半単純リー群のアファイン作用の不動点定理とヘッセ幾何[1)]

伊師英之[2)3)]

概要. 有限個の連結成分をもつ半単純リー群が有限次元実ベクトル空間にアファイン変換として作用しているとき，必ず不動点が存在することを示す．その応用として，この半単純リー群が自己同型として作用しているヘッセ領域は作用に関して不変なポテンシャルをもつことがわかる．

序.

正定値の r 次実対称行列全体のなす凸錐 $\mathcal{P}_r \subset \mathrm{Sym}(r, \mathbb{R})$ は対称錐の一例であり，その上の幾何と解析は純粋数学はもとより応用数学においても基本的な重要性をもつ．よく知られているように $\mathcal{P}_r$ は標準的なリーマン計量 $h(u, v)_x := \mathrm{tr}\,(x^{-1}ux^{-1}v)$ $(x \in \mathcal{P}_r,\ u, v \in \mathrm{Sym}(r, \mathbb{R}))$ によってリーマン対称空間になる ([2])．一方，この計量 h は $\mathcal{P}_r$ 上の関数 $\phi(x) := -\log\det x$ $(x \in \mathcal{P}_r)$ のヘッシアンで表されるヘッセ計量である．小原と江口（[4, 5, 6]）は適当な条件をみたす函数 $\mathcal{V} : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ に対して $\mathcal{P}_r$ 上の函数 $\phi^{(\mathcal{V})}(x) := \mathcal{V}(\det x)$ のヘッシアンで表されるヘッセ計量 $h^{(\mathcal{V})}$ を導入し，情報幾何を展開した（2.3 節参照）．容易に分かるように $h^{(\mathcal{V})}$ は $SL(r, \mathbb{R})$ の $\mathcal{P}_r$ への作用 $\alpha(g)x := gx{}^{\mathrm{t}}g$ $(g \in SL(r, \mathbb{R}), x \in \mathcal{P}_r)$ に関して不変である．そこで，逆に $SL(r, \mathbb{R})$ の作用 α で不変な $\mathcal{P}_r$ 上のヘッセ計量は必ず $h^{(\mathcal{V})}$ の形だろうか，という問題が自然に提起される．

一般にはヘッセ計量が群作用に関して不変でも，ポテンシャルが不変であるとは限らない．たとえば $\mathbb{R}^n$ 上のユークリッド計量は $\phi(x) := \sum_{i=1}^n x_i^2$ をポテンシャルとするヘッセ計量であり，任意の $a \in \mathbb{R}^n$ 方向の平行移動 $x \mapsto x + a$ に関して不変だが，ϕ は平行移動不変ではないし，平行移動不変な函数は定数なのでポテンシャルにはなりえない．

我々は，連結成分が有限個である半単純リー群 G が領域 $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$ にヘッセ計量 h を保つアファイン変換として作用するという設定において不変ポテンシャル函数の存在を示し（定理 5），$\mathcal{P}_r$ についての上記問題に肯定的な解答を与えた．定理 5 は G のアファイン作用に関する不動点定理 (4) から意外な方法で直ちに導かれるものである．そして不動点定理は半単純リー代数 $\mathfrak{g}$ の 1 次のコホモロジーの消滅（Whitehead の補題）からしたがう．その議論はおそらく既知と思われるが，先行研究を見つけられなかったので詳しく論じた．

[1)] この研究は JST さきがけの助成を受けたものである．

[2)] 名古屋大学, 大学院多元数理科学研究科.

[3)] 国立研究開発法人科学技術振興機構, さきがけ.

§1. アファイン作用とリー代数コホモロジー.

