

# 等質錐の基本相対不変式とその Laplace 変換

中島 秀斗 (九州大学大学院数理学研究院)\*

## 序文

簡約な概均質ベクトル空間の理論において、基本相対不変式の複素冪を Fourier 変換したものはその双対概均質ベクトル空間上の基本相対不変式の複素冪になるという事実が、その根幹にある (cf. Kimura [5, Introduction])。一方で、Faraut–Korányi [1] にあるように、一度対称錐に付随するガンマ関数が求めれば、群作用の推移性を利用することにより相対不変関数の Laplace 変換も計算できる。その Laplace 変換の公式をよく見ると、対称錐  $\Omega$  の determinant 関数  $\det x$  の複素冪の Laplace 変換は

$$\int_{\Omega} e^{-\langle x|y \rangle} (\det x)^s d\mu(x) = \frac{(\text{gamma factors})}{(\det y)^s} \quad (y \in \Omega)$$

のように、同じ determinant 関数の逆数の複素冪として得られることがわかる。ここで、 $d\mu(x)$  は  $\Omega$  上の適当な不変測度である。Gindikin [2] は、一般の等質錐に対して相対不変関数の Laplace 変換を考察し、具体的に計算できることを示した。そこで、一般の等質錐においても、相対不変多項式の複素冪の Laplace 変換が、ある多項式の逆数の複素冪になることはあるのだろうかという問題が自然に提起される。本稿では、この性質が対称錐の特徴付けを与えることを示すことにより、本問題を解決する。

## 1 等質錐

$V$  を有限次元実ベクトル空間とし、 $\Omega \subset V$  を直線を含まない開凸錐とする。  $\Omega$  を不変にする  $GL(V)$  の部分群  $G(\Omega) = \{g \in GL(V); g(\Omega) = \Omega\}$  は  $GL(V)$  の閉部分群となり、したがって線型 Lie 群となる。この  $G(\Omega)$  が  $\Omega$  に推移的に作用するとき、開凸錐  $\Omega$  は等質であるという。本稿では開凸錐  $\Omega$  は常に等質であると仮定し、以後単に等質錐と呼ぶ。また、等質錐  $\Omega$  が既約であるとは、 $V$  の自明でないどのような直和分解  $V = V_1 \oplus V_2$  に対しても、 $\Omega = \Omega_1 \oplus \Omega_2$  となるような開凸錐  $\Omega_i \subset V_i$  ( $i = 1, 2$ ) が存在しないことをいう。さて、 $H \subset G(\Omega)$  を  $\Omega$  に単純推移的に作用する分裂可解 Lie 群とし (cf. Vinberg [9])、対応する Lie 環を  $\mathfrak{h}$  とおく。そして  $e_0 \in \Omega$  を一つ取り固定し、軌道写像  $H \ni h \mapsto he_0 \in \Omega$

\* h-nakashima@math.kyushu-u.ac.jp

2016 年度表現論シンポジウム (世話人: 石川雅雄氏・橋本康史氏; 11 月 29 日–12 月 2 日) における講演集

を  $H$  の単位元において微分すれば, 線型同型  $\mathfrak{h} \ni X \mapsto X e_0 \in V$  を得る. この写像の逆写像を  $L: V \ni x \mapsto L_x \in \mathfrak{h}$  で表し, さらに  $V$  に双線型な積  $\Delta$  を以下のように定義する:

$$x \Delta y := L_x y \quad (x, y \in V).$$

すると,  $(V, \Delta)$  は Vinberg 代数<sup>\*1</sup>となる. すなわち, 次の三つの性質を満たす:

- (1) 任意の  $x, y \in V$  に対して  $[L_x, L_y] = L_{x \Delta y - y \Delta x}$ ,
- (2)  $V$  上の線型形式  $s$  で,  $\langle x | y \rangle := s(x \Delta y)$  が  $V$  の内積となるものが存在する,
- (3) 各  $x \in V$  に対して  $L_x$  の固有値はすべて実数である.

Vinberg 代数は一般には非可換かつ非結合的な代数であるが, 単位元  $e_0$  を持つ. 本稿では  $V$  の内積  $\langle \cdot | \cdot \rangle$  は条件 (2) のものとする. また, 等質錐  $\Omega$  の階数  $r$  を  $\mathfrak{h}$  に対する  $[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}]$  の余次元と定義すると,  $V$  には  $r$  個の原始幂等元  $c_1, \dots, c_r$  で,  $e_0 = c_1 + \dots + c_r$  を満たすものが存在する. これを Vinberg 枠と呼ぶ. さらに,  $V_{jj} := \mathbb{R}c_j$  ( $j = 1, \dots, r$ ) および

$$V_{kj} := \left\{ x \in V; L_{c_i} x = \frac{1}{2}(\delta_{ij} + \delta_{ik})x, x \Delta c_i = \delta_{ij}x \quad (i = 1, \dots, r) \right\} \quad (j < k)$$

とおけば,  $V$  は以下のように直和分解される:

$$V = \bigoplus_{1 \leq j < k \leq r} V_{kj}.$$

この分解を  $V$  の正規分解といい, 以下の乗法則を満たす:

$$(1.1) \quad \begin{aligned} V_{ji} \Delta V_{lk} &= \{0\} \quad (\text{if } i \neq k, l), \quad V_{kj} \Delta V_{ji} \subset V_{ki}, \\ V_{ji} \Delta V_{ki} &\subset V_{jk} \text{ or } V_{kj} \quad (\text{according to } j \geq k \text{ or } j \leq k). \end{aligned}$$

等質錐  $\Omega$  に対して,  $\Omega^* := \{x \in V; \langle x | y \rangle > 0 \text{ for all } y \in \bar{\Omega} \setminus \{0\}\}$  を  $\Omega$  の双対錐という. ここで  $H$  の  $\Omega$  上への作用を  $\rho$  で表すことにすれば,  $\rho$  の反傾表現  $\rho^*$  により  $H$  が  $\Omega^*$  上に単純推移的に作用するので,  $\Omega^*$  も等質錐となる. また, 適当な内積により  $\Omega = \Omega^*$  となると,  $\Omega$  は対称錐であるという.

例 1.1.  $S_r := \text{Sym}(r, \mathbb{R})$  とおき, その中で正定値なもの全体のなす集合を  $S_r^+$  で表す. このとき  $S_r^+$  は開凸錐となるが, さらに  $S_r^+$  には  $GL(r, \mathbb{R})$  が  $\rho(g)x := gx^t g$  ( $g \in GL(r, \mathbb{R}), x \in S_r^+$ ) により推移的に作用しているため,  $S_r^+$  は等質錐となる. 対角成分が正である下三角行列全体のなす群を  $\mathcal{H}_r \subset GL(r, \mathbb{R})$  とすれば,  $\mathcal{H}_r$  は  $S_r^+$  上に単純推移的に作用する. また, 対称行列  $x \in S_r$  に対して下三角行列  $\underline{x}$  を  $x = \underline{x} + {}^t(\underline{x})$  となるものとして定めると,  $S_r^+$  に付随する Vinberg 代数の積は

$$x \Delta y := \underline{x}y + y{}^t(\underline{x}) \quad (x, y \in V)$$

で与えられる. また,  $(S_r^+)^* = S_r^+$  となるため, 等質錐  $S_r^+$  は対称錐である.

<sup>\*1</sup> Vinberg [9] において, クラン (コンパクトな正規左対称代数) として導入された.

## 2 等質錐の基本相対不変式とその性質

$\Omega$  を階数  $r$  の等質錐とし,  $H$  を  $\Omega$  に付随する分裂可解 Lie 群とする. 記号は前節のものを引き続き用いる. Ishi [3] にあるように, 任意の  $h \in H$  は  $h_i \in \mathbb{R}^+$  ( $i = 1, \dots, r$ ) と  $v_j \in \bigoplus_{k>j} V_{kj}$  ( $j = 1, \dots, r-1$ ) を用いて

$$h = (\exp T_1)(\exp L_{v_1})(\exp T_2) \cdots (\exp L_{v_{r-1}})(\exp T_r), \quad T_i := (2 \log h_i) L_{c_i}$$

と表せる.  $\underline{s} = (s_1, \dots, s_r) \in \mathbb{R}^r$  に対して,  $H$  の指標  $\chi_{\underline{s}}: H \rightarrow \mathbb{R}^\times$  を

$$\chi_{\underline{s}}(h) := (h_1)^{2s_1} \cdots (h_r)^{2s_r} \quad (h \in H)$$

とし,  $H$  が  $\Omega$  上に単純推移的に作用することを踏まえて,  $\Omega$  上の関数  $\Delta_{\underline{s}}(x)$  を

$$\Delta_{\underline{s}}(h \cdot e_0) = \chi_{\underline{s}}(h) \quad (h \in H)$$

