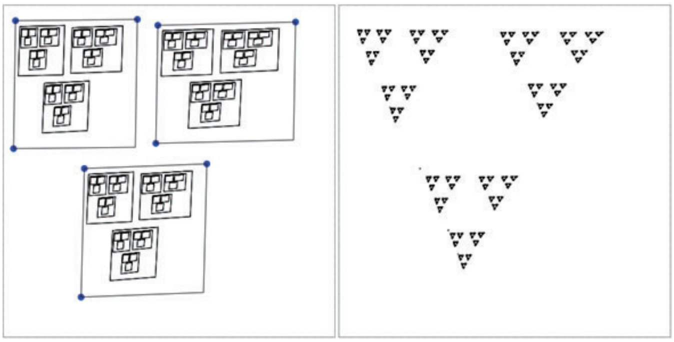
万華鏡の作る幾何学模様には、鏡を２枚組み合わせると反射を繰り返して鏡像が入れ子になるという背景が隠れています。２枚の鏡を向かい合わせに置くと、１枚の鏡には向かいの鏡が映り、映った鏡にはまた向かいの鏡が映り、それを繰り返して無限に続く鏡像を作ります。同じことは縮小コピーを繰り返すことでも生じます。

図：向かい合った鏡に映り続ける縮小コピーのイメージ



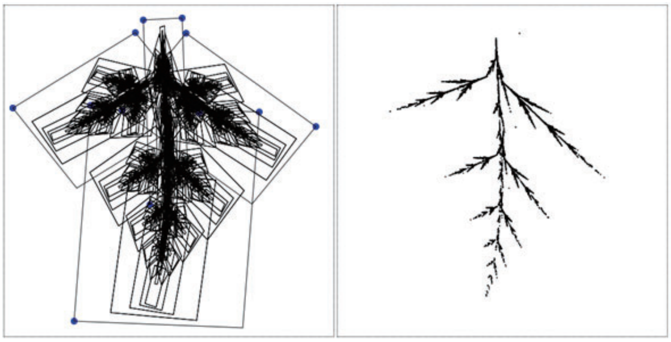
万華鏡には３枚の鏡があります。大きな１枚の鏡の向かいに小さな２枚の鏡を並べるとどうなるでしょうか。外側の大きな鏡に映った像は向かい側の小さな２枚の鏡に映った後に入れ子になりながら小さく写ることを続けます。

図：１枚の大きな鏡と２枚の小さな鏡に映り続けるイメージ



小さな鏡を３枚に増やすと下の図の左側のように映り続け、最終的には右側のような図形を作ります。

図：左）鏡の配置と入れ子の様子、
右）最終的にできる図形。



このような入れ子を何回も何回も繰り返してできる図形をフラクタル図形と呼びます。数学の様々な分野で研究され、応用上も重要な図形の一つです。例えば、次のように植物様の図形を作ることができます。

図：（逆さになった）植物様の図形。幹と左右の枝にそれぞれ１枚、全体を表す１枚の合計４枚の小さな鏡で構成する。

参考資料
山口昌哉『カオスとフラクタル』（ちくま学芸文庫）

クリスマスツリーの飾りに使うミラーボールで実験できるようにしています。正四面体の頂点にミラーボールを置くように配置して、底面から頂点を覗くように観察すると、三角形の入れ子になったフラクタル図形を見ることができます。様々な置き方を試してみると、置き方に応じた異なるフラクタル図形が見えるでしょう。

ミラーボールで作る入れ子図形（補遺）

北海道大学大学院理学研究院数学部門（２０１６年作成）

http://www.math.sci.hokudai.ac.jp/museum/

1　数学的背景

博物館の展示解説ではフラクタル図形を縮小コピーや向き合わせた鏡で説明しました。ここでは少し数学的に説明します。

まず、縮小コピーを作る操作を数学的に表しましょう。xy-平面上の図形 S を r 倍に拡大または縮小して新しい図形 S' を作る操作を $S' = rS$ と書きます。S' 内の点を座標 (x', y') と書き、S 内の点を座標 (x, y) と書けば、$(x', y') = (rx, ry)$ です。

図 1: 縮小と平行移動

r 倍に拡大または縮小して (a, b) だけ平行移動するなら、$(x', y') = (rx, ry) + (a, b)$ となります。$r > 1$ の場合は拡大、$r < 1$ のときに縮小です。

