

エルミート対称対の二重旗多様体と退化主系列表現

Degenerate principal series arising from double flag varieties of a Hermitian symmetric pair

西山享^{*} (青学大・理工)

KYO NISHIYAMA

概要. 実二重旗多様体上の幾何, とくにその軌道の分類と, それに付随する概均質ベクトル空間の相対不変式についてまず述べる. その応用として, この相対不変式を積分核を持つ積分作用素を考え, それが退化主系列表現の間の絡作用素 (intertwiners) となることを示す. この積分作用素は, 二つの複素パラメータを持つが, ある領域上では絶対収束している. さらに特殊なパラメータ値においては, その像は有限次元表現になり, 退化主系列表現における特殊な有限次元部分表現の情報を与える.

この講演は, Aarhus 大学の Bent Ørsted 教授との共同研究に基づいている.

1. 二重旗多様体

G を認容リー群, $\theta \in \text{Aut } G$ を対合, つまり, $\theta^2 = \text{id}_G$ となるような自己同型とする. $L = G^\theta$ において, これを対称部分群と呼ぶ¹. $P \subset G$ および $Q \subset L$ をそれぞれ, G, L の放物型部分群としよう. このとき, 旗多様体の直積 $\mathfrak{X} = L/Q \times G/P$ に L の対角的な作用を考えたものを二重旗多様体と呼ぶことにする. また, \mathfrak{X} 上の L 軌道が有限個であるときに有限型という ([NO11]).

G が複素単純代数群のときには, 多数の有限型二重旗多様体が知られており, そのうち, 特別なものは分類もされている. たとえば, 三重旗多様体 $G/P_1 \times G/P_2 \times G/P_3$ に対角的な G 作用を考えたものは, 対称対 $(G \times G, \text{diag } G)$ に付随する二重旗多様体と考えることができるが ([西 11, § 2.1]), これについては, Magyar-Weyman-Zelevinsky [MWZ99, MWZ00] および松木 [Mat13, Mat15] によって, G が古典型の場合に有限型の分類が行われている. また [HNOO13] では, 放物型部分群 P や Q がそれぞれボレル部分群のときに例外型を含めた分類がある. これら, 複素数体上の二重旗多様体については, 他に [落西 10, NO11] なども参照して欲しい.

2016 年度表現論シンポジウム講演集原稿 (2016/11/29 – 12/02; 於 オキナワ グランメールリゾート).

^{*}) Supported by JSPS Grant-in-Aid for Scientific Research (C) #16K05070.

¹ G が連結であっても, G^θ は一般に連結でない. そこで, L を G^θ の連結成分とした方が都合のよいこともある.

2. シンプレクティック群とラグランジュ・グラスマン多様体

実リー群の表現論への応用には, G が実リー群で, θ が Cartan 対合とは限らない一般の対合の場合に, 実二重旗多様体について考えることが重要である. この講演では, G が実シンプレクティック群 $\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{R})$ の場合に, 有限型の実二重旗多様体を考える. $G = \mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{R})$ を次のように実現しておく.

まず $2n$ 次元のシンプレクティック・ベクトル空間を $V = \mathbb{R}^{2n}$ とし, 標準的なシンプレクティック形式を $u, v \in V$ に対して

$$\langle u, v \rangle = {}^t u J_n v, \quad J_n = \begin{pmatrix} 0 & -1_n \\ 1_n & 0 \end{pmatrix}$$

で定義する. 我々の G は, このシンプレクティック形式を保つような線型変換の全体

$$\mathrm{Sp}(V) = \{g \in \mathrm{GL}(V) \mid \langle gu, gv \rangle = \langle u, v \rangle\}$$

である. V のラグランジュ部分空間として, $V^+ = \mathrm{span}_{\mathbb{R}}\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ および $V^- = \mathrm{span}_{\mathbb{R}}\{e_n, e_{n+1}, \dots, e_{2n}\}$ を取る. ここに e_j は第 j 番目の基本ベクトルである. 明らかに $V = V^+ \oplus V^-$ が成り立つが, これを V の極分解と呼ぶ. ラグランジュ部分空間 V^+ と V^- はシンプレクティック形式に関して互いに双対であり, その意味で, しばしば $V^- = (V^+)^*$ とみなすことにする.

G の放物型部分群 (の一つ) としてラグランジュ部分空間 V^+ の安定化部分群を考える (Siegel 放物型部分群).

$$P_S := \mathrm{Stab}_G(V^+) = \{g \in G \mid gV^+ = V^+\} \quad (2.1)$$

P_S は極大な放物型部分群であるが, その Levi 分解を

$$P_S = L \ltimes N, \quad L = \mathrm{Stab}_G(V^+) \cap \mathrm{Stab}_G(V^-) \simeq \mathrm{GL}(V^+) \quad (2.2)$$

とする. $N = N_S$ は P_S の冪単根基である. Levi 部分群と冪単根基は,

$$L = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & {}^t a^{-1} \end{pmatrix} \mid a \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \right\} \simeq \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}),$$

$$N = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & z \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid z \in \mathrm{Sym}_n(\mathbb{R}) \right\} \simeq \mathrm{Sym}_n(\mathbb{R})$$

のように, 行列を用いて具体的に書くことができる. 最後の同型は指数写像による.

ラグランジュ部分空間全体の集合を $\Lambda = \Lambda_n$ と表すと, シンプレクティック群 $G = \mathrm{Sp}(V)$ は Λ に推移的に作用するので $\Lambda = G/P_S$ であるが, これによって Λ に等質多様体の構造が入り, これをラグランジュ・グラスマン多様体と呼ぶ. ラグランジュ・グラスマン多様体は $\mathrm{LGr}(\mathbb{R}^{2n})$ と書くこともある.