と定義すれば, これは  $H$ -相対不変, すなわち  $\Delta_{\underline{s}}(h \cdot x) = \chi_{\underline{s}}(h) \Delta_{\underline{s}}(x)$  ( $h \in H, x \in \Omega$ ) を満たす. 任意の  $H$ -相対不変関数  $f$  は定数倍を除いてこのように実現でき,  $f = \Delta_{\underline{s}}$  のとき,  $\underline{s}$  を  $f$  の multiplier と呼ぶ. 等質錐  $\Omega$  上の  $H$ -相対不変な既約多項式は丁度  $r$  個存在し, その既約多項式を  $\Delta_1(x), \dots, \Delta_r(x)$  と書けば,  $\Omega$  はそれらの正值集合として

$$\Omega = \{x \in V; \Delta_1(x) > 0, \dots, \Delta_r(x) > 0\}$$

と表される (cf. Ishi–Nomura [4]). この  $\Delta_1(x), \dots, \Delta_r(x)$  を等質錐  $\Omega$  の基本相対不変式と呼ぶ. また,  $\underline{\nu} = (\nu_1, \dots, \nu_r) \in \mathbb{R}^r$  に対して,  $\Omega$  上の関数  $\Delta^{\underline{\nu}}$  を次のように定義する:

$$\Delta^{\underline{\nu}}(x) := \Delta_1(x)^{\nu_1} \cdots \Delta_r(x)^{\nu_r} \quad (x \in \Omega).$$

すると, 任意の  $H$ -相対不変多項式  $p(x)$  は, 適当な  $\underline{n} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^r$  を用いて  $p(x) = p(e_0) \Delta^{\underline{n}}(x)$  と書ける (cf. Ishi [3]). 基本相対不変式  $\Delta_j(x)$  の multiplier を  $\underline{\sigma}_j = (\sigma_{j1}, \dots, \sigma_{jr}) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^r$  とするとき, それらを並べて得られる  $r$  次の正方行列  $\sigma$  を  $\Omega$  の multiplier matrix と呼ぶ:

$$\sigma = \begin{pmatrix} \underline{\sigma}_1 \\ \vdots \\ \underline{\sigma}_r \end{pmatrix} = (\sigma_{jk})_{1 \leq j, k \leq r}.$$

ここで, 基本相対不変式の順番を Ishi [3, Section 2] の構成法に従って Vinberg 枠  $c_1, \dots, c_r$  と対応させて決めることにすると,  $\sigma$  は下三角行列でその対角成分はすべて 1 となる. 簡単のため  $d_{kj} = \dim \mathcal{V}_{kj}$  とおき, また  $d_i := {}^t(0, \dots, 0, d_{i+1,i}, \dots, d_{ri})$  とすれば, [6, Theorem 6.1] より,  $\sigma$  は以下のように計算できる (cf. [8, Lemma 1.1]).

補題 2.1.  $i = 1, \dots, r-1$  に対して, 帰納的に  $l_i^{(j)} = {}^t(l_{1i}^{(j)}, \dots, l_{ri}^{(j)})$  ( $j = i, \dots, r$ ) を

$$l_i^{(i)} := d_i, \quad l_i^{(k+1)} := \begin{cases} l_i^{(k)} - d_{k+1} & (k_{kk}^{(k)} > 0) \\ l_i^{(k)} & (k_{kk}^{(k)} = 0) \end{cases} \quad (k+i+1, \dots, r-1)$$

により定義する. さらに  $\varepsilon^{[i]} = {}^t(\varepsilon_{i+1,i}, \dots, \varepsilon_{ri}) \in \{0, 1\}^{r-i}$ , ただし  $\varepsilon_{ji} = 1$  (if  $l_{ji}^{(r)} > 0$ ),  $\varepsilon_{ji} = 0$  (if  $l_{ji}^{(r)} = 0$ ) とすれば, 等質錐  $\Omega$  の multiplier matrix は次で与えられる:

$$\sigma = \mathcal{E}_{r-1} \mathcal{E}_{r-2} \cdots \mathcal{E}_1, \quad \mathcal{E}_i := \begin{pmatrix} I_{i-1} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \varepsilon^{[i]} & I_{r-i} \end{pmatrix} \quad (i = 1, \dots, r-1).$$

$\Omega$  のときと同様に,  ${}_{\underline{s}^*} \in \mathbb{R}^r$  に対して, 双対錐  $\Omega^*$  上の関数  $\Delta_{\underline{s}^*}^*(y)$  を

$$\Delta_{\underline{s}^*}^*(\rho^*(h)e_0) := \chi_{\underline{s}^*}(h)^{-1} \quad (h \in H)$$

により定義する. これは次の意味で  $H$ -相対不変である:  $\Delta_{\underline{s}^*}^*(\rho^*(h)y) = \chi_{\underline{s}^*}(h)^{-1} \Delta_{\underline{s}^*}^*(y)$  ( $h \in H, y \in \Omega^*$ ). 双対錐  $\Omega^*$  上の任意の  $H$ -相対不変関数  $f^*$  は定数倍を除いてこのように実現でき,  $f^* = \Delta_{\underline{s}^*}^*$  のとき,  ${}_{\underline{s}^*}$  を  $f^*$  の multiplier と呼ぶ.  $\Omega^*$  は等質錐であるので, 基本相対不変式  $\Delta_1^*(y), \dots, \Delta_r^*(y)$  を持つ. ここで,  $\Delta_1^*(y), \dots, \Delta_r^*(y)$  の順番は Vinberg 枠  $c_r, \dots, c_1$  と対応させて決める.  $\Delta_j^*(y)$  の multiplier を  $\underline{\sigma}_j^* = (\sigma_{j1}^*, \dots, \sigma_{jr}^*) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^r$  とし, それらを並べて multiplier matrix  $\sigma_* = (\sigma_{jk}^*)_{1 \leq j, k \leq r}$  を構成する. この  $\sigma_*$  は対角成分がすべて 1 である上三角行列となる.

例 2.2.  $V$  を以下のような 5 次元の実ベクトル空間とする:

$$V := \left\{ x = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_4 \\ x_2 & x_3 & 0 \\ x_4 & 0 & x_5 \end{pmatrix}; x_1, \dots, x_5 \in \mathbb{R} \right\}.$$

$x, y \in V$  に対して,  $\Delta_i(x)$  および  $\Delta_i^*(y)$  ( $i = 1, 2, 3$ ) を

$$(2.1) \quad \begin{aligned} \Delta_1(x) &= x_1, & \Delta_2(x) &= x_1 x_3 - x_2^2, & \Delta_3(x) &= x_1 x_5 - x_4^2, \\ \Delta_1^*(y) &= y_1 y_3 y_5 - y_3 y_4^2 - y_5 y_2^2, & \Delta_2^*(y) &= y_3, & \Delta_3^*(y) &= y_5 \end{aligned}$$

により定義し, さらに  $\Omega, \Omega^* \subset V$  を

$$\Omega := \{x \in V; \Delta_i(x) > 0 \ (i = 1, 2, 3)\}, \quad \Omega^* := \{y \in V; \Delta_i^*(y) > 0 \ (i = 1, 2, 3)\}$$

により定義する. このとき  $\Omega$  は等質錐となり,  $\Omega^*$  はその双対錐となる. これらは非対称な等質錐としては最低次元のものであり, 特に  $\Omega$  は Vinberg 錐と呼ばれる. 各  $\Delta_i(x)$  は  $\Omega$  の基本相対不変式であり, また  $\Delta_j^*(y)$  は  $\Omega^*$  の基本相対不変式であるので,  $\Omega$  および  $\Omega^*$  の multiplier matrix  $\sigma, \sigma_*$  はそれぞれ以下ようになる:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

本節では以降,  $\Omega$  の階数は  $r \geq 2$  と仮定し,  $\Omega$  の基本相対不変式を,  $\Omega$  よりも階数が低い二つの等質錐の基本相対不変式を用いて記述する事を考える.  $p + q = r$  となる自然数  $p, q$  をとり, これを用いて  $V$  の部分空間  $V_{\pm}$  および  $E$  を

$$(2.2) \quad V_- = \bigoplus_{1 \leq j \leq k \leq p} V_{kj}, \quad E = \bigoplus_{1 \leq j \leq p < k \leq r} V_{kj}, \quad V_+ = \bigoplus_{p < j \leq k \leq r} V_{kj}$$

により定義する. 式 (1.1) により,  $V_{\pm}$  はそれぞれ Vinberg 代数  $V$  の部分代数になる. また,  $E$  上の  $V_+$ -値対称双線型形式  $Q$  および  $E$  上の線型写像  $\psi(x_-)$  ( $x_- \in V_-$ ) を

$$Q(\xi, \eta) := \xi \Delta \eta, \quad \psi(x_-)\xi := \xi \Delta x_- \quad (\xi, \eta \in E)$$

により定義する. ただし, それぞれの右辺に現れる三角積は Vinberg 代数  $V$  の元としての積である. さらに,  $\Omega_{\pm}$  を Vinberg 代数  $V_{\pm}$  に対応する等質錐とし, それらの基本相対不変式をそれぞれ  $\Delta_1^-(x_-), \dots, \Delta_p^-(x_-)$  および  $\Delta_1^+(x_+), \dots, \Delta_q^+(x_+)$  と表す.  $\Omega_{\pm}$  の multiplier matrix を  $\sigma_{\pm}$  とするとき,  $\Omega$  の基本相対不変式は, これらを用いて以下のように記述できる.

**定理 2.3** ([8, Theorem 2.8]).  $\Omega$  の基本相対不変式  $\Delta_1(x), \dots, \Delta_r(x)$  は, ある 0-1 行列  $\Xi \in M(q, p; \{0, 1\})$  を用いて  $\Gamma = (\gamma_{jk})_{1 \leq j, k \leq r} := \sigma_+ \Xi$  とおいたとき,  $x \in \Omega$  に対して

$$\begin{cases} \Delta_i(x) = \Delta_i^-(x_-) & (i = 1, \dots, p), \\ \Delta_{p+j}(x) = \Delta_1^-(x_-)^{\gamma_{j1}} \cdots \Delta_p^-(x_-)^{\gamma_{jp}} \Delta_j^+(x_+ - \frac{1}{2}Q(\psi(x_-)^{-1}\xi, \xi)) & (j = 1, \dots, q) \end{cases}$$

と表される. ただし,  $x = x_- + \xi + x_+$  ( $x_{\pm} \in V_{\pm}$ ,  $\xi \in E$ ) とおいた. この  $\Xi$  は一意に定まる. さらに,  $\Omega$  の multiplier matrix  $\sigma$  は次のように書ける:

$$(2.3) \quad \sigma = \begin{pmatrix} \sigma_- & 0 \\ \sigma_+ \Xi \sigma_- & \sigma_+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & \sigma_+ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ \Xi & I_q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_- & 0 \\ 0 & I_q \end{pmatrix}.$$

### 3 Laplace 変換の逆数の多項式条件

前節までの記号を引き続き用いる. 等質錐  $\Omega$  上の  $H$ -不変測度を  $d\mu(x)$  とする.  $\underline{s} \in \mathbb{R}^r$  に対して,  $\Omega$  のガンマ関数  $\Gamma_{\Omega}(\underline{s})$  および相対不変関数  $\Delta_{\underline{s}}$  の Laplace 変換  $\mathcal{L}[\Delta_{\underline{s}}](y)$  を

$$\begin{aligned} \Gamma_{\Omega}(\underline{s}) &:= \int_{\Omega} e^{-\langle x | e_0 \rangle} \Delta_{\underline{s}}(x) d\mu(x), \\ \mathcal{L}[\Delta_{\underline{s}}](y) &:= \frac{1}{\Gamma_{\Omega}(\underline{s})} \int_{\Omega} e^{-\langle x | y \rangle} \Delta_{\underline{s}}(x) d\mu(x) \quad (y \in \Omega^*) \end{aligned}$$

によりそれぞれ定義する. これらの積分は, 共に  $s_k > \frac{1}{2} \sum_{j < k} \dim V_{kj}$  ( $k = 1, \dots, r$ ) のとき, そしてそのときに限り収束する (cf. Gindikin [2]). Laplace 変換は,  $\mathcal{L}[\Delta_{\underline{s}}](e_0) = 1$

となるように正規化されており，[2]にあるように

$$(3.1) \quad \mathcal{L}[\Delta_{\underline{s}}](y) = \frac{1}{\Delta_{\underline{s}}^*(y)} \quad (y \in \Omega^*)$$

となる．ここで， $\underline{\mu} \in \mathbb{R}^r$  に対して， $\Omega^*$  の基本相対不変式のべき積の関数  $\Delta_{\underline{\mu}}^*$  を

$$\Delta_{\underline{\mu}}^*(y) := \Delta_1^*(y)^{\mu_1} \cdots \Delta_r^*(y)^{\mu_r} \quad (y \in \Omega^*; \underline{\mu} = (\mu_1, \dots, \mu_r))$$

とすると， $\Delta_{\underline{\mu}}^*(y)$  は  $\Omega^*$  上の  $H$ -相対不変関数で，その multiplier は  $\underline{\mu}\sigma_*$  である．同様に  $\Delta^{\underline{\nu}}(x)$  は multiplier が  $\underline{\nu}\sigma$  である  $\Omega$  の  $H$ -相対不変関数であるので， $\underline{\nu}' := \underline{\nu}\sigma_*^{-1}$  とおけば，式 (3.1) は次のように書き換えられる：

$$(3.2) \quad \mathcal{L}[\Delta^{\underline{\nu}}](y) = \frac{1}{\Delta_{\underline{\nu}'}^*(y)} \quad (y \in \Omega^*).$$

例 3.1.  $\Omega = \mathcal{S}_r^+$  とする (cf. 例 1.1) .  $\Omega$  の基本相対不変式  $\Delta_j(x)$  は左上からの少行列式  $\det^{[j]}(x)$ ，双対錐  $\Omega^*$  の基本相対不変式  $\Delta_k^*(y)$  は右下からの少行列式  $\det_{[r-k+1]}(y)$  であるので，それぞれの multiplier matrix は以下ようになる：

$$(3.3) \quad \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

したがって  $\underline{\nu}' = \underline{\nu}\sigma_*^{-1} = (\nu_1 + \cdots + \nu_r, -\nu_1, \dots, -\nu_{r-1})$  となり， $\Delta^{\underline{\nu}}(x)$  の Laplace 変換は次で与えられる：

$$\mathcal{L}[\Delta^{\underline{\nu}}](y) = \frac{1}{\Delta_{\underline{\nu}'}^*(y)} = \frac{\Delta_2^*(y)^{\nu_1} \cdots \Delta_r^*(y)^{\nu_{r-1}}}{\Delta_1^*(y)^{\nu_1 + \cdots + \nu_r}} \quad (y \in \Omega^*).$$

例 3.2.  $\Omega$  を例 3.2 の Vinberg 錐とする．このとき，式 (2.3) より

$$\underline{\nu}\sigma_*^{-1} = (\nu_1, \nu_2, \nu_3) \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = (\nu_1 + \nu_2 + \nu_3, -\nu_1 - \nu_3, -\nu_1 - \nu_2)$$

なので， $\Delta^{\underline{\nu}}(x)$  の Laplace 変換は以下ようになる：

$$\mathcal{L}[\Delta^{\underline{\nu}}](y) = \frac{1}{\Delta_{\underline{\nu}'}^*(y)} = \frac{\Delta_2^*(y)^{\nu_1 + \nu_3} \Delta_3^*(y)^{\nu_1 + \nu_2}}{\Delta_1^*(y)^{\nu_1 + \nu_2 + \nu_3}} \quad (y \in \Omega^*).$$

例 3.1 において  $\underline{\nu} = (0, \dots, 0, n)$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) とすれば， $\Delta^{\underline{\nu}}(x)$  および  $(\mathcal{L}[\Delta^{\underline{\nu}}](y))^{-1} = \Delta_{\underline{\nu}'}^*(y)$  が共に多項式となる．Faraut–Korányi [1, Propositions VI.3.10 and VII.1.5] にあるように，既約な対称錐の multiplier matrix は式 (3.3) の形であるので，この性質は対称錐でも成り立つ．では，対称でない既約等質錐がこの性質をもつことはあるのだろうか．例えば，Vinberg 錐の場合では，どのような  $\underline{\nu} \neq 0$  に対しても  $\Delta^{\underline{\nu}}(x)$  および  $(\mathcal{L}[\Delta^{\underline{\nu}}](y))^{-1}$  が共に多項式になることはない (cf. 例 3.2) . 実は，この性質が対称錐を特徴付けている．それが次の定理 3.3 であり，本稿の主結果である．

定理 3.3 ([8, Theorem 3.4]).  $\Omega$  を既約等質錐とする. このとき,  $\Omega$  上の定数でない相対不変多項式  $\Delta^\nu(x)$  でその Laplace 変換の逆数  $(\mathcal{L}[\Delta^\nu](y))^{-1} = \Delta_*^{\nu'}(y)$  も多項式となるものが存在するのは,  $\Omega$  が対称のとき, そしてそのときに限る.