1.1. 実ベクトル空間 $\mathbb{R}^n$ 上の可逆なアファイン変換全体のなす群を $\mathrm{Aff}(\mathbb{R}^n)$ と書く. 群 G の $\mathbb{R}^n$ へのアファイン変換としての作用（本稿ではアファイン作用とよぶ）とは群準同型 $\alpha : G \to \mathrm{Aff}(\mathbb{R}^n)$ のことである. 元 $g \in G$ について, アファイン変換 $\alpha(g) \in \mathrm{Aff}(\mathbb{R}^n)$ に付随する線型変換を $L(g) \in GL(n, \mathbb{R})$ とし, $\tau(g) := \alpha(g)0 \in \mathbb{R}^n$ とおくと

$$\alpha(g)x = L(g)x + \tau(g) \qquad (x \in \mathbb{R}^n) \tag{1}$$

である. 任意の $g_1, g_2 \in G$ について, $\alpha(g_1g_2) = \alpha(g_1)\alpha(g_2)$ から

$$L(g_1g_2) = L(g_1)L(g_2), \qquad \tau(g_1g_2) = L(g_1)\tau(g_2) + \tau(g_1) \tag{2}$$

を得る. 逆に (2) をみたす $L : G \to GL(n, \mathbb{R})$ と $\tau : G \to \mathbb{R}^n$ があれば, (1) によってアファイン作用が定義される. 一方 $g \in G$ に対して

$$M(g) := \begin{pmatrix} L(g) & \tau(g) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in GL(n+1, \mathbb{R})$$

とおくと, (2) は $M : G \to GL(n+1, \mathbb{R})$ が群準同型であることと同値である.

以後 G をリー群とし, $\alpha : G \to \mathrm{Aff}(\mathbb{R}^n)$ を滑らかな作用, すなわちリー群としての準同型とする. このとき線型表現 $L : G \to GL(n, \mathbb{R})$ および $M : G \to GL(n+1, \mathbb{R})$ の微分表現を, それぞれ $\dot{L} : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ および $\dot{M} : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(n+1, \mathbb{R})$ と書く. ここで $\mathfrak{g}$ は G のリー代数である. いま $X \in \mathfrak{g}$ に対し, $\dot{\tau}(X) := (\frac{d}{dt})_{t=0}\tau(\exp tX) \in \mathbb{R}^n$ とおくと,

$$\dot{M}(X) = \begin{pmatrix} \dot{L}(X) & \dot{\tau}(X) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{3}$$

である. これより $\dot{M}([X, Y]) = [\dot{M}(X), \dot{M}(Y)]$ の (1,2) 成分を比較して

$$\dot{\tau}([X, Y]) = \dot{L}(X)\dot{\tau}(Y) - \dot{L}(Y)\dot{\tau}(X) \qquad (X, Y \in \mathfrak{g}) \tag{4}$$

が得られる. ベクトル場 $\mathbb{R}^n \ni x \mapsto \dot{L}(X)x + \dot{\tau}(X) \in \mathbb{R}^n$ は, アファイン作用 α によって $X \in \mathfrak{g}$ が引き起こす $\mathbb{R}^n$ 上の無限小変換に他ならない.

1.2. 一般にリー代数 $\mathfrak{g}$ の表現 (π, V) に対し, V に値をとる $\mathfrak{g}$ 上の k-形式全体のなすベクトル空間を $C^k(\mathfrak{g}, V)$ $(k = 1, 2, \dots)$ とし, $C^0(\mathfrak{g}, V) := V$ とおく. 外微分作用素 $d_\pi^k : C^k(\mathfrak{g}, V) \to C^{k+1}(\mathfrak{g}, V)$ を

$$\begin{aligned} d_\pi^k f(X_0, \dots, X_k) := &\sum_{i=0}^{k} (-1)^i \pi(X_i) f(X_0, \dots, \check{X}_i, \dots, X_k) \\ &- \sum_{0 \le i < j \le k} (-1)^{i+j} f([X_i, X_j], X_1, \dots, \check{X}_i, \dots, \check{X}_j, \dots, X_k) \\ &(f \in C^k(\mathfrak{g}, V),\ X_0, X_1, \dots, X_k \in \mathfrak{g}) \end{aligned}$$

によって定義すると $d_\pi^{k+1}\circ d_\pi^k=0\ \ (k=0,1,2,\dots)$ が成り立つ．こうして得られたコチェイン $\{C^k(\mathfrak{g},V),d_\pi^k\}$ のコホモロジー $H^*(\mathfrak{g},V)$ を, V を係数とするリー代数 $\mathfrak{g}$ のコホモロジーとよぶ．すなわち

$$H^0(\mathfrak{g},V):=\operatorname{Ker}d_\pi^0,\quad H^k(\mathfrak{g},V):=\operatorname{Ker}d_\pi^k/\operatorname{Im}d_\pi^{k-1}\ \ (k=1,2,\dots,)$$

である．定義にしたがって d_π^0 と d_π^1 を具体的に表すと次のようになる：

$$d_\pi^0 v(X)=\pi(X)v \qquad (v\in V=C^0(\mathfrak{g},V),\ X\in\mathfrak{g}), \tag{5}$$

$$\begin{aligned} d_\pi^1 f(X,Y)&=\pi(X)f(Y)-\pi(Y)f(X)-f([X,Y]) \\ &\qquad (f\in\operatorname{Hom}(\mathfrak{g},V)=C^1(\mathfrak{g},V),\ X,Y\in\mathfrak{g}). \end{aligned} \tag{6}$$

とくに (6) から, 関係式 (4) は $d_{\dot L}^1\dot\tau=0$ と同値なことがわかる．

リー代数のコホモロジーについては，次が基本的な結果である ([3])．

定理 1 (Whitehead)**.** 標数 0 の体 $\mathbb{K}$ 上の半単純リー代数 $\mathfrak{g}$ の任意の有限次元表現 (π,V) について $H^1(\mathfrak{g},V)=0$ かつ $H^2(\mathfrak{g},V)=0$.

1.3. リー群 G の滑らかなアファイン作用 $\alpha:G\to\operatorname{Aff}(\mathbb{R}^n)$ から小節 1.1 で論じたように $\mathfrak{g}$ の表現 $(\dot L,\mathbb{R}^n)$ が得られる．この表現 $\dot L$ によって $\mathbb{R}^n$ を $\mathfrak{g}$-加群とみなす．小節 1.2 でも述べたように, (4) は $\dot\tau\in\operatorname{Ker}d_{\dot L}^1$ を意味するので, コホモロジー類 $[\dot\tau]\in H^1(\mathfrak{g},\mathbb{R}^n)$ が得られる．

定理 2. リー群 G の連結成分は有限個であるとする．このとき G の作用 α が不動点をもつ必要十分条件は, コホモロジー類 $[\dot\tau]\in H^1(\mathfrak{g},V)$ が 0 になることである．

証明. まず必要性を示そう．作用 α が不動点 $\hat x\in\mathbb{R}^n$ をもつ, すなわち

$$\alpha(g)\hat x=\hat x \qquad (\forall g\in G)$$

を仮定する．このとき, 任意の $g\in G$ について

$$\tau(g)=-L(g)\hat x+\hat x$$

であり, 両辺を $g=e$ において微分して

$$\dot\tau(X)=-\dot L(x)\hat x \qquad (X\in\mathfrak{g})$$

を得る．よって (5) から $\dot\tau=d_{\dot L}^0(-\hat x)$ であり, したがって $[\dot\tau]=0$.

次に十分性を示すために $[\dot\tau]=0$ を仮定する．これから $\dot\tau=-d_{\dot L}^0x_0$, すなわち

$$\dot\tau(X)=-\dot L(X)x_0 \qquad (X\in\mathfrak{g})$$

となる $x_0 \in \mathbb{R}^n$ がとれる．このとき (3) から

$$\dot{M}(X) = \begin{pmatrix} \dot{L}(X) & -\dot{L}(X)x_0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_n & x_0 \\ & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{L}(X) & \\ & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n & x_0 \\ & 1 \end{pmatrix}^{-1}.$$

よって $g = \exp X \in G$ について

$$\begin{aligned} M(g) = \exp \dot{M}(X) &= \begin{pmatrix} I_n & x_0 \\ & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \exp \dot{L}(X) & \\ & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n & x_0 \\ & 1 \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} I_n & x_0 \\ & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L(g) & \\ & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n & -x_0 \\ & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L(g) & -L(g)x_0 + x_0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

これから $\tau(g) = -L(g)x_0 + x_0$ であり,

$$\alpha(g)x = L(g)(x - x_0) + x_0.$$

したがって $g = \exp X$ となる $g \in G$ については $\alpha(g)x_0 = x_0$.

さて G の単位元を含む連結成分を G_0 とすると, その元は $\exp X$ の形のものから生成されるから, x_0 は群 G_0 の作用についての不動点である．さらに G_0 は G の正規部分群だから, 任意の $h \in G$ に対し $\alpha(h)x_0$ も G_0 の作用についての不動点となる．したがって $G/G_0 = \{h_1G_0, h_2G_0, \ldots, h_mG_0\}$ のとき, $\hat{x} := \frac{1}{m}\sum_{i=1}^m \alpha(h_i)x_0$ とすれば, $\hat{x}$ は G の作用についての不動点である． □

系 3. 定理 2 の設定のもとで, $H^1(\mathfrak{g}, \mathbb{R}^n) = 0$ ならば G の作用 α は不動点をもつ.

以上の議論と定理 1 を合わせて, 主結果を得る.

定理 4. 連結成分が有限個であるような半単純実リー群が $\mathbb{R}^n$ にアファイン変換として作用しているとき, その作用は不動点をもつ.

1.4. 定理 2 の証明から, 与えられたアファイン作用 α の不動点を求めるには $\dot{\tau} = -d^0_{\dot{L}}x_0$ となる $x_0 \in \mathbb{R}^n$ を見つけるという操作が本質的であることがわかる．リー代数 $\mathfrak{g}$ が半単純の場合, この操作は $H^1(\mathfrak{g}, V) = 0$ (定理 1 の前半）の証明のなかに見出せる．その概略を以下に紹介する．

標数 0 の体 $\mathbb{K}$ 上の半単純リー代数 $\mathfrak{g}$ の有限次元表現 (π, V) について, $d^1_\pi f = 0$, すなわち

$$f([X, Y]) = \pi(X)f(Y) - \pi(Y)f(X) \qquad (X, Y \in \mathfrak{g}) \tag{7}$$

となる $f \in \mathrm{Hom}(\mathfrak{g}, V)$ を考える.

(i) 表現 π が自明のとき, すなわち $\pi(X) = 0 (\forall X \in \mathfrak{g})$ のとき, $\mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ と (7) から $f = 0$. よって任意の $x_0 \in V$ に対して $f = -d^0_\pi x_0$ が成り立つ.

(ii) 表現 π は自明表現を部分表現に含まないと仮定する．リー代数 $\mathfrak{g}$ の基底 $X_1, \ldots, X_N$ を一つとり, そのキリング形式 B に関する双対基底を $Y_1, \ldots, Y_N$ とする．すなわち

$$B(X_i, Y_j) = \delta_{ij} \qquad (i, j = 1, \ldots, N). \tag{8}$$

このときカシミール作用素 $C_\pi := \sum_{i=1}^N \pi(X_i)\pi(Y_i) \in \mathrm{End}(V)$ は可逆である．いま $v_0 := \sum_{i=1}^N \pi(X_i) f(Y_i) \in V$ とおくと, 任意の $A \in \mathfrak{g}$ について

$$\begin{aligned}
\pi(A)v_0 &= \sum_{i=1}^N \pi(A)\pi(X_i)f(Y_i) \\
&= \sum_{i=1}^N \Big(\pi([A, X_i])f(Y_i) + \pi(X_i)\pi(A)f(Y_i)\Big) \\
&= \sum_{i=1}^N \Big(\pi([A, X_i])f(Y_i) + \pi(X_i)f([A, Y_i]) + \pi(X_i)\pi(Y_i)f(A)\Big) \\
&= \sum_{i=1}^N \Big(\pi([A, X_i])f(Y_i)\Big) + \sum_{i=1}^N \Big(\pi(X_i)f([A, Y_i])\Big) + C_\pi f(A).
\end{aligned}$$

ここで三番目の等号においては (7) を用いた．さらに (8) から

$$\begin{aligned}
[A, X_i] &= \sum_{j=1}^N B([A, X_i], Y_j)X_j, \\
[A, Y_i] &= \sum_{j=1}^N B([A, Y_i], X_j)Y_j = -\sum_{j=1}^N B([A, X_j], Y_i)Y_j
\end{aligned}$$

であり, これらを用いて

$$\sum_{i=1}^N \Big(\pi([A, X_i])f(Y_i)\Big) + \sum_{i=1}^N \Big(\pi(X_i)f([A, Y_i])\Big) = 0$$

を得る．したがって $\pi(A)v_0 = C_\pi f(A)$ であり, C_π の可逆性から

$$f(A) = C_\pi^{-1}\pi(A)v_0 = \pi(A)C_\pi^{-1}v_0.$$

したがって $x_0 := -C_\pi^{-1}v_0$ とすると $f(A) = -\pi(A)x_0$ $(\forall A \in \mathfrak{g})$ だから $f = -d_\pi^0 x_0$. なお, この場合は x_0 の一意性が成り立つ．実際 $f = -d_\pi^0 \hat{x}$ とすると, 結果として $x_0 = \hat{x}$ となる．
(iii) 一般に $\mathfrak{g}$ の表現 V は (i) で議論したような自明な表現空間 V' と (ii) で議論したような表現空間 V'' との直和に分解されるから, それぞれの議論を適用して直和をとることによって, $f = -d_\pi^0 x_0$ となる $x_0 \in V$ が得られる．

§2. ヘッセ幾何への応用.

2.1. 領域 $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$ 上の滑らかなリーマン計量 $h = \sum_{i,j=1}^n h_{ij} dx_i dx_j$ は

$$\frac{\partial h_{ij}}{\partial x_k} = \frac{\partial h_{kj}}{\partial x_i} \qquad (i, j, k = 1, \ldots, n)$$

が成り立つときヘッセ計量とよぶ. このとき各点 $p \in \mathcal{D}$ に対して p の近傍 $U \subset D$ と U 上の函数 ϕ で

$$h_{ij}|_U = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i \partial x_j} \qquad (i, j = 1, \ldots, n) \tag{9}$$

となるものが存在する（逆も成り立つ）. すなわちヘッセ計量とは局所的に函数のヘッシアンで表されるようなリーマン計量である. 関係式 (9) をみたす函数 ϕ を h のポテンシャル函数という. 一般に, ポテンシャル函数は一次函数の差を除いて定まる.

領域 $\mathcal{D}$ と, その上のヘッセ計量の組 $(\mathcal{D}, h)$ をヘッセ領域とよぶ. アファイン変換で領域 $\mathcal{D}$ および計量 h を保存するものをヘッセ領域 $(\mathcal{D}, h)$ の自己同型写像といい, それら全体のなす群を $\mathrm{Aut}(\mathcal{D}, h)$ と書く. すなわち

$$\mathrm{Aut}(\mathcal{D}, h) := \{ a \in \mathrm{Aff}(\mathbb{R}^n) \,;\, a\mathcal{D} = \mathcal{D}, a^* h = h \}.$$

我々は群 G がヘッセ領域 $(\mathcal{D}, h)$ に自己同型として作用している状況, すなわち群準同型 $\alpha : G \to \mathrm{Aut}(\mathcal{D}, h)$ を考える.

2.2. 以後, ヘッセ計量 h のポテンシャル函数 ϕ が $\mathcal{D}$ 全体で定義されている（すなわち (9) が $U = \mathcal{D}$ で成り立つ）ものとする. 一般にアファイン変換 $a \in \mathrm{Aff}(\mathbb{R}^n)$ に対し, 領域 $\mathcal{D}' := a\mathcal{D}$ 上のヘッセ計量 $h' := (a^{-1})^* h$ はポテンシャル函数 $\phi \circ a^{-1}$ をもつ. このことから, $\alpha(g) \in \mathrm{Aut}(\mathcal{D}, h)$ $(g \in G)$ について, $\alpha(g^{-1})^* h = h$ より $\mathcal{D}$ 上の函数 $\phi \circ \alpha(g^{-1})$ と ϕ の差は一次函数であることがわかる. すなわち $\theta(g) \in (\mathbb{R}^n)^*$ と $\gamma(g) \in \mathbb{R}$ が存在して

$$\phi(\alpha(g^{-1})x) = \phi(x) + \langle \theta(g), x \rangle + \gamma(g) \qquad (x \in \mathcal{D}) \tag{10}$$

が成り立つ. これより $g_1, g_2 \in G$ に対し $\phi \circ \alpha((g_1 g_2)^{-1}) = \phi \circ \alpha(g_2^{-1}) \circ \alpha(g_1^{-1})$ を二通りの方法で計算して

$$\theta(g_1 g_2) = L(g_1^{-1})^* \theta(g_2) + \theta(g_1), \tag{11}$$

$$\gamma(g_1 g_2) = \gamma(g_1) + \gamma(g_2) - \langle \theta(g_2), L(g_1^{-1}) \tau(g_1) \rangle \tag{12}$$

を得る. いま, G の表現 $(L, \mathbb{R}^n)$ の反傾表現を $(L^*, (\mathbb{R}^n)^*)$ と書くものとすると（すなわち $g \in G$ について $L^*(g) := L(g^{-1})^*$）, (11) は

$$\theta(g_1 g_2) = L^*(g_1) \theta(g_2) + \theta(g_1) \qquad (g_1, g_2 \in G)$$

と書き直せる．これと (1) および (2) を見比べて, G の $(\mathbb{R}^n)^*$ へのアファイン作用 $\alpha^* : G \to \mathrm{Aff}((\mathbb{R}^n)^*)$ を

$$\alpha^*(g)\xi := L^*(g)\xi + \theta(g) \qquad (g \in G,\, \xi \in (\mathbb{R}^n)^*) \tag{13}$$

によって定義する．

定理 5. ヘッセ領域 $(\mathcal{D}, h)$ は $\mathcal{D}$ 上で定義されたポテンシャル函数 ϕ をもち, 連結成分が有限個であるリー群 G が自己同型群として作用しているとする．このとき $(\mathcal{D}, h)$ には G-不変な $\mathcal{D}$ 上のポテンシャル函数が存在する．

証明. 上の議論のように (13) で定義された G のアファイン作用 α^* に定理 4 を適用して, 不動点 $\xi_0 \in (\mathbb{R}^n)^*$ を得る．このとき

$$\theta(g) = -L^*(g)\xi_0 + \xi_0 \qquad (g \in G) \tag{14}$$

である．いま

$$\phi_0(x) := \phi(x) + \langle \xi_0, x \rangle \qquad (x \in \mathcal{D})$$

とおくと, ϕ_0 も $(\mathcal{D}, h)$ のポテンシャル函数である．一方, (14) に注意して (10) を ϕ_0 の関係式に書き直すと

$$\phi_0(\alpha(g^{-1})x) = \phi_0(x) + \gamma_0(g) \qquad (\text{ただし}\,\gamma_0(g) := \gamma(g) - \langle \xi_0, L(g^{-1})\tau(g) \rangle)$$

となる．これから $\gamma_0 : G \to \mathbb{R}$ は G から加法群 $\mathbb{R}$ への群準同型となることがわかるが, G についての仮定から γ_0 は自明なものに限る．したがってポテンシャル函数 $\phi_0 : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ は G-不変である． □

2.3. 正定値の r 次実対称行列全体のなす凸錐 $\mathcal{P}_r$ には $GL(r, \mathbb{R})$ が $\alpha(g)x := gx{}^{\mathrm{t}}g$ $(g \in GL(r, \mathbb{R}), x \in \mathcal{P}_r)$ によって線型かつ推移的に作用する．この作用により $\mathcal{P}_r$ の等質空間としての記述

$$\mathcal{P}_r \simeq GL(r, \mathbb{R})/O(r, \mathbb{R}) \simeq SL(r, \mathbb{R})/SO(r, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}_+$$

が得られる．この分解から $\mathcal{P}_r$ 上の $GL(r, \mathbb{R})$-不変なリーマン計量は

$$h^{A,B}(u, v)_x := A\,\mathrm{tr}\,(x^{-1}ux^{-1}v) + B\,\mathrm{tr}(x^{-1}u)\mathrm{tr}(x^{-1}v) \quad (x \in \mathcal{P}_r,\ u, v \in \mathrm{Sym}(r, \mathbb{R})), \tag{15}$$

（ただし $A > 0$, $B > -A/n$）の形であることが分かる．

一方 $\mathcal{P}_r$ 上の $SL(r, \mathbb{R})$-不変なヘッセ計量は, 定理 5 から $\phi^{(\mathcal{V})}(x) = \mathcal{V}(\det x)$ $(x \in \mathcal{P}_r)$ という形のポテンシャルをもつ． 小原と江口は, この函数 $\phi^{(\mathcal{V})}$ を V-ポテンシャルとよび, そこから得られるヘッセ計量の情報幾何とその応用を詳しく考察した（[4, 5, 6]）．起点となったのは次の結果である．

定理 6 ([5])**.** 滑らかな関数 $\mathcal{V}:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ について

$$\nu_1(s) := s\frac{d}{ds}\mathcal{V}(s), \quad \nu_2(s) := s\frac{d}{ds}\nu_1(s) \quad (s>0)$$

とおくと, $\phi^{(\mathcal{V})}$ が $\mathcal{P}_r$ 上のヘッセ計量のポテンシャルである必要十分条件は

$$\nu_1(s) < 0 \text{ かつ } \nu_2(s) > \nu_1(s)/n \qquad (s>0)$$

であり, そのとき対応するヘッセ計量 $h^{(\mathcal{V})}$ は

$$\begin{aligned} h^{(\mathcal{V})}(u,v)_x &= -\nu_1(\det x)\mathrm{tr}\,(x^{-1}ux^{-1}v) + \nu_2(\det x)\mathrm{tr}(x^{-1}u)\mathrm{tr}(x^{-1}v) \\ &\quad (x\in\mathcal{P}_r,\ u,v\in\mathrm{Sym}(r,\mathbb{R})), \end{aligned} \tag{16}$$

で与えられる.

二つの計量 (15) と (16) を比較すると, $\mathcal{P}_r$ 上の $GL(r,\mathbb{R})$-不変なヘッセ計量は $h^{A,0}(u,v)_x = A\,\mathrm{tr}\,(x^{-1}ux^{-1}v)$ の形であることが分かる.

References

[1] S. Amari, "Information geometry and its applications," Applied Mathematical Sciences **194**, Springer, 2016.

[2] J. Faraut and A. Korányi, "Analysis on symmetric cones," Clarendon Press, 1994.

[3] H. Jacobson, "Lie Algebras," Dover, 1962.

[4] A. Ohara and S. Eguchi, *Group invariance of information geometry on q-Gaussian distributions induced by beta-divergence*, Entropy **15** (2013), 4732-4747.

[5] A. Ohara and S. Eguchi, *Geometry on positive definite matrices deformed by V-potentials and its submanifold structure*, Geometric theory of information, 31-55, Signals Commun. Technol., Springer, 2014.

[6] 小原敦美, 江口真透 "V ポテンシャルから導かれる正定値対称行列空間の幾何とその応用," 数理解析研究所講究録 **1956** (2015), 69–85.

[7] 志磨裕彦, "ヘッセ幾何学", 裳華房, 2001.