$I_{n,n} = \begin{pmatrix} 1_n & 0 \\ 0 & -1_n \end{pmatrix}$ を考え, G の対合 θ を, $g \in G$ に対して, $\theta(g) = I_{n,n} g I_{n,n}^{-1}$ と定義すると, $L = G^\theta$ であることが分かる. つまり P_S の Levi 部分群 L は G の対称部分群でもある. そこで, $L = \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ の放物型部分群 $Q \subset L$ をとり, 二重旗多様体 $\mathcal{X} = L/Q \times G/P_S$ を考えよう. 以下では, $Q = B_n$ (上半三角行列全体のなす L のボレル部分群), または

$Q = Q_d = P_{(d,n-d)}^{\text{GL}}$ (対角ブロックのサイズが $d, n-d$ の極大放物型部分群) の場合を考える．このとき, $L/B_n = \mathcal{F}\ell(\mathbb{R}^n)$ (古典的な旗多様体), あるいは $L/Q_d = \text{Gr}_d(\mathbb{R}^n)$ は \mathbb{R}^n の中の d 次元部分空間のなすグラスマン多様体であるから, 結局, 二重旗多様体は

$$\mathfrak{X} = \mathcal{F}\ell(\mathbb{R}^n) \times \text{LGr}(\mathbb{R}^{2n}) \quad \text{あるいは} \quad \text{Gr}_d(\mathbb{R}^n) \times \text{LGr}(\mathbb{R}^{2n})$$

であって, これに一般線型群 $\text{GL}_n(\mathbb{R})$ が対角的に作用している．

最初の結果は, 軌道の有限性である．

定理 2.1. $G = \text{Sp}_{2n}(\mathbb{R})$ をシンプレクティック群, P_S を Siegel 放物型部分群 (式 (2.1)) とし, $L = \text{GL}_n(\mathbb{R})$ を P_S の Levi 部分群であり, かつ G の対称部分群になるようにとる (式 (2.2)). また B_n を L のボレル部分群とする．このとき, 二重旗多様体

$$\mathfrak{X} = L/B_n \times G/P_S = \mathcal{F}\ell(\mathbb{R}^n) \times \text{LGr}(\mathbb{R}^{2n})$$

上の $L = \text{GL}_n(\mathbb{R})$ 軌道は有限である．

この定理の証明は, 初等的であるが, 他の対称空間とも関係していて興味深いので, 以下に概略を紹介する．しかし, その前に, この定理の系を二つ述べる．

系 2.2. Q を L の任意の放物型部分群とすると, 二重旗多様体 $\mathfrak{X} = L/Q \times G/P_S$ 上の L 軌道は有限である．特に, $L/Q_d \times G/P_S = \text{Gr}_d(\mathbb{R}^n) \times \text{LGr}(\mathbb{R}^{2n})$ 上の $\text{GL}_n(\mathbb{R})$ の軌道は有限である．

この系は, 任意の放物型部分群 $Q \subset L$ が適当な共役を取ると B_n を含むことに注意して, L 同変な射影 $L/B_n \times G/P_S \rightarrow L/Q \times G/P_S$ を考えれば, 上の定理より明らかである．

系 2.3. ラグランジュ・グラスマン多様体 $G/P_S = \text{LGr}(\mathbb{R}^{2n})$ は $L = \text{GL}_n(\mathbb{R})$ の作用によって球多様体である．つまり, L のボレル部分群 B_n が有限個の軌道を持つ．

この系は $(L/B_n \times G/P_S)/L \simeq B_n \backslash G/P_S$ であることから, 定理 2.1 と同値であることがわかる．以下でも, しばしば定理 2.1 と系 2.3 を同じものとみなす．

3. 軌道の有限性

この節では, 定理 2.1 の二通りの証明を紹介する．その前に, 複素数体上の二重旗多様体 $\mathcal{F}\ell(\mathbb{C}^n) \times \text{LGr}(\mathbb{C}^{2n})$ は $\text{GL}_n(\mathbb{C})$ の作用に関して有限型, つまり有限個の軌道を持つことがすでに分かっていることに注意しておく ([NO11]). ここで紹介する証明は, 複素数体の場合と違い, 初等的ではあるが少し面倒な行列の計算を伴う．しかし, 同時に, この証明によって二重旗多様体上の軌道が (ほぼ) 分類できること, また, C 型以外の対称対との隠れた関係性がわかるなどの長所もある．

3.1. Bruhat 分解と GL_n 対称対: 有限性の証明その 1. ここでは, 定理 2.1 の代わりに系 2.3 を示すことにする. そのために, まず $L \backslash G/P_S$ の分解を考えよう. L は対称部分群, P_S は放物型部分群であり, この分解は表現論でしばしば現れる普遍的な両側分解である. このような, 対称部分群と放物型部分群による両側分解が有限個の軌道を持つことはよく知られている ([Wol74, Mat79, Ros79]などを参照).

さて, W_G を G の Weyl 群, 放物型部分群 P に対して, W_P を P の Levi 部分群の Weyl 群とすると, Bruhat 分解

$$G = \bigsqcup_{w \in W_{P_S} \backslash W_G/W_{P_S}} P_S w P_S$$

が成り立つが, 個々の Bruhat 細胞 $P_S w P_S$ は明らかに L の作用で不変である. したがって

$$L \backslash G/P_S = \bigsqcup_{w \in W_{P_S} \backslash W_G/W_{P_S}} L \backslash P_S w P_S/P_S$$

である. 一般の w を考えることは少し骨が折れるので, ここでは $w = w_0$ (最長元) の場合のみを考えよう. この場合, $P_S w_0 P_S/P_S$ は G/P_S の開集合であり, 最大の Bruhat 細胞である. いま, $w_0^{-1} P_S w_0$ を P_S の反対側にある (opposite) 放物型部分群とし, その冪単根基を N^- とすれば, 具体的に

$$N^- = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ z & 1 \end{pmatrix} \mid z \in \text{Sym}_n(\mathbb{R}) \right\} \simeq \text{Sym}_n(\mathbb{R})$$

と書ける. このとき $P_S w_0 P_S/P_S \simeq N^- \simeq \text{Sym}_n(\mathbb{R})$ が成り立ち, この設定の元で $a \in GL_n(\mathbb{R}) = L$ は $z \in \text{Sym}_n(\mathbb{R})$ に対して, $a.z = {}^t a^{-1} z a^{-1}$ (左辺は L の作用, 右辺は行列の積) と作用することがわかる. しかし, 記号がいささか面倒なので, Bruhat 細胞を取り替える (座標変換を行う) ことによって a は $a.z = a z {}^t a$ と作用しているとして話をすすめよう. すると, 線型代数のよく知られた定理「実対称行列は直交行列によって対角化できる」, あるいは Sylvester の慣性律によって,

$$L \backslash P_S w_0 P_S/P_S \simeq \text{Sym}_n(\mathbb{R})/GL_n(\mathbb{R}) \simeq \{ \text{diag}(1_p, -1_q, 0_s) \mid p+q+s=n \}$$

であることがわかる. このうち, 開軌道は $p+q=n$ ($s=0$) となっているもので代表され, $n+1$ 個ある. この報告では, 証明のアイデアを紹介するのが目的であるから, この開軌道のみを考えることにしよう.

開軌道は $I_{p,q} = \text{diag}(1_p, -1_q) \in \text{Sym}_n(\mathbb{R})$ ($p+q=n$) を通る軌道であるが, その安定化部分群

$$\text{Stab}_L(I_{p,q}) = \{ g \in GL_n(\mathbb{R}) \mid g I_{p,q} {}^t g = I_{p,q} \} = O(p, q)$$

は不定値直交群であって, L の対称部分群である. これを $H = H_{p,q}$ と書く. すると, L 軌道は

$$L/H_{p,q} = GL_n(\mathbb{R})/O(p, q)$$

である. 我々が知りたいのは B_n 軌道であるから, さらにこれを B_n 軌道に分解する.

$$B_n \backslash L/H_{p,q} = B_n \backslash GL_n(\mathbb{R})/O(p, q) = \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)/O(p, q)$$

最後の空間は，旗多様体 L/B_n における対称部分群 H の軌道分解という格好をしているから，すでに述べたように，対称対の一般論から軌道の有限性が分かる．我々はシンプレクティック群から出発したが，ここで出てきたのは，一般線型群と直交群のなす対称対である．

さて，これで，開軌道の B_n の作用による軌道分解が対称対 $(\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}), \mathrm{O}(p, q))$ の場合に帰着することが分かった．もちろん，この場合にも B_n の作用は開軌道を有しており， G/P_S 全体で考えても開軌道である．また，開軌道がこれできつことも容易に分かるであろう．もともとの $\mathfrak{X} = L/B_n \times G/P_S$ における L 軌道の問題に帰っても，開軌道同士が対応するので，結局，我々は二重旗多様体の開軌道の分類も得たことになる．

定理 3.1. 二重旗多様体 $\mathfrak{X} = \mathcal{F}\ell(\mathbb{R}^n) \times \mathrm{LGr}(\mathbb{R}^{2n})$ 上の $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ の作用による開軌道は $(n+1)$ 個あり，その $\mathrm{LGr}(\mathbb{R}^{2n})$ への射影は対称空間 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})/\mathrm{O}(p, q)$ ($p+q=n$) に同型である．この軌道を $\Omega(p, q)$ で表す．

さて，開軌道でない場合や，他の低次元の Bruhat 胞体に含まれる軌道についてはどうかというと，その場合もやはり対称対に帰着する．しかし，その計算はより複雑であり，最終的に次の松木-Kimelfeld の定理が必要である ([Mat91, Kim87]) ．

定理 3.2 (松木-Kimelfeld). G を (一般の) 連結認容実リー群とし， P_{\min} を極小放物型部分群とする．閉部分群 $H \subset G$ に対して， G/H 上に P_{\min} が開軌道を持つことと， P_{\min} 軌道が有限個であることは同値である．

この定理を $G = \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, $P_{\min} = B_n$ として用いて，軌道の有限性を得るのであるが，詳細は略す．

3.2. ラグランジュ・グラスマン多様体をほどく：有限性の証明その 2. 軌道の有限性を見る第二の方法を紹介しよう．この方法では，軌道の分類までを視野に入れて論ずることができるが，旗多様体 \mathfrak{X} との関係を直接見るのには少々不便である．

まずラグランジュ・グラスマン多様体 $\Lambda = \mathrm{LGr}(\mathbb{R}^{2n})$ の伸展写像 (unfolding map) を考えよう． $M_{2n,n}(\mathbb{R})$ を実数を成分に持つ $2n \times n$ の行列の全体とし，各列が $V = \mathbb{R}^{2n}$ のラグランジュ部分空間の基底を並べたものになっているような行列 $A \in M_{2n,n}(\mathbb{R})$ を考えよう．その全体を $\mathcal{M} \subset M_{2n,n}(\mathbb{R})$ と書く．すると，

$$G/P_S \simeq \Lambda = \mathrm{LGr}(\mathbb{R}^{2n}) \simeq \mathcal{M}/\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$$

が同型となるので，我々は $B_n \backslash \mathcal{M}/\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ の構造を解析すればよい．ただし $b \in B_n$ の $A \in \mathcal{M}$ への作用は，

$$A = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} \quad (A_1, A_2 \in M_n(\mathbb{R})) \quad \text{に対して} \quad b \cdot A = \begin{pmatrix} bA_1 \\ {}_t b^{-1}A_2 \end{pmatrix}$$

で与えられている．このとき， $A \in \mathcal{M}$ となるための条件は， $\mathrm{rank} A = n$ かつ ${}^t A_1 A_2 \in \mathrm{Sym}_n(\mathbb{R})$ となることに注意しよう． $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ は右からの積で作用するので， A の列基本変形として働く．この他に B_n が左からの積で働くことをあわせて考えると， $B_n \backslash \mathcal{M}/\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$

の代表元として，次の形の行列が取れる． n の分割 (r, s) を取り， $v \in S_n/(S_r \times S_s)$ を Grassmann 置換として，

$$vA = v \left(\begin{array}{cc|cc} 1_r & 0 & & \\ 0 & 0 & & \\ \hline \sigma & 0 & & \\ 0 & 1_s & & \end{array} \right), \quad \sigma \in \text{Sym}_r(\mathbb{R})/B_r$$

ここで， σ は $\text{Sym}_r(\mathbb{R})/B_r$ の代表元を動く．軌道の有限性はこの最後の商空間 $\text{Sym}_r(\mathbb{R})/B_r$ に集約されているが，その代表元として，符号つき対合とその退化したものを取ることができる²．実際のところ，最後の空間は G/P_S の開 Bruhat 胞体上の B_n 軌道の分類と同値である．

軌道の有限性と，分類の話はひとまずここでにおいて，先に話をすすめよう．以下では， L のボレル部分群 B_n の代わりに，極大放物型部分群 $Q_d = P_{(d, n-d)}^{\text{GL}}$ を考えることにする．

4. 概均質ベクトル空間と相対不変式

$L = \text{GL}_n(\mathbb{R})$ の極大放物型部分群を

$$Q = Q_d = P_{(d, n-d)}^{\text{GL}} = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \xi \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \mid \alpha \in \text{GL}_d(\mathbb{R}), \beta \in \text{GL}_{n-d}(\mathbb{R}), \xi \in M_{d, n-d}(\mathbb{R}) \right\}$$

ととる．このとき，我々の二重旗多様体は $\mathfrak{X} = L/Q_d \times G/P_S \simeq \text{Gr}_d(\mathbb{R}^n) \times \text{LGr}(\mathbb{R}^{2n})$ であって，これに $L = \text{GL}_n(\mathbb{R})$ が対角的に作用している．以下，簡単のために $\Xi_d := \text{Gr}_d(\mathbb{R}^n)$ および $\Lambda_n = \text{LGr}(\mathbb{R}^{2n})$ と書くことにして，ほとんどの空間は実数体上で考えるので， \mathbb{R}^n や (\mathbb{R}) の部分を省いて簡単に $\text{GL}_n, \text{Sym}_n, M_{m, n}$ 等と書くことにする³．

\mathfrak{X} 上の L 軌道に台を持つ関数 (超関数) は，形式的に考えると，退化主系列表現 $\text{Ind}_{Q_d}^L \chi_{Q_d}$ および $\text{Ind}_{P_S}^G \chi_{P_S}$ の間の絡作用素を与えるはずであるが，それを現実的な計算に持ち込むためには， L 同変な直線束が必要である．前節でも見たように， \mathfrak{X} において G/P_S の開 Bruhat 胞体に相当する部分は $\text{Gr}_d(\mathbb{R}^n) \times \text{Sym}_n$ と同型であって，この開集合は L の作用で安定である．そこで，我々は直線束を考える代わりに，前節のようにグラスマン多様体 $\Xi_d = \text{Gr}_d(\mathbb{R}^n)$ の伸展写像を取って，相対不変式を考えることにする．つまり，次のような図式を考える．ここに $M_{n, d}^\circ$ は階数が n の行列全体のなす $M_{n, d}$ の開集合であり， $\Xi_d \simeq M_{n, d}^\circ/\text{GL}_d$ である．

$$\begin{array}{ccc} \text{Sym}_n \times M_{n, d} & \xleftarrow{\text{open}} & \text{Sym}_n \times M_{n, d}^\circ \\ & & \downarrow / \text{GL}_d \\ & & \text{Sym}_n \times \Xi_d \xrightarrow{\text{open}} \Lambda_n \times \Xi_d \end{array}$$

²実を言うと，この部分はまだ計算が詳細に煮詰まっていない．“符号付の対合” もまだ仮の概念である．

³実際，この節で扱う概均質ベクトル空間と相対不変式については，複素数体上でも同様の事実が成り立つ．

軌道の有限性の反映として，ベクトル空間 $\text{Sym}_n \times M_{n,d}$ は $\text{GL}_n \times \text{GL}_d$ の作用に関して概均質ベクトル空間になる⁴．ただし，その作用は

$$(h, m) \cdot (z, y) = (hz^t h, h y^t m) \quad ((h, m) \in \text{GL}_n \times \text{GL}_d, (z, y) \in \text{Sym}_n \times M_{n,d})$$

で与えられている．この作用に関する基本相対不変式は

$$\psi_1(z, y) = \det z \quad \text{および} \quad \psi_2(z, y) = \det z \cdot \det({}^t y z^{-1} y)$$

の二つで，対応する指標はそれぞれ $\chi_1(h, m) = (\det h)^{-2}$ ， $\chi_2(h, m) = (\det h)^{-2}(\det m)^{-2}$ である．ここで， ψ_2 は一見すると多項式でないように見えるが，

$$\psi_2(z, y) = (-1)^d \det \begin{pmatrix} z & y \\ {}^t y & 0 \end{pmatrix},$$

なので，多項式関数である．一般の相対不変式は次のように与えられる． $\mathcal{P}ol(V)$ でベクトル空間 V 上の多項式環を表そう．

定理 4.1. $\text{GL}_n \times \text{GL}_d$ が作用する概均質ベクトル空間 $\text{Sym}_n \times M_{n,d}$ における，指標 $\chi_1^{m_1} \chi_2^{m_2}$ ($m_1, m_2 \geq 0$) を持つ相対不変式 $f(z, y) \in \mathcal{P}ol(\text{Sym}_n \times M_{n,d})$ の空間は一次元であって， $(\det z)^{m_1+m_2} (\det({}^t y z^{-1} y))^{m_2}$ の定数倍である．この他には相対不変式は存在しない．

この定理のすこし興味深い応用を紹介しておこう． GL_n の最高ウェイト λ を持つ既約有限次元表現を $V^{(n)}(\lambda)$ ，その双対表現を $V^{(n)}(\lambda)^*$ で表す．また ϖ_k を GL_n の第 k 基本ウェイトとする．

系 4.2. 上の定理の設定の元に，次の相対不変式を考える．

$$f(z, y) = (\det z)^{m_1+m_2} (\det({}^t y z^{-1} y))^{m_2} \quad (m_1, m_2 \geq 0)$$

(1) 部分空間 $\text{span}_{\mathbb{C}}\{f(z, y) \mid z \in \text{Sym}_n\} \subset \mathcal{P}ol(M_{n,d})$ は GL_n の作用による不変部分空間であって， $\text{GL}_n \times \text{GL}_d$ 加群として， $V^{(n)}(2m_2\varpi_d)^* \otimes V^{(d)}(2m_2\varpi_d)^*$ と同型である．

(2) 同様に，部分空間 $\text{span}_{\mathbb{C}}\{f(z, y) \mid y \in M_{n,d}\} \subset \mathcal{P}ol(\text{Sym}_n)$ は GL_n の作用による不変部分空間であって， GL_n 加群として $V^{(n)}(2m_1\varpi_n + 2m_2\varpi_{n-d})^*$ に同型である．

5. 退化主系列表現

さて，いよいよ本報告の主題である，退化主系列と積分核作用素について述べよう．

退化主系列表現とは，Borel 部分群より大きな放物型部分群，とくに極大放物型部分群の指標から誘導した表現を指す ([Joh90], [Joh92])．この節では，退化主系列表現を積分核作用素が定義しやすい形に実現することを考える．

⁴概均質ベクトル空間については [木 98] 参照

5.1. $\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{R})$ の退化主系列表現. $G = \mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{R})$ として P_S を Siegel 放物型部分群とする (式 (2.1)). P_S の指標 χ_{P_S} を取り, 次のように退化主系列表現 (C^∞ 誘導表現) を定義する.

$$C^\infty \mathrm{Ind}_{P_S}^G \chi_{P_S} := \{f : G \rightarrow \mathbb{C} : C^\infty \mid f(gp) = \chi_{P_S}(p)^{-1} f(g) \ (g \in G, p \in P_S)\}$$

G は左移動 $\pi_\nu^G(g)f(x) = f(g^{-1}x)$ によって作用する. 指標 χ_{P_S} は, 具体的に次のように取っておく.

$$\chi_{P_S}(p) = |\det a|^\nu, \quad p = \begin{pmatrix} a & w \\ 0 & t_a^{-1} \end{pmatrix} \in P_S \quad (5.1)$$

$\det a$ は絶対値を取っているが, 必要ならば, 符号を掛けたり, あるいは ν が整数ならば $(\det a)^\nu$ を考えたりする.

$\mathrm{Sym}_n(\mathbb{R})$ は G/P_S の開集合として埋め込まれているが, その埋め込まれた像を $\Omega \subset G/P_S$ と書いておく. 関数 $f \in C^\infty \mathrm{Ind}_{P_S}^G \chi_{P_S}$ は $f|_\Omega$ によって決まってしまうので, $f(z)$ ($z \in \mathrm{Sym}_n(\mathbb{R})$) を考えれば十分である⁵. よく知られているように, $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in G$ は $z \in \mathrm{Sym}_n(\mathbb{R}) = \Omega$ に対して, 一次分数変換

$$g.z = -(az - b)(cz - d)^{-1} \in \mathrm{Sym}_n(\mathbb{R}), \quad (5.2)$$

として働く. ただし $\det(cz - d) \neq 0$ とする⁶. これを退化主系列表現にあわせて書き換えると次のようになる.

補題 5.1. 式 (5.1) で与えられた指標 χ_{P_S} から誘導された主系列表現に属する関数 $f \in C^\infty \mathrm{Ind}_{P_S}^G \chi_{P_S}$ に対して, 表現作用素 $\pi_\nu^G(g)$ は

$$\pi_\nu^G(g)f(z) = |\det(a + zc)|^{-\nu} f(g^{-1}.z) \quad (g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in G, z \in \mathrm{Sym}_n(\mathbb{R})),$$

で与えられる. 特に $h = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & t_a^{-1} \end{pmatrix} \in L$ に対しては, 次のようになる.

$$\pi_\nu^G(h)f(z) = |\det(a)|^{-\nu} f(a^{-1}z t_a^{-1}).$$

さて, このようにして得られた滑らかな退化主系列表現を L^2 ノルムによって完備化し, ヒルベルト空間における表現を得る. 通常は, 極大コンパクト部分群上の積分を用いて L^2 ノルムを定義するのであるが (compact picture), 我々の計算には non-compact picture が適している. そこで, [Kna86, § VII.1] に従い, 岩澤分解を具体的に計算して L^2 内積を定義する. 途中の計算は省略するが, $\nu_0 = \mathrm{Re} \nu$ とおき, dz を $\mathrm{Sym}_n(\mathbb{R})$ 上のルベーグ測度とすると, 結局 L^2 ノルムは

$$\|f\|_{G,\nu}^2 := \int_{\mathrm{Sym}_n(\mathbb{R})} |f(z)|^2 (\det(1 + z^2))^{\nu_0 - \frac{n+1}{2}} dz \quad (5.3)$$

⁵ 言うまでもないが, $\mathrm{Sym}_n(\mathbb{R})$ の C^∞ 関数がすべて現れるわけではなく, 無限遠で適切な増大度を持つ必要がある. $C^\infty(\mathrm{Sym}_n(\mathbb{R}))$ の中で退化主系列の空間を特定するのは難しいが, 面白い問題だと思われる.

⁶ $\det(cz - d) = 0$ のときには, $g.z$ は無限遠点になるが, いまは無限遠点を考えない.

で与えられることが分かる．したがって，ヒルベルト空間は

$$\mathcal{H}_\nu^G := \{f : \text{Sym}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{C} \mid \|f\|_{G,\nu}^2 < \infty\} \quad (5.4)$$

となるが，我々はこの L^2 誘導表現を $\text{Ind}_{P_S}^G \chi_S$ で表し，表現の作用素を π_ν^G と書く．

5.2. $\text{GL}_n(\mathbb{R})$ の退化主系列表現．この節では， $L = \text{GL}_n(\mathbb{R})$ の極大放物型部分群 $Q = Q_d = P_{(d,n-d)}^{\text{GL}}$ から誘導した退化主系列表現を準備しよう．まず Q の指標を

$$q = \begin{pmatrix} k & q_{12} \\ 0 & k' \end{pmatrix} \in Q, \quad \text{に対して} \quad \chi_Q(q) = |\det k|^\mu.$$

とおく．この指標を用いて (smooth な) 退化主系列表現を

$$C^\infty \text{Ind}_Q^L \chi_Q := \{F : L \rightarrow \mathbb{C} : C^\infty \mid F(aq) = \chi_Q(q)^{-1} F(a) \ (a \in L, q \in Q)\},$$

と定義する． L は左移動で作用する: $\pi_\mu^L(a)F(Y) = f(a^{-1}Y)$ ($a, Y \in L$)．この退化主系列表現上には compact picture を用いて L^2 ノルムを導入しよう．極大コンパクト部分群を $K_L = \text{O}(n)$ として，

$$\|F\|_{L,\mu}^2 := \int_{K_L} |F(k)|^2 dk \quad (F \in C^\infty \text{Ind}_Q^L \chi_Q) \quad (5.5)$$

とおき，このノルムによって完備化した空間を \mathcal{H}_μ^L としよう．積分は，関数 F の同変性によって $K_L/(K_L \cap Q) \simeq \text{O}(n)/\text{O}(d) \times \text{O}(n-d)$ 上で矛盾なく定義されていることに注意しよう．このようにして得られたヒルベルト空間を \mathcal{H}_μ^L と書き，退化主系列表現を $\pi_\mu^L = \text{Ind}_Q^L \chi_Q$ と記す．

さて，この後で積分核作用素を定義する際に便利なように， F をグラスマン多様体 $L/Q \simeq \text{Gr}_d(\mathbb{R}^n)$ 上の直線束の切断としてではなく，それを伸展した $M_{n,d}^\circ(\mathbb{R}) = \{y \in M_{n,d}(\mathbb{R}) \mid \text{rank } y = d\}$ 上の関数として，拡張しておこう．まず，射影

$$\begin{aligned} L = \text{GL}_n(\mathbb{R}) &\longrightarrow M_{n,d}^\circ(\mathbb{R}) \\ Y = \begin{pmatrix} y_1 & y_3 \\ y_2 & y_4 \end{pmatrix} &\longmapsto y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (5.6)$$

を取ると，この射影によって，同型 $\Xi_d = L/Q \xrightarrow{\sim} M_{n,d}^\circ(\mathbb{R})/\text{GL}_d(\mathbb{R})$ が誘導されることに注意する．したがって， $C^\infty \text{Ind}_Q^L \chi_Q$ に属する C^∞ 級の切断 F は関数 $F : M_{n,d}^\circ(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{C}$ であって $\text{GL}_d(\mathbb{R})$ 同変性 $F(yk) = |\det k|^{-\mu} F(y)$ を満たすものと同一視できることが分かる．もちろん表現の作用素は左移動として実現されている：

$$\pi_\mu^L(a)F(y) = F(a^{-1}y) \quad (y \in M_{n,d}^\circ(\mathbb{R}), a \in \text{GL}_n(\mathbb{R}) = L).$$

式 (5.5) の L^2 ノルムを得るためには，射影 (5.6) を $K_L = \text{O}(n)$ へ制限して，その像である正規直交フレームの全体がなす Stiefel 多様体

$$S_{n,d} := \{y \in M_{n,d}^\circ \mid {}^t y y = 1_d\} \simeq \text{O}(n)/\text{O}(n-d)$$

を考える必要がある．すると L/Q は自然に $S_{n,d}/O(d)$ と同型である．式 (5.5) で与えられたノルムは，Stiefel 多様体上の一意的に定まる $O(n)$ 不変測度 $d\sigma(v)$ を用いて

$$\|F\|_{L,\mu}^2 = \int_{S_{n,d}} |F(v)|^2 d\sigma(v)$$

と表される．

6. 積分核作用素と退化主系列の絡作用素

相対不変式を用いて次のような核関数を定義する．

$$K^{\alpha,\beta}(z, y) := |\det(z)|^\alpha |\det({}^t y z^{-1} y)|^\beta = |\det(z)|^{\alpha-\beta} \left| \det \begin{pmatrix} z & y \\ {}^t y & 0 \end{pmatrix} \right|^\beta \quad (6.1)$$

$$((z, y) \in \text{Sym}_n(\mathbb{R}) \times M_{n,d}(\mathbb{R}))$$

ここで $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ は複素パラメータである．この核関数を用いて，退化主系列間の積分作用素 \mathcal{P} と \mathcal{Q} を定義しよう．

6.1. 退化主系列表現 π_ν^G から π_μ^L への絡作用素 \mathcal{P} . $\Omega = \text{Sym}_n(\mathbb{R})$ を G/P_S へ埋め込まれた開集合， $\Omega(p, q)$ は $I_{p,q} = \text{diag}(1_p, -1_q)$ ($p+q=n$) を通る開 L 軌道を表すのであった．このとき $\Omega^\circ = \cup_{p+q=n} \Omega(p, q)$ は Ω の稠密開集合である．

さて， L の開軌道 $\Omega(p, q) \subset \Omega$ 上のコンパクト台を持つ関数 $f \in C^\infty \text{Ind}_{P_S}^G \chi_{P_S}$ に対して， $M_{n,d}^\circ(\mathbb{R})$ 上の関数 $\mathcal{P}f$ を

$$\mathcal{P}f(y) = \int_{\Omega(p,q)} f(z) K^{\alpha,\beta}(z, y) d\omega(z) \quad (y \in M_{n,d}^\circ(\mathbb{R})) \quad (6.2)$$

と定義する．ここで $d\omega(z)$ は L 軌道 $\Omega(p, q) \simeq \text{GL}_n(\mathbb{R})/O(p, q)$ 上の不変測度である．作用素 $\mathcal{P} = \mathcal{P}_{(p,q)}^{\alpha,\beta}$ は p, q およびパラメータ α, β に依存して決まっている．

L の元 $h = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & {}^t a^{-1} \end{pmatrix}$ と上の関数 f に対して，

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(\pi_\nu^G(h)f)(y) &= \int_{\Omega(p,q)} \chi_{P_S}(a)^{-1} f(a^{-1} z {}^t a^{-1}) K^{\alpha,\beta}(z, y) d\omega(z) \\ &= \chi_{P_S}(a)^{-1} \int_{\Omega(p,q)} f(z) K^{\alpha,\beta}(az {}^t a, y) d\omega(az {}^t a) \\ &= \chi_{P_S}(a)^{-1} \int_{\Omega(p,q)} f(z) |\det(a)|^{2\alpha} K^{\alpha,\beta}(z, a^{-1} y) d\omega(z) \\ &= |\det(a)|^{2\alpha-\nu} \int_{\Omega(p,q)} f(z) K^{\alpha,\beta}(z, a^{-1} y) d\omega(z) \\ &= |\det(a)|^{2\alpha-\nu} \pi_\mu^L(a) \mathcal{P}f(y) \end{aligned}$$

であるから, $\nu = 2\alpha$ ならば \mathcal{P} は (形式的な) 絡作用素である. この場合, $\mathcal{P}f(yk) = |\det(k)|^{2\beta}\mathcal{P}f(y)$ であるから, もしこれが L/Q 上で C^∞ ならば,

$$\mathcal{P}f(y) \in C^\infty\text{-Ind}_Q^L \chi_Q, \quad \chi_Q(p) = |\det k|^{-2\beta} \quad (p = \begin{pmatrix} k & * \\ 0 & k' \end{pmatrix})$$

となる. したがって, $2\beta = -\mu$ である.
 すでに見たように,

$$\Lambda = G/P_S \supset \bigcup_{p+q=n} \Omega(p, q) \quad (\text{open})$$

であるから, 各 p, q ($p+q=n$) に対して, ヒルベルト空間

$$\mathcal{H}_\mu^L(p, q) := L^2(\Omega(p, q), (\det(1+z^2))^{\nu_0 - \frac{n+1}{2}} dz)$$

は, 退化主系列全体の空間 \mathcal{H}_ν^G の閉部分空間であり, L 安定である. つまり, L の表現としての直和分解

$$\mathcal{H}_\nu^G = \bigoplus_{p+q=n} \mathcal{H}_\nu^G(p, q)$$

が成り立っている. 次の定理が, 積分核作用素 \mathcal{P} に関する主定理である.

定理 6.1. 退化主系列表現のパラメータ ν, μ の実部を $\nu_0 := \text{Re } \nu$, $\mu_0 := \text{Re } \mu$ と書き, それが次の不等式を満たすと仮定する.

$$n\nu_0 + d\mu_0 > \frac{n(n+1)}{2}, \quad n\nu_0 - d\mu_0 > \frac{n(n+1)}{2}, \quad (6.3)$$

$$\nu_0 + \mu_0 \geq n+1, \quad \mu_0 \leq 0 \quad (6.4)$$

このとき $\alpha = \nu/2$, $\beta = -\mu/2$ において, 積分核作用素 $\mathcal{P} = \mathcal{P}_{(p,q)}^{\alpha,\beta}$ を考えると, 式 (6.2) で定義された $\mathcal{P}f$ は収束し, 有界線型作用素 $\mathcal{P} : \mathcal{H}_\nu^G(p, q) \rightarrow \mathcal{H}_\mu^L$ を与える. したがって \mathcal{P} はヒルベルト空間における表現の間の連続な絡作用素 $\mathcal{P} : \pi_\nu^G|_L \rightarrow \pi_\mu^L$ を定める.

主定理の証明は, 積分の評価を忠実に行えば得られるが, かなり骨が折れる. 証明の詳細は現在準備中の共著論文に発表する予定である ([NØ16]).

6.2. 退化主系列表現 π_μ^L から π_ν^G への絡作用素 \mathcal{Q} . 同様に, コンパクト台を持つ $M_{n,d}(\mathbb{R})$ 上の C^∞ 関数 $F(y)$ に対して, $\mathcal{Q}F$ を次のように暫定的に定義する. (あとでこの定義を少し変更して, (6.6) のように定義する.)

$$\mathcal{Q}F(z) = \int_{M_{n,d}(\mathbb{R})} F(y) K^{\alpha,\beta}(z, y) dy \quad (z \in \text{Sym}_n(\mathbb{R})) \quad (6.5)$$

ここに dy は $M_{n,d}(\mathbb{R})$ 上のルベーク測度である．すると, $\pi_\mu^L(a)$ を左移動と解釈して, 次のように形式的な計算ができる．

$$\begin{aligned} (\mathcal{Q}\pi_\mu^L(a)F)(z) &= \int_{M_{n,d}(\mathbb{R})} F(a^{-1}y)K^{\alpha,\beta}(z,y)dy \\ &= \int_{M_{n,d}(\mathbb{R})} F(y)K^{\alpha,\beta}(z,ay)\frac{day}{dy}dy \\ &= \int_{M_{n,d}(\mathbb{R})} F(y)|\det a|^{2\alpha}K^{\alpha,\beta}(a^{-1}z^t a^{-1},y)|\det a|^d dy \\ &= |\det a|^{2\alpha+d}\chi_{P_S}(h)\pi_\nu^G(h)\mathcal{Q}F(z). \end{aligned}$$

したがって, もし $\chi_{P_S}(h)^{-1} = |\det a|^{2\alpha+d}$ であれば, 我々は形式的な絡作用素を得たことになる．ここで, $F(y)$ がコンパクト台であることをしばし忘れて, F が退化主系列表現に属するための同変性 $F(yk) = |\det k|^{-\mu}F(y)$ ($k \in \mathrm{GL}_d(\mathbb{R})$) を持っているとしてみよう．すると

$$F(yk)K^{\alpha,\beta}(z,yk)d(yk) = |\det k|^{-\mu+2\beta+n}F(y)K^{\alpha,\beta}(z,y)dy$$

が成り立つことがわかる．したがって, もし $\mu = 2\beta + n$ が成り立っていれば, 被積分測度 $F(y)K^{\alpha,\beta}(z,y)dy$ は $M_{n,d}^{\circ}(\mathbb{R})/\mathrm{GL}_d(\mathbb{R}) \simeq \mathrm{O}(n)/\mathrm{O}(d) \times \mathrm{O}(n-d)$ 上で矛盾なく定義されていることが分かる．この空間はコンパクトであるから, F がたとえば連続関数であれば積分は収束する．一方で, この商空間は計算上若干不便なので, 我々は積分を § 5.2 で導入された Stiefel 多様体 $S_{n,d} \subset M_{n,d}(\mathbb{R})$ 上で定義しよう．

パラメータ $\alpha = -(\nu + d)/2$ および $\beta = (\mu - n)/2$ に対して, 積分核作用素 \mathcal{Q} をあらためて

$$\mathcal{Q}F(z) = \int_{S_{n,d}} F(y)K^{\alpha,\beta}(z,y)d\sigma(y) \quad (z \in \mathrm{Sym}_n(\mathbb{R})), \quad (6.6)$$

と定義する．ここに $d\sigma(y)$ は $S_{n,d}$ 上の $\mathrm{O}(n)$ 不変測度である．作用素 \mathcal{Q} が絡作用素を定義するためには $\mathcal{Q}F(z)$ が L^2 空間 $L^2(\Omega, (\det(1+z^2))^{\nu_0 - \frac{n+1}{2}} dz)$ に属するかどうか問題になるが, 次の定理がその解答を与える．

定理 6.2. 退化主系列表現のパラメータの実部を $\nu_0 := \mathrm{Re} \nu$, $\mu_0 := \mathrm{Re} \mu$ と書き, それらが次の不等式を満たすとする．

$$n\nu_0 + d\mu_0 < \frac{n(n+1)}{2}, \quad n\nu_0 - d\mu_0 < \frac{n(n+1)}{2}, \quad (6.7)$$

$$\nu_0 + \mu_0 \leq n - d, \quad \mu_0 \geq n. \quad (6.8)$$

このとき $\alpha = -(\nu + d)/2$, $\beta = (\mu - n)/2$ において, 積分核作用素 \mathcal{Q} を式 (6.6) によって定義すれば, 積分は収束し, $\mathcal{Q}: \mathcal{H}_\mu^L \rightarrow \mathcal{H}_\nu^G$ は L の作用に関する絡作用素を与える．

ここで二つのことに注意しておく．一つ目は, 不等式 (6.7) と (6.8) で定義された領域は定理 6.1 に現れる領域と“正反対”の位置にあり, 両者には共通部分がないという事実である．したがって我々は \mathcal{P} と \mathcal{Q} を合成することができない(積分が発散する)．二番

目の注意は，条件 (6.7) は，(6.8) から従うという事実である．つまり，論理的には条件 (6.7) は不要である．しかし，不等式 (6.8) は積分の収束には強すぎる条件かもしれないと我々は考えており，そのために定理の主張に (6.7) をそのまま残した．