ベクトル  $\underline{s} \in \mathbb{R}^r$  に対して, 各成分が  $s_j \geq 0$  ( $j = 1, \dots, r$ ) であるとき  $\underline{s} \geq 0$  と表す. 他の不等号についても同様である. すると,  $\underline{\nu} \in \mathbb{Z}^r$  に対して  $\Delta^\nu(x)$  および  $\Delta_*^{\nu'}(y)$  が共に多項式になるための条件は,

$$(3.4) \quad \underline{\nu} \geq 0 \quad \text{かつ} \quad \underline{\nu}' = \underline{\nu} \sigma \sigma_*^{-1} \geq 0$$

と書き換えられる. したがって,  $\sigma \sigma_*^{-1}$  について考察すればよい. 定理 3.3 を示すために鍵となるのは, 次の命題である.

命題 3.4. 既約な等質錐  $\Omega$  に対して,

- (1)  $\Omega$  が対称ならば,  $\sigma \sigma_*^{-1} \mathbf{u} < 0$  となる  $\mathbf{u} \in \{0, 1\}^r$  は存在しない,
- (2)  $\Omega$  が対称でなければ,  $\sigma \sigma_*^{-1} \mathbf{u} < 0$  となる  $\mathbf{u} \in \{0, 1\}^r$  が存在する.

証明の概略. (1)  $\Omega$  を既約対称錐とすると,  $\sigma, \sigma_*$  はそれぞれ式 (3.3) で与えられるので,

$$(3.5) \quad \sigma \sigma_*^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & -1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

となる. これより,  $\sigma \sigma_*^{-1} \mathbf{u} < 0$  となる  $\mathbf{u} \in \{0, 1\}^r$  が存在しないことは明らか.

(2) 等質錐の階数が  $r-1$  以下のときに命題が成立すると仮定する. 分解 (2.2) において  $(p, q) = (r-1, 1)$  とすると,  $V$  は

$$V = V' \oplus E \oplus \mathbb{R}c_r$$

と直和分解される. ここで  $V' = V_-$  とおいた.  $V'$  に対応する等質錐を  $\Omega'$  で表し,  $\sigma', \sigma'_*$  をそれぞれ  $\Omega'$  および  $(\Omega')^*$  の multiplier matrix とする. このとき定理 2.3 より, ある  $\underline{\gamma} \in \{0, 1\}^{r-1}$  および  $\varepsilon \in \{0, 1\}^{r-1}$  が存在して,

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma' & 0 \\ \underline{\gamma} \sigma' & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_* = \begin{pmatrix} \sigma'_* & \sigma'_* \varepsilon \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

となる. ただし,  $\underline{\gamma}$  は横ベクトル,  $\varepsilon$  は縦ベクトルとする. ここで,  $\Omega$  の既約性により  $\underline{\gamma} \neq 0$  かつ  $\varepsilon \neq 0$  である. また [8, Lemma 3.1] にあるように,  $\underline{\gamma}$  と  $\varepsilon$  に対して  $\gamma_j = \varepsilon_j = 1$  となる  $j$  が存在し, したがって特に  $\underline{\gamma} \sigma' \varepsilon \geq 1$  となる. さて, 簡単のため  $\Omega'$  が既約と仮定する. ベクトル  $\mathbf{u}' \in \{0, 1\}^{r-1}$  に対して

$$\sigma \sigma_*^{-1} \mathbf{u} = \begin{pmatrix} \sigma' (\sigma'_*)^{-1} \mathbf{u}' - \sigma' \varepsilon \\ \underline{\gamma} \sigma' (\sigma'_*)^{-1} \mathbf{u}' + 1 - \underline{\gamma} \sigma' \varepsilon \end{pmatrix}, \quad \text{where } \mathbf{u} := \begin{pmatrix} \mathbf{u}' \\ 1 \end{pmatrix}$$