拡大または縮小して平行移動しても図形の形は変わりませんので、このような操作を相似変換と呼びます。簡単のために $(x', y') = T(x, y)$ と書き直すことにしましょう。r,a,b を変えず、縮小する相似変換を繰り返して作用すると、最後にはどんな図形も唯一点に集まります。

１回の作用は $(x', y') = T(x, y) = (rx, ry) + (a, b) = (rx + a, ry + b)$, ２回作用すると $(x'', y'') = T^2(x, y) = T(x', y') = T(rx+a, ry+b) = (r(rx+a)+a, r(ry+b)+b)$ などとなります。

一般的に、相似変換に限らず縮小する操作を縮小写像とよんで、次の条件で定めます。縮小率 $r < 1$ を定数とします。

$$|T(x_1, y_1) - T(x_2, y_2)| \leq r|(x_1, y_1) - (x_2, y_2)|$$

これは、平面にどんな２点を選んでも T を作用した後は距離が r 倍以下に縮むことを表しています。

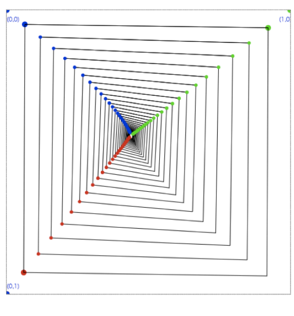


図 2: 一番外側の正方形を S として縮小写像を繰り返し作用する様子。

何回も繰り返す操作を簡単に表すため、n 回繰り返す場合を $T^n(x, y)$ と書きます。無限回繰り返すことを $\lim_{n\to\infty} T^n(x, y)$ と書きます。図 2 にはその様子を描きました。縮小写像を繰り返し作用

して最終的に集まる一点のことを、その縮小写像の不動点とよびます。不動点の座標を (x_0, y_0) とおくと、$T(x_0, y_0) = (x_0, y_0)$ という関係が成立します。

2　反復関数系

縮小写像を１つだけ繰り返して作用すると１点に集まります。複数個用意すると、集まる先は１つの点に止まらずにたくさんの点が現れます。

縮小写像を T_1, T_2 の２つ用意しましょう。例えば、図 3 では一番外側の正方形をもとの図形として、中間の２つの正方形に写す縮小写像を２つ用意しています。もとの図形をそれぞれの操作で変換すると $T_1(S)$ と $T_2(S)$ の２つの図形が現れます。この２つをまた T_1 と T_2 で操作すると $T_1(T_1(S))$, $T_1(T_2(S))$, $T_2(T_1(S))$, $T_2(T_2(S))$ の４つの図形が現れます。図 3 では一番小さい４つの正方形にあたります。縮小写像 T_1, T_2 を n 回作用するごとに、2^n 個の小さな正方形が現れます。最終的には無限個の点からなる図形が決まります。

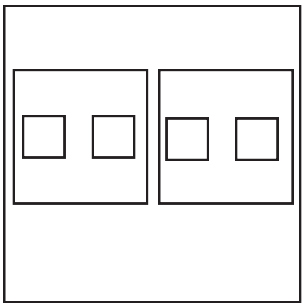


図 3: ２つの縮小写像によるの入れ子関係

図 4 の左の図のように３個の縮小写像を n 回繰り返しても同様です。この場合は 3^n 個の図形が現れます。これをずっと繰り返すと図 4 の右の図のように極めて細かな構造を持つ図形が現れます。このような図形をフラクタル図形とよび、数学的にも応用上も重要な図形であることがわかっています。

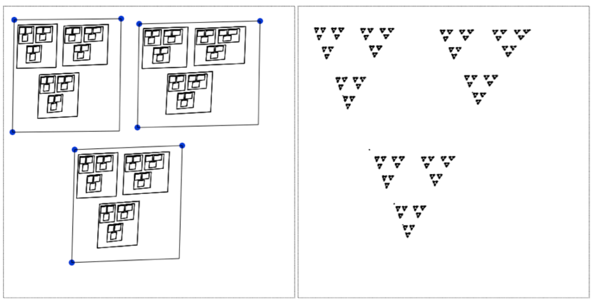


図 4: ３個の縮小写像を繰り返して現れる図形

フラクタル図形を生み出す過程はそれほど難しいものではありません。それでも縮小率や平行移動の向きと大きさを変えることで多様なフラクタル図形を作れます。縮小写像による入れ子という構造は自然界にも普遍的に存在しており、フラクタル図形の性質によって様々な現象が理解されています。

参考文献

[1] 山口昌哉『カオスとフラクタル』（ちくま学芸文庫）

[2] 高安秀樹『フラクタル』（朝倉書店）