証明はやはり積分を具体的に計算すればよいのだが，ここでは省く ([NØ16]) ．

7. 退化主系列と有限次元表現

$\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$ が整数のときには，絶対値を取ることなく，核関数を

$$K^{\alpha, \beta}(z, y) = \det(z)^\alpha \det({}^t y z^{-1} y)^\beta \quad ((z, y) \in \text{Sym}_n(\mathbb{R}) \times M_{n,d}(\mathbb{R}))$$

と定義できる．この節では，絶対値を取らない，代数的な核関数を同じ記号で表す．これにあわせて，退化主系列を誘導する指標も μ, ν が整数のときには

$$\chi_{P_S}(p) = \det(a)^\nu \quad \left(p = \begin{pmatrix} a & * \\ 0 & {}^t a^{-1} \end{pmatrix} \in P_S\right)$$

$$\chi_Q(q) = \det(k)^\mu \quad \left(q = \begin{pmatrix} k & * \\ 0 & k' \end{pmatrix} \in Q\right)$$

と定義しておく．前節で得られた定理と系 4.2 を組み合わせれば，次の定理を得る．

定理 7.1. 非負整数 m_1, m_2 に対して $\alpha = m_1 + m_2, \beta = m_2$ とおき，核関数を上のように $K^{\alpha, \beta}(z, y)$ で定義する．

(1) $\nu = -2(m_1 + m_2) - d$ および $\mu = 2m_2 + n$ において，指標 χ_{P_S} および χ_Q を上のように決める．すると，退化主系列表現 $\text{Ind}_Q^L \chi_Q$ は有限次元表現 $V^{(n)}(2m_1 \varpi_n + 2m_2 \varpi_{n-d})^*$ を既約商として含む．一方， G の退化主系列表現 $\text{Ind}_{P_S}^G \chi_{P_S}$ は同じ L の有限次元表現を部分表現として含み， Q はこの二つを写しあう．

(2) $2m_1 \geq n + 1$ を仮定して， $\nu = 2(m_1 + m_2)$ および $\mu = -2m_2$ において指標 χ_{P_S} および χ_Q を上のように定義する．このとき，退化主系列表現 $\text{Ind}_{P_S}^G \chi_{P_S}$ は $L = \text{GL}_n(\mathbb{R})$ の既約表現 $V^{(n)}(2m_2 \varpi_d)^*$ を既約商表現として含む．一方， L の退化主系列表現 $\text{Ind}_Q^L \chi_Q$ は同じ既約表現を部分表現として含み， \mathcal{P} はこれら二つの表現の間の同変写像を与えている．

有限型の二重旗多様体に対して，核関数を定義し，核関数による積分を用いた退化主系列表現間の絡作用素を構成した．このような構成が任意の二重旗多様体に対して行うことができるのかどうか不明であるが，原理的にはそのような構成が可能であるはずであり，それぞれに個別の豊かな問題があるように思われる．また，積分作用素は複素パラメータを持っており，その解析接続や留数解析も面白い問題である．

これらの問題については，研究はまだ緒に就いたばかりであるが，また別の機会に報告することができれば嬉しい．

REFERENCES

- [HNOO13] Xuhua He, Kyo Nishiyama, Hiroyuki Ochiai, and Yoshiki Oshima, *On orbits in double flag varieties for symmetric pairs*, Transform. Groups **18** (2013), no. 4, 1091–1136.
- [Joh90] Kenneth D. Johnson, *Degenerate principal series and compact groups*, Math. Ann. **287** (1990), no. 4, 703–718.
- [Joh92] ———, *Degenerate principal series on tube type domains*, Hypergeometric functions on domains of positivity, Jack polynomials, and applications (Tampa, FL, 1991), Contemp. Math., vol. 138, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1992, pp. 175–187.
- [Kim87] Boris Kimelfeld, *Homogeneous domains on flag manifolds*, J. Math. Anal. Appl. **121** (1987), no. 2, 506–588.
- [Kna86] Anthony W. Kna, *Representation theory of semisimple groups*, Princeton Mathematical Series, vol. 36, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1986, An overview based on examples.
- [Mat79] Toshihiko Matsuki, *The orbits of affine symmetric spaces under the action of minimal parabolic subgroups*, J. Math. Soc. Japan **31** (1979), no. 2, 331–357.
- [Mat91] ———, *Orbits on flag manifolds*, Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. I, II (Kyoto, 1990), Math. Soc. Japan, Tokyo, 1991, pp. 807–813.
- [Mat13] ———, *An example of orthogonal triple flag variety of finite type*, J. Algebra **375** (2013), 148–187.
- [Mat15] ———, *Orthogonal multiple flag varieties of finite type I: Odd degree case*, J. Algebra **425** (2015), 450–523.
- [MWZ99] Peter Magyar, Jerzy Weyman, and Andrei Zelevinsky, *Multiple flag varieties of finite type*, Adv. Math. **141** (1999), no. 1, 97–118.
- [MWZ00] ———, *Symplectic multiple flag varieties of finite type*, J. Algebra **230** (2000), no. 1, 245–265.
- [NO11] Kyo Nishiyama and Hiroyuki Ochiai, *Double flag varieties for a symmetric pair and finiteness of orbits*, J. Lie Theory **21** (2011), no. 1, 79–99.
- [NØ16] Kyo Nishiyama and Bent Ørsted, *Double flag varieties over reals – the case of Hermitian symmetric spaces – (tentative)*, 2016, in preparation.
- [Ros79] W. Rossmann, *The structure of semisimple symmetric spaces*, Canad. J. Math. **31** (1979), no. 1, 157–180.
- [Wol74] Joseph A. Wolf, *Finiteness of orbit structure for real flag manifolds*, Geometriae Dedicata **3** (1974), 377–384.
- [西 11] 西山享, *spherical な群作用と多重旗多様体 (Spherical group actions and double flag varieties for a symmetric pair)*, 表現論シンポジウム講演集, vol. 31, 2011, 2011/11/07–11/10; 国民宿舎紀州路みなべ, pp. 45–56.
- [木 98] 木村達雄, *概均質ベクトル空間*, 岩波書店, 1998.
- [落西 10] 落合啓之・西山享, *多重旗多様体上の軌道の有限性について (Double flag varieties of finite type for a symmetric pair)*, 表現論シンポジウム講演集, vol. 30, 2010, 2010/11/09–11/12; 伊豆長岡温泉 おおとり荘, pp. 82–95.

DEPARTMENT OF PHYSICS AND MATHEMATICS, AOYAMA GAKUIN UNIVERSITY, FUCHINOBE 5-10-1, CHUO, SAGAMIHARA 252-5258, JAPAN

E-mail address: kyo@gem.aoyama.ac.jp