となるので, このベクトル  $\sigma\sigma_*^{-1}\mathbf{u}$  の成分が全て負になることを示す. 記号が煩雑になることを避けるために  $\tilde{\mathbf{u}}' := \sigma'(\sigma'_*)^{-1}\mathbf{u}'$  とおく. まず  $\Omega'$  が対称でないとする, 帰納法の仮定より  $\tilde{\mathbf{u}}' < 0$  となる  $\mathbf{u}'$  が存在するため,  $\sigma\sigma_*^{-1}\mathbf{u} < 0$  となる. 次に  $\Omega'$  が対称とする. このとき  $\sigma'(\sigma'_*)^{-1}$  は式 (3.5) の形なので,  $\mathbf{u}' = {}^t(0, 1, \dots, 1)$  とおけば  $\tilde{\mathbf{u}}' = {}^t(-1, \dots, -1, 0)$  となる.  $\sigma'\varepsilon$  の末項は  $\varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_{r-1}$  になるので,  $\varepsilon \neq 0$  より

$$\tilde{\mathbf{u}}' - \sigma'\varepsilon < 0$$

を得る. 次に  $\underline{\gamma}\tilde{\mathbf{u}}' + 1 - \underline{\gamma}\sigma'\varepsilon$  を考える.  $\underline{\gamma} \neq (0, \dots, 0, 1)$  ならば  $\underline{\gamma}\tilde{\mathbf{u}}' < 0$  となるので,  $\underline{\gamma} = (0, \dots, 0, 1)$  とする. このとき  $\varepsilon_{r-1} = 1$  である. よって  $\underline{\gamma}\sigma'\varepsilon = 1 + \varepsilon_2 + \dots + \varepsilon_{r-2}$  なので,  $\varepsilon \neq {}^t(0, \dots, 0, 1)$  ならば  $1 - \underline{\gamma}\sigma'\varepsilon < 0$  となる. 残るは  $\varepsilon = {}^t(0, \dots, 0, 1)$  の場合であるが, このとき

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma' & 0 \\ \underline{\gamma}\sigma' & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_* = \begin{pmatrix} \sigma'_* & \sigma'_*\varepsilon \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

であるため, [7, Theorem 4.3] より  $\Omega$  は対称である.  $\Omega'$  が既約でないときも同様である. 以上により,  $\Omega$  が対称でないならば,  $\sigma\sigma_*^{-1}\mathbf{u} < 0$  となる  $\mathbf{u} \in \{0, 1\}^r$  が存在する.  $\square$

次の補題は容易に証明できる.

**補題 3.5.**  $\underline{\nu} \geq 0$  とする. このとき,  $\underline{\nu}A \geq 0$  かつある  $\mathbf{u} \in \{0, 1\}^r$  に対して  $A\mathbf{u} < 0$  を満たす行列  $A$  が存在すれば,  $\underline{\nu} = 0$  となる.

**定理 3.3 の証明.**  $\Omega$  を対称でない既約等質錐とする. このとき命題 3.4 より,  $\sigma\sigma_*^{-1}\mathbf{u} < 0$  となる  $\mathbf{u} \in \{0, 1\}^r$  が存在する. ここで  $\Delta^{\underline{\nu}}(x)$  と  $(\mathcal{L}[\Delta^{\underline{\nu}}](y))^{-1} = \Delta_*^{\underline{\nu}}(y)$  が共に多項式であると仮定すると, 式 (3.4) を満たさなければならないが, 補題 3.5 より, これを満たすのは  $\underline{\nu} = 0$  に限る. したがって,  $\Omega$  が対称でないならば, 定理 3.3 の条件を満たす  $H$ -相対不変多項式は定数のみである.  $\square$

## 参考文献

- [1] J. Faraut and A. Korányi, “Analysis on symmetric cones”, Clarendon Press, Oxford, 1994.
- [2] S. G. Gindikin, *Analysis in homogeneous domains*, Russian Math. Surveys **19** (1964), 1–89.
- [3] H. Ishi, *Basic relative invariants associated to homogeneous cones and applications*, J. Lie Theory, **11** (2001), 155–171.

- [4] H. Ishi and T. Nomura, *Tube domain and an orbit of a complex triangular group*, Math. Z., **259** (2008), 697–711.
- [5] T. Kimura, “Introduction to prehomogeneous vector spaces”, Transl. Math. Monogr., Amer. Math. Soc., Providence, RI, **215**, (2002).
- [6] H. Nakashima, *Basic relative invariants of homogeneous cones*, J. Lie Theory **24** (2014), 1013–1032.
- [7] H. Nakashima, *Characterization of symmetric cones by means of the basic relative invariants*, Adv. Pure Appl. Math., **7** (2016), 2, 143–153.
- [8] H. Nakashima, *Basic relative invariants of homogeneous cones and their Laplace transforms*, to appear in J. Math. Soc. Japan.
- [9] E. B. Vinberg, *The theory of convex homogeneous cones*, Trans. Moscow Math. Soc., **12** (1963), 340–403.