Schur Q-Functions and Symplectic Q-Functions

名古屋大学多元数理科学研究科
岡田 聡一 (Soichi OKADA)

1　はじめに

Schur の Q 関数は，対称群の射影表現の研究の中で Schur [17] が導入した対称多項式である．Schur 関数（Schur の S 関数）が対称群の既約線型表現の指標を記述するように，Schur の Q 関数は対称群の既約射影表現の指標を記述している．その後，Hall と Littlewood [9] によって，Schur 関数と Schur の Q 関数の共通の一般化として，Hall–Littlewood 関数が導入された．ここでは，Hall–Littlewood 関数の次の定義から始める．(Hall–Littlewood 関数の詳細については，[11, Chapter III] を参照されたい.)

分割とは，非負整数の広義単調減少列 $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \cdots)$ で $\sum_{i \geq 1} \lambda_i < \infty$ となるもののことである．分割 λ に対して，$|\lambda| = \sum_{i \geq 1} \lambda_i$ を λ の**大きさ**，$l(\lambda) = \#\{i : \lambda_i > 0\}$ を λ の**長さ**と呼ぶ.

定義 1.1. $\boldsymbol{x} = (x_1, \cdots, x_n)$ を n 個の変数の組とし，t をパラメータとする．長さ n 以下の分割 $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$ に対して，対応する **Hall–Littlewood $\boldsymbol{P}$ 関数** $P_\lambda(\boldsymbol{x}; t)$ を，

$$P_\lambda(\boldsymbol{x}; t) = \frac{1}{\mathfrak{S}_{n,\lambda}(t)} \sum_{w \in \mathfrak{S}_n} w \left(\prod_{i=1}^{n} x_i^{\lambda_i} \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{x_i - t x_j}{x_i - x_j} \right) \tag{1}$$

によって定義する．ここで，$\mathfrak{S}_n$ は n 次対称群であり，

$$\mathfrak{S}_{n,\lambda} = \{w \in \mathfrak{S}_n : w\lambda = \lambda\}, \quad \mathfrak{S}_{n,\lambda}(t) = \sum_{w \in \mathfrak{S}_{n,\lambda}} t^{l(w)}$$

（ただし $l(w)$ は置換 w の転倒数）である．また，**Hall–Littlewood $\boldsymbol{Q}$ 関数** $Q_\lambda(\boldsymbol{x}; t)$ を，

$$Q_\lambda(\boldsymbol{x}; t) = b_\lambda(t) P_\lambda(\boldsymbol{x}; t), \quad b_\lambda(t) = \prod_{i \geq 1} \prod_{j=1}^{m_i(\lambda)} (1 - t^j) \tag{2}$$

（ただし $m_i(\lambda)$ は λ における i の重複度）とおいて定義する．

定義 (1), (2) において $t = 0$ を代入すると，

$$P_\lambda(\boldsymbol{x}; 0) = Q_\lambda(\boldsymbol{x}; 0) = s_\lambda(\boldsymbol{x})$$

と Schur 関数となる．ここで，**Schur 関数** $s_\lambda(\boldsymbol{x})$ は，

$$s_\lambda(\boldsymbol{x}) = \frac{\det \left(x_i^{\lambda_j + n - j} \right)_{1 \leq i, j \leq n}}{\det \left(x_i^{n-j} \right)_{1 \leq i, j \leq n}} \tag{3}$$

と行列式の比として与えられる．一方で，$t=-1$ を代入したものが Schur の P 関数，Q 関数である．分割 λ は $\lambda_1 > \lambda_2 > \cdots > \lambda_{l(\lambda)} > 0$ をみたすとき，**ストリクト**であるという．

定義 1.2. 長さ n 以下のストリクトな分割 λ に対して，

$$P_\lambda(\boldsymbol{x}) = P_\lambda(\boldsymbol{x}; -1), \quad Q_\lambda(\boldsymbol{x}) = Q_\lambda(\boldsymbol{x}; -1) = 2^{l(\lambda)} P_\lambda(\boldsymbol{x}) \tag{4}$$

とおき，それぞれ **Schur の P 関数**，**Q 関数**と呼ぶ．

注意. 分割 λ がストリクトでないとき，$b_\lambda(-1) = 0$ より $Q_\lambda(\boldsymbol{x}; -1) = 0$ であるが，$P_\lambda(\boldsymbol{x}; -1) = 0$ であるとは限らない．

Schur の Q 関数は Schur 関数に比べると有名ではないが，Schur 関数の現れ方と Schur の Q 関数の現れ方はよく似ている．例えば，Schur 関数は次のような形でさまざまな場面に現れる：

(1) Schur 関数におけるべき和対称関数の係数として，対称群の線型既約表現の指標値が現れる．

(2) Schur 関数は，一般線型群 $\mathbf{GL}(n, \mathbb{C})$ の既約多項式表現の指標を与える．

(3) Schur 関数は，Grassmann 多様体のコホモロジーにおける Schubert 類を表す．

(4) Schur 関数は，KP 階層の多項式解（τ 関数）を与える．

これに対して，Schur の Q 関数は次のような状況で現れる：

(1) Schur の Q 関数におけるべき和対称関数の係数として，対称群の線型既約表現の指標値が現れる (Schur [17])．

(2) Schur の Q 関数は，queer Lie 超代数 $\mathfrak{q}(n, \mathbb{C}) = \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix} : A, B \in M_n(\mathbb{C}) \right\}$ の既約表現の指標を与える (Sergeev [18])．

(3) Schur の Q 関数は，Lagrangian Grassmann 多様体のコホモロジーにおける Schubert 類を表す (Pragacz [16])．

(4) Schur の Q 関数は，BKP 階層の多項式解（τ 関数）を与える (You [20])．

また，Jacobi–Trudi の公式，Giambelli の公式などの Schur 関数に関する等式が行列式を用いて表されるのに対して，Schur の公式，Józefiak–Pragacz の公式などの Schur の P 関数，Q 関数に関する等式はパフィアンを用いて表される．

本稿の第一の目的は，Schur の P 関数，Q 関数に関するいくつかの等式に対して，パフィアンの一般的な公式を利用した見通しのよい証明を与えることである．そして，第二の目的は，斜交 Q 関数（C 型ルート系に付随した Hall–Littlewood 関数において $t=-1$ を代入したもの）について，その性質，予想を紹介することである．

本稿の構成は以下の通りである．第 2 節では，Schur の P 関数，Q 関数に関するいくつかの等式の証明を解説する．第 3 節では，Schur の P 関数，Q 関数や Ivanov の factorial P 関数，Q 関数を含むような一般化された P 関数を導入し，この一般化に対しても Nimmo の公式，Schur の公式，Józefiak–Pragacz の公式がほぼそのