

多面体の非周期的な色塗り方の数え上げ

九州大学大学院数理学府 田村 朋之

Tomoyuki Tamura

Graduate School of Mathematics, Kyushu University

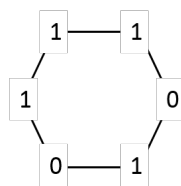
概要

複数のアルファベットを重複込みで円周上に等間隔に配置したとき、その配置が回転対称系をもたないもの、所謂 primitive necklace と呼ばれるものの数を数える式として necklace polynomial と呼ばれる多項式が存在する。N.Metropolis と G-C.Rota は 1983 年、necklace polynomial について necklace ring の乗法や Frobenius operation の由来となる等式を複数示している。他方、primitive necklace の総数は、多角形の頂点に複数の色を塗ったときに回転対称系をもたないものの総数と解釈できる。本講演では多面体の頂点に配色を行ったときに回転対称系により非周期的な色塗り方の数え上げを表す式を導入し、Metropolis によって示された necklace polynomial に関する等式の多面体版への拡張に関する考えを述べる。

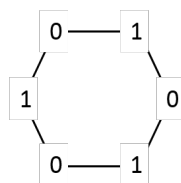
1 Introduction

n を自然数、 A を有限集合とする。円周上の n 個の等間隔の箇所に A の元を重複込みで置く necklace とは、それらの回転による同値類全体として定義される。このうち、primitive であるものとは自身と同一になるような回転が自明なもの以外に存在しない時に言う。

例えば $n = 6$ で $A = \{0, 1\}$ であるとする。円周上に頂点が正 6 角形となるような場所に A の元を重複込みで配置する。次の置き方は primitive である。



しかし、次の置き方は円の中心から $\frac{2\pi}{3}$ 回転することで同一の配置となるため primitive ではない。



円周上の等間隔に配置された n 個の箇所に k 種類の元を配置する primitive necklace の数 $M(k, n)$ は次の

k についての多項式で表され, これは necklace polynomial と呼ばれる.

$$M(k, n) = \frac{1}{n} \sum_{d|n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) k^d. \quad (1.1)$$

但し写像 μ はメビウス関数である. N.Metropolis と G.C-Rota は [MR] において necklace polynomial に関する主結果の一つとして cyclotomic identity と呼ばれる次の等式を組み合わせ論的に示した. 任意の自然数 k に対し,

$$\frac{1}{1-kx} = \prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{1-x^n} \right)^{M(k,n)} \quad (1.2)$$

が成り立つ.

加えて N.Metropolis らは式 (1.1) についての次の二つの等式を示した. 任意の自然数 k_1, k_2, n, r に対し.

$$M(k_1 k_2, n) = \sum_{[i,j]=n} (i, j) M(k_1, i) M(k_2, j), \quad (1.3)$$

$$M(k^r, n) = \sum_{[j,r]=nr} \frac{j}{n} M(k, j) \quad (1.4)$$

が成り立つ. 但し, 任意の自然数 i, j に対し (i, j) は最大公約数, $[i, j]$ は最小公倍数である. さらにこの二つの等式に由来する形で, 任意の可換環に対し necklace ring と呼ばれる可換環とこの上で定義される Frobenius operation を定義した.

多項式 $M(k, n)$ は primitive necklace の総数である一方, 正 n 多角形の頂点, 若しくは辺に k 色の色を重複込みで彩色したときに回転対称系をもたないものの総数であるとも考えることができる. 本講演では正多角形のみならず正多角柱や正 4 面体等の多面体において, 式 (1.1) に類似した非周期的な色塗り方の数え上げ多項式を求め, さらに式 (1.3) や (1.4) に類似した式を §3.3 の (3.3), (3.4) で述べる.

非周期的な色塗り方やその総数に関する等式を示す手段として, 本講演では正多面体の面や頂点の集合 X とこれに作用する回転対称系を与える有限群 G を指定し, X から k 色からなる色の集合 A への写像を考察する. 本稿ではその全体を $J_k(X)$ と記す. 集合 $J_k(X)$ には有限群 G が作用し, さらに G/C_1 (C_1 は単位元だけからなる集合) と同型な軌道の数に非周期的な色塗り方の数と等しい.

なお, X として G そのものが指定された場合, G の部分群を V としたとき, $J_k(X)$ の軌道において G/V と同型な軌道数は [Oh1], [Oh2] 等において $M_G(r, V)$ という r の多項式として知られる. [Oh1] において r は λ -ring と呼ばれる可換環の元として用いられる. λ -ring については [Oh1] のみならず [Knu] や [Yau] に詳しい. なお [Oh2] において r は λ -ring の一つ, 整数環の元として扱われている. [Oh1] において多項式 $M_G(r, V)$ は 環同型写像, exponential map の定義に用いられる.

本稿の内容を述べる. 第 2 章では [Knu], [Sch] の内容に基づき, 有限群の作用や Burnside ring 等, 本稿において必要な概念を述べる.

第 3 章では主結果として, 有限群 G が作用している集合, G -Set X に対し, $J_{N,A}(X)$ という G -Set を定義する. 本稿ではこれを $|A|$ -colored N -nested G -Set と呼ぶことにする. これは [DS] §2.13 にて述べられている G -Set X の symmetric algebra の概念の拡張であり, N として非負整数全体の集合, $k = 1$ とすることで $J_{N,A}(X)$ から定義される有限群の複素数体上の表現が対称テンソル積表現と同一となる. 本稿では $N = \{0, 1\}$ とすることで先述した有限集合 $J_k(X)$ を得る. さらに式 (1.3), (1.4) に類似した, 色の数に関する乗法の展開を述べる.

第4章では具体的に多面体と考察対象 X , そして回転対称系を与える有限群 G を指定し, 多角形の回転を含む具体例をいくつか示す.

2 Preliminaries

この章では G を有限群とし, 単位元を e とする. この章では有限群の作用や uper Character, Burnside ring 等, 本稿において必要な概念を述べる. 詳しくは [Knu] Chapter II-4 もしくは [Sch] §2.4 を参照のこと.

2.1 定義と軌道

集合 X が G -Set であるとは, 写像 $\iota: G \times X \rightarrow X$ で $gx := \iota(g, x)$ ($g \in G, x \in X$) としたとき,

$$g_1(g_2x) = (g_1g_2)x, \quad ex = x$$

が任意の $g_1, g_2 \in G, x \in X$ で成り立つものが備わっている時とする. 以降, 本稿では特に断りがない限り G -Set は有限集合であるとする.

また, 任意の $x, y \in X$ に対し $y = gx$ を満たす $g \in G$ が存在するとき, X は推移的 (transitive) であるという.

G -Set の和集合と積集合について, X_1, X_2 を G -Set とすると, $X_1 \cup X_2$ も G -Set となる. また, $X_1 \times X_2$ も $g(x_1, x_2) := (gx_1, gx_2)$ ($g \in G, x_1, x_2 \in X$) と作用を定義することにより G -Set となる.

X を G -Set, $Y \subset X$ で任意の $g \in G, y \in Y$ に対し $gy \in Y$ が成り立つとき Y も G -Set となる. 特に $x \in X$ としたとき, 集合 $Gx := \{gx \in X \mid g \in G\}$ も一つの G -Set となるが, これを X の G -軌道という. G -Set X はいくつかの G -軌道の直和として表すことができる.

Example 2.1.1. H を G の部分群としたとき, $g_1\pi_H(g_2) := \pi_H(g_1g_2)$ ($g_1, g_2 \in G$) により G/H は G -Set となる. 但し写像 $\pi_H: G \rightarrow G/H$ は自然な写像とする. これは推移的な G -Set の一つである.

作用の制限について述べる. G -Set X はその G のどの部分群 H に対しても H -Set である. このようにみなすとき, X を $\text{Res}_H^G(X)$ と記す. 各 G の部分群 K に対し, $\text{Res}_H^G(G/K)$ について次が成り立つ.

Proposition 2.1.2. 任意の G の部分群 H, K に対し $\text{Res}_H^G(G/K) = \bigcup_{HgK} H/H \cap gKg^{-1}$ が成り立つ. 特に $\text{Res}_H^G(G/K)$ の軌道の数は H, K による両側剰余類分解の個数に一致する.

Proposition 2.1.2 は, $\text{Res}_H^G(G/K)$ における軌道分解で各軌道の固定部分群を計算することで証明することができる.

2.2 G -Set の同型

X_1, X_2 を G -Set とする. 写像 $f: X_1 \rightarrow X_2$ について $gf(x) = f(gx)$ が任意の $g \in G, x \in X$ に対し成り立つとき G -map であるという. さらに X_1, X_2 の間に全単射な G -map が存在するとき, X_1, X_2 は G -同型であるという. G -Set の全体には G -同型であることによる同値関係が定義される. 有限な G -Set X の同型類を $[X]$ と記し, その全体を $M(G)$ と記す.

また, X_1, X_2, X_3, X_4 を G -Set で X_1 と X_3 が, X_2 と X_4 がそれぞれ G -同型ならば $X_1 \cup X_2$ と $X_3 \cup X_4$ が, $X_1 \times X_2$ と $X_3 \times X_4$ がそれぞれ G -同型である. よって $M(G)$ は直和を加法, 直積を乗法とした semi-ring

の構造が定義される。

推移的な G -Set は G のある部分群 H に対し G/H と G -同型である。さらに次の結果が知られている。

Proposition 2.2.1 ([Sch] Lemma 2.4.3). H_1, H_2 を G の部分群とする。 G -Set G/H_1 と G/H_2 が同型であるための必要十分条件は $g \in G$ で $g^{-1}H_1g = H_2$ となるものが存在することである。

S, T を G -Set とする。 S から T への写像全体の集合 $\text{Hom}(S, T)$ は任意の $g \in G, f \in \text{Hom}(S, T), s \in S$ に対し $(gf)(s) := gf(g^{-1}s)$ と定義することで G -Set となる。これによる固定点集合 (G -map 全体) を $\text{Hom}_G(S, T)$ と記す。この定義の仕方は [Oh2] §2.1 によるものである。 S_1, S_2, T を G -Set としたとき、 S_1, S_2 が G -同型ならば $\text{Hom}(S_1, T)$ と $\text{Hom}(S_2, T)$ は G -同型である。

2.3 super character

この節では有限群 G に関し G -Set X に対する軌道を求めるために super character の概念を述べ、 G -Set X の軌道の個数を調べるためにはこの super character の計算を行えばよいことを示す。super character という言葉は [Knu] §2.4 にて用いられる用語である

Definition 2.3.1 ([Knu] p.110). X を G -Set, H を G の部分群とする。集合 X^H を

$$X^H := \{x \in X \mid hx = x \text{ for any } h \in H\}$$

と定義し、そして $|X^H|$ を $\varphi_H(X)$ と記す。

二つの G -Set S, T が G -同型ならば $|S^H| = |T^H|$ が任意の部分群 H に対して成り立つので、 $\varphi_H(S) = \varphi_H(T)$ も成り立つ。また、[Knu] p.111 Theorem の証明内容から次の関係式が成り立つ。

Proposition 2.3.2. H_1, H_2 を G の部分群とする。

- (1) $\varphi_{H_1}(G/H_2) \neq 0$ であるための必要十分条件は $g^{-1}H_1g \subset H_2$ となる $g \in G$ が存在することである。
- (2) $\varphi_{H_1} = \varphi_{H_2}$ であるための必要十分条件は $g^{-1}H_1g = H_2$ となる $g \in G$ が存在することである。

G -Set の同型同値類の全体 $M(G)$ の環化を $B(G)$ と記し、これを G の Burnside ring という。 G の部分群全体における共役同値類全体の集合を $\Phi(G)$ としたとき、Burnside ring は $\{[G/H] \mid H \in \Phi(G)\}$ を $\mathbb{Z}$ -基底に持つ。 $X \in B(G)$ における $[G/H]$ の成分を $\mu_H(X)$ と記す。

任意の G の部分群 H に対し、 G -Set S, T が G -同型ならば $\varphi_H(S) = \varphi_H(T)$ が成り立つ。また、 $\varphi_H(S \cup T) = \varphi_H(S) + \varphi_H(T)$, $\varphi_H(S \times T) = \varphi_H(S)\varphi_H(T)$ が成り立つので、写像 φ_H は Burnside ring 上の環準同型写像 $\varphi_H : B(G) \rightarrow \mathbb{Z}$ へと拡張される。

$\mathbb{C}^{\Phi(G)}$ を $\Phi(G)$ から $\mathbb{C}$ への写像全体と定義する。加法・乗法は $\mathbb{C}$ の加法・乗法により定義される。 $\mathbb{C}^{\Phi(G)}$ の元を super central character と呼ぶ。写像 $\varphi : B(G) \rightarrow \mathbb{C}^{\Phi(G)}$ を $\varphi([X])(H) := \varphi_H([X])$ と定義する。 X が G -Set ならば、 $\varphi(X)$ を X の super character という。この章の最後に、写像 φ の性質について述べる。

Proposition 2.3.3. 写像 φ は単射な環準同型写像である。

Proof. 環準同型性は明らか。 $[X] \in B(G)$ で $\varphi([X])(H) = 0$ とする。 $H < G$ で $|G/H|$ に関する数学的帰納法により $\mu_H(X) = 0$ を示す。 $H = G$ のときは $\mu_G(X) = \varphi([X])(G) = 0$ である。 $X = \sum_H \mu_H(X)[G/H]$ とする。 V を G の部分群で、数学的帰納法の課程により G の部分群 H で $V \subsetneq H$ となるものに対し $\varphi_V(G/H) = 0$

であると仮定すると,

$$0 = \varphi_V(X) = \sum_H \mu_H(X) \varphi_V(G/H) = \mu_V(X) \varphi_V(G/V) + \sum_{V \subset H} \mu_H(X) \varphi_V(G/H) = \mu_V(X) \varphi_V(G/V)$$

が成り立つので $\mu_V(X) = 0$ が成り立つ. よって φ は単射である. $\square$

写像 φ の単射性から, $\mu_H(X)$ を求めるためには $\varphi_V(G/H)$ がどのような値になるかを知ればよい.

Example 2.3.4 (巡回群 C_n について). n 次巡回群 C_n について, $\Phi(C_n) = \{C_{n/d} \mid d \mid n\}$ が成り立つ. d, d' を自然数 n の約数とすると,

$$\text{Res}_{C_{\frac{n}{d'}}}^{C_n} (C_n/C_{\frac{n}{d}}) = \bigcup_{C_{\frac{n}{d}} x C_{\frac{n}{d'}}} C_d / (C_{\frac{n}{d}} \cap x C_{\frac{n}{d'}} x^{-1}) = C_{\frac{n}{d}} / C_{\frac{n}{[d, d']}} \cup \cdots \cup C_{\frac{n}{d}} / C_{\frac{n}{[d, d']}} \quad ((d, d') \text{ 個})$$

である. $\text{Res}_{C_{\frac{n}{d'}}}^{C_n} (C_n/C_{\frac{n}{d'}})$ の軌道の数 (d, d') 個である. また, $\varphi_{C_{\frac{n}{d}}} (C_n/C_{\frac{n}{d'}})$ は d' が d を割るとき d' でそうでないときは 0 となる. よって,

$$\varphi_{C_{\frac{n}{d}}} (X) = \sum_{d' \mid n} \mu_{C_{\frac{n}{d'}}} (X) \varphi_{C_{\frac{n}{d}}} (C_n/C_{\frac{n}{d'}}) = \sum_{d' \mid d} d' \mu_{C_{\frac{n}{d'}}} (X) \quad (2.1)$$

が成り立つので, メビウスの反転公式より

$$\mu_{C_{\frac{n}{d}}} (X) = \frac{1}{d} \sum_{d' \mid d} \mu\left(\frac{d}{d'}\right) \varphi_{C_{\frac{n}{d'}}} (X)$$

が成り立つ.

Remark 2.3.5. 本稿では触れないが, 式 (2.1) は, 任意の可換環 R に対して定義される *necklace ring* $Nr(R)$ と *ghost ring* $Gh(R)$, その自然な写像 φ に対し, $\alpha \in Nr(R)$ としたときに $\varphi(\alpha)(d)$ を計算しているのと同じ形をしている. 詳しくは [Yau] §5.6, 若しくは [MR] に記述されている.

3 $|A|$ -colored N -nested G -Set

前章に引き続き G を有限群とする. この章では任意の G -Set X と考察する色の全体である有限集合 A , そして $N \subset \mathbb{N} \cup \{0\}$ に対し, $|A|$ -colored N -nested G -Set と呼ぶ G -Set $J_{N,A}(X)$ を定義する. 本稿では $N = \{0, 1\}$ とすることで, 次章における多面体における非周期的な色塗り方の数えあげに生かす. §3.1 では $|A|$ -colored N -nested G -Set を定義しその性質を述べる. §3.2 は §3.1 で述べる概念のアイデアと共に対称テンソル積表現との関わりを述べる. §3.3 では §3.1 で述べる概念を用い, 多面体の色塗り方を表す G -Set の定義を行う.

この章では $T^n(A)$ を $[n]$ から A への写像全体と定義する. 任意の自然数 n に対し $T^n(A)$ を自明な G -Set として扱い, 位数は $|A|^n$ である.

3.1 定義

Definition 3.1.1. X を G -Set, $N \subset \mathbb{N} \cup \{0\}$ とする. X の $|A|$ -colored N -nested G -Set を,

$$J_{N,A}(X) := \text{Hom}(X, \bigcup_{n \in N} T^n(A))$$

と定義する.

$J_{N,A}(X)$ は N の取り方により無限集合になり得るが, $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} T^n(A)$ を自明な G -Set とみなすことで $J_{N,A}(X)$ も G -Set とみなすことができる. 次に, $J_{N,A}(X)$ を次数により特徴付けと直和分解を行う.

Definition 3.1.2. $a \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} T^n(A)$ に関し, ある自然数 n が存在し $a \in T^n(A)$ となるが, $\deg(a)$ を n と定義する. また, $f \in J_{N,A}(X)$ に対し, $\deg(f) := \sum_{x \in X} \deg(f(x))$ と定義する. さらに

$$J_{N,A}^n(X) := \{f \in J_{N,A}(X) \mid \deg(f) = n\}$$

と定義する.

このことから,

$$J_{N,A}(X) = \bigcup_{n=0}^{\infty} J_{N,A}^n(X)$$

が成り立つ. また任意の $g \in G, f \in J_{N,A}^n(X)$ に対し $gf \in J_{N,A}^n(X)$ が成り立つので $J_{N,A}^n(X)$ は G -Set である.

Proposition 3.1.3. X, Y を G -Set とすると.

$$J_{N,A}^n(X \cup Y) = \bigcup_{i+j=n} J_{N,A}^i(X) \times J_{N,A}^j(Y)$$

が成り立つ. 特に, $J_{N,A}(X \cup Y) = J_{N,A}(X) \times J_{N,A}(Y)$ が成り立つ.

次に, super character と $J_{N,A}(X)$ を用いた次数付けによる母関数を定義する.

Definition 3.1.4. 任意の G の部分群 H に対し,

$$\varphi_{H,t}(J_{N,A}(X)) := \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_H(J_{N,A}^n(X)) t^n$$

と定義する.

このことから特に, $\varphi_{H,t}(J_{N,A}(X \cup Y)) = \varphi_{H,t}(J_{N,A}(X)) \varphi_{H,t}(J_{N,A}(Y))$ が成り立つ.

Proposition 3.1.5. H を G の部分群とすると,

$$\varphi_G(J_{N,A}^n(G/H)) = \begin{cases} |A|^{\frac{n}{|G/H|}} & (|G/H| \mid n, \frac{n}{|G/H|} \in N) \\ 0 & (otherwise) \end{cases}$$

が成り立つ.

Proof. $f \in J_{N,A}^n(G/H)$ が任意の $g \in G$ に対し $gf = f$ を満たすとする. G/H は G -Set として推移的なので, f は定値写像である. よって $|G/H| \mid \deg(f)$ でなければこのような f は存在しない. $|G/H| \mid \deg(f)$ とする. $\alpha \in G/H$ で $\deg(f(\alpha)) = n'$ とおくと $n' \in N$ が成り立つ. さらに $n'|G/H| = n$ となる. $f(\alpha)(m) \in A$ ($1 \leq m \leq n'$) について, とり得る数は $|A|^{n'}$ 個であるので $\varphi_G(J_{N,A}^n(G/H)) = |A|^{n/|G/H|}$ が成り立つ. $\square$

3.2 対称テンソル積表現について

この節では、対称テンソル積表現との関係を述べる。§3.1 で述べた $|A|$ -colored N -nested G -Set のアイデアは [DS] §2.13 にて述べられていた G -Set X の symmetric algebra の概念に由来する。この節では N として非負整数全体の集合、 $k = 1$ とすることで、 $J_{N,A}(X)$ から生成される G の表現が X から生成される G の表現の対称テンソル積表現と同一であり、さらに X に付随する置換表現の指標について対称テンソル積表現の指標を計算することに繋がることを述べる。

改めて $N = \mathbb{N} \cup \{0\}$ とする。 H を G の部分群とすると、

$$\varphi_{G,t}(J_{N,A}(G/H)) = \frac{1}{1 - |A|t^{|G/H|}}$$

が成り立つ。このことから、 X を G -Set とし、位数 m となる G -軌道の数 O_m とすると、

$$\varphi_{G,t}(J_{N,A}(X)) = \prod_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{1 - |A|t^m} \right)^{O_m}$$

が成り立つ。

ここで $|A| = 1$ で $g \in G$ とし、 K を g から生成される部分群とすると、

$$\varphi_{G,t}(J_{N,A}(\text{Res}_K^G(X))) = \prod_{d|O(g)} \left(\frac{1}{1 - t^d} \right)^{O'_m}$$

が成り立つ。但し自然数 m に対し O'_m は $\text{Res}_K^G(X)$ の位数 m である軌道の個数である。これは X に付随する G の置換表現に対する、対称テンソル積表現の指標の母関数と一致する。

3.3 G -Set $J_k(X)$ について

この節では次章で用いる多面体の非周期的色塗り方の数を計算するために §3.1 で述べた $|A|$ -color N -nested G -Set に対し $N = \{0, 1\}$ とし、その軌道の計算について述べる。またこのときの $J_{N,A}(X)$ に関し成り立つ G -同型の結果を述べる。

$N = \{0, 1\}$ とすると、 $J_{N,A}(X) = \text{Hom}(X, \{1\} \cup A)$ が成り立つ。これは一つの有限な G -Set である。任意の部分群 H に対し、

$$\varphi_{G,t}(J_{N,A}(G/H)) = 1 + |A|t^{|G/H|}$$

となる。このことから、 X を G -Set とし、位数 m となる G -軌道の数 O_m とすると、

$$\varphi_{G,t}(J_{N,A}(X)) = \prod_{i=1}^{\infty} (1 + |A|t^m)^{O_m}$$

が成り立つ。

また $t = 1$ を代入することで、 X の軌道の数 $O(X)$ とすると、

$$\varphi_G(J_{N,A}) = (1 + |A|)^{O(X)} \quad (3.1)$$

が成り立つ。

以降ではこの $J_{N,A}(X)$ を $J_k(X)$ と記す。ここでの k とは $1 + |A|$ のことである。

この $J_k(X)$ の軌道について、式 (3.1) から $\varphi_H(J_k(X)) = k^{O_H(X)}$ が成り立つ。但し $O_H(X)$ は $\text{Res}_H^G(X)$ の軌道の個数である。よって写像 $\varphi: B(G) \rightarrow \mathbb{C}^{\Phi(G)}$ を用いることで $J_k(X)$ の軌道を求めることができる。

また、 $J_k(X)$ については $J_k(X \cup Y) = J_k(X) \times J_k(Y)$ が、さらに写像 φ と $\varphi(J_k(X))$ の結果を用いることで $J_{k_1 k_2}(X)$ と $J_{k_1}(X) \times J_{k_2}(X)$ が G -同型であることがわかるため、特に任意の G の部分群 K に対し、

$$\mu_K(J_k(X \cup Y)) = \sum_{V_1, V_2 \in \Phi(G)} b_{V_1, V_2}(K) \mu_K(J_k(X)) \mu_K(J_k(Y)), \quad (3.2)$$

$$\mu_K(J_{k_1 k_2}(X)) = \sum_{V_1, V_2 \in \Phi(G)} b_{V_1, V_2}(K) \mu_K(J_{k_1}(X)) \mu_K(J_{k_2}(Y)) \quad (3.3)$$

が成り立つ。但し b_{V_1, V_2} は両側剰余類 $V_1 g V_2$ で $V_1 \cap g V_2 g^{-1}$ が K と G の部分群として共役なものの個数である。

最後に、任意の自然数 r に対し $J_{k^r}(X)$ については次が成り立つことを述べる。以下、 C_r を位数 r の巡回群とし、直積群 $C_r \times G$ の部分群 $C_1 \times G$ を G と同一視する。

Proposition 3.3.1. X を G -Set, r を自然数とすると、 $\text{Res}_{C_r \times G}^G(J_k(C_r \times X))$ と $J_{k^r}(X)$ は G -同型である。特に G の任意の部分群 K に対し、

$$\mu_K(J_{k^r}(X)) = \sum_{L < C_r \times G} c_K(L) \mu_L(J_k(C_r \times X)) \quad (3.4)$$

が成り立つ。但し $c_K(L)$ は $C_1 \times G$ と L との両側剰余類 $(C_1 \times G)gL$ で、 $(C_1 \times G) \cap gLg^{-1}$ が $C_1 \times K$ と共役なものの個数である。

証明には、任意の G -Set X に対し $\text{Res}_H^G(J_{N,A}(X))$ が $J_{N,A}(\text{Res}_H^G(X))$ と G -同型であることを用いる。これは恒等写像が全単射な G -map の存在による。また、 $\varphi_{C_1 \times H}(C_r \times X) = r\varphi_H(X)$ であることを用いる。直接 G -map を述べるのではなく、双方の super character が一致していることを用いる。

次章でも述べるが、与えられた多面体の考察対象 X とその回転対称系 G を指定することで、 $\mu_{C_1}(J_k(X))$ が非周期的な色塗り方の個数を与えている。また、式 (3.3) において $G = C_n$, $X = C_n/C_1$, $K = C_1$ とすることで (1.3) を得ることができる。一方、式 (3.4) において左辺は $M(k^r, n)$ を得ることができ、 $M(k^r, n)$ の一つの表し方と捉えることができる。

4 多面体の非周期配色の総数

本稿の最後に、§3 で述べた G -Set $J_k(X)$ を用い、多面体の非周期的な色塗り方の数を計算する。

与えられた多面体の面や辺、頂点などを具体的に指定し、その全体を X とし、その回転対称系を与える群 G を指定する。例えば、正 5 角形の頂点を与える集合を $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ とし、その回転対称系として 5 次巡回群 C_5 を考えることができる他、裏返しを含めた変換を含めて二面体群 D_{10} も考えることができる。

さらに自然数 k を固定する。このとき、 G -Set $J_k(X)$ とは指定した対象の全体 X の一つ一つに異なる k 個の色を彩色する全ての方法とみることができる。

ここで、指定した対象全体 X の G における非周期的色塗り方とは、 G により作用させて元に戻るものが自身以外に存在しない塗り方である。具体的には $f \in J_k(X)$ であって $|Gf| = |G|$ を満たすものと定義する。その総数は $|G|\mu_{C_1}(J_k(X))$ として実現される。

以下に、正多角形 (回転のみのものと裏返し変換を許容するもの)、正多角柱、正 4 面体の頂点だけからなる

集合に対し非周期的な色塗り方の総数を述べる．なお，各図形に対する回転対称系を与える有限群 G の指定の仕方については [Cro] §8 または [Kon] p.19 を参照のこと．

4.1 正 n 角形について

正 n 角形の頂点の集合として $X = C_n/C_1$ とし，回転対称系を与える群として n 次巡回群 C_n とすることで，

$$\mu_{C_1}(J_k(X)) = \frac{1}{n} \sum_{d|n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) k^d = M(k, n)$$

を得る．

4.2 正多角柱の頂点について

この場合は $G = D_{2n}$, $X = D_{2n}/C_1$ を考える．任意の自然数 n に対し $n = 2^l n'$ (n' は奇数, $l \geq 0$) とすると，

$$\begin{aligned} & \mu_{C_1}(J_k(D_{2n}/C_1)) \\ &= \begin{cases} \frac{1}{2}(M(k^2, n) - nM(k, n)) & (l = 0) \\ n' \left(\frac{1}{2n} M(k^{2^{l+1}}, n') - \frac{n+1}{2n} M(k^{2^l}, n') + \frac{1}{2} M(k^{2^{l-1}}, n') \right) & (l \geq 1) \end{cases} \end{aligned}$$

を得る．

4.3 正多角形の頂点で裏返り変換を許容する場合について

この場合は $G = D_{2n}$, $X = D_{2n}/D_2$ を考える．任意の自然数 n に対し $n = 2^l n'$ (n' は奇数, $l \geq 0$) とすると，

$$\begin{aligned} & \mu_{C_1}(J_k(D_{2n}/D_2)) \\ &= \begin{cases} \frac{1}{2} \left(M(k, n) - n\sqrt{k}M(\sqrt{k}, n) \right) & (l = 0) \\ \frac{1}{4} M(k^2, \frac{n}{2}) - \frac{nk+n+2}{8} M(k, \frac{n}{2}) + \frac{n}{4} \sqrt{k} M(\sqrt{k}, \frac{n}{2}) & (l = 1) \\ n' \left(\frac{1}{2n} M(k^{2^l}, n') - \frac{nk+n+2}{4n} M(k^{2^{l-1}}, n') + \frac{k+1}{4} M(k^{2^{l-2}}, n') \right) & (l \geq 2) \end{cases} \end{aligned}$$

を得る．

4.4 正四面体の頂点について

この場合は $G = A_4$, $X = A_4/C_3$ ($C_3 = \{(1), (1\ 2\ 3), (1\ 3\ 2)\}$) を考えると，

$$\mu_{C_1}(J_k(X)) = \frac{1}{12} k(k-1)(k-2)(k+3)$$

を得る．

5 今後の課題について

今後筆者が考えていきたい問題として, Proposition 3.3.1 の改良を試みたい. Proposition 3.3.1 では $J_{kr}(X)$ の軌道の個数を $J_k(C_r \times X)$ の軌道の個数の和で書くことができたが, 本来式 (1.4) の拡張を記述するならば $J_k(C_r \times X)$ の軌道の個数を $J_k(X)$ の軌道の個数で表す必要があると思われる. これが今後の課題の一つである.

加えて, $C_r \times G$ という有限群の選択も課題である. Proposition 3.3.1 にて用いた直積群 $C_r \times G$ は, 自然数 r と有限群 G に対し, 有限群 G' であって G と同型な群を正規部分群として含み $|G'/G| = r$ が成り立つ, という条件を満たすものの一つである. この条件を満たす他の群の下で計算し Proposition 3.3.1 を計算するとどのような結果が得られるのかに興味がある. 実際 G が巡回群 C_s であった場合, $C_r \times C_s$ ではなく C_{rs} を選ぶことで式 (1.4) を得ることができる. しかし, 任意の有限群 G に対して式 (1.4) の拡張といえる式が得られるかは今後の課題である.

参考文献

- [Cro] P.R.Cromwell 著, 下川航也, 平澤美可三, 松本三郎, 丸本嘉彦, 村上 斉 訳, 多面体, シュプリンガー・フェアラーク東京, 2001
- [DS] Andreas W.M, Dress, Christian Siebeneicher, The Burnside ring of profinite groups and the Witt vector construction, *Advances in Mathematics* **70**, 87-132(1988)
- [Knu] Donald Knutson, λ -Rings and the Representation Theory of the Symmetric Group, Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York 1973
- [Kon] 近藤 武, 岩波講座 基礎数学 代数学 i 群論 I, 岩波書店, 1976
- [MR] N.Metropolis and Gian-Carlo Rota, Witt Vectors and the Algebra of Necklaces, *Advances in Mathematics* **50**, 95-125(1983)
- [Oh1] Young-Tak Oh, Generalized Burnside-Grothendieck ring functor and aperiodic ring functor associated with profinite groups, *Journal of Algebra* **291** (2005) 607-648
- [Oh2] Young-Tak Oh, Group-theoretical generalization of necklace polynomials, *J. Algebraic Combin.* **35** (2012), no. 3, 389-420.
- [Sch] Peter Schneider, *Modular Representation Theory of Finite Groups*, Springer Dordrecht Heidelberg New York London, 2013
- [Yau] Donald Yau, *Lambda-Rings*, World Scientific, 2010

Tomoyuki Tamura

Graduate School of Mathematics, Kyushu-University,

Nishi-ku Fukuoka, 819-0395, Japan.

E-mail: t-tamura@math.kyushu-u.ac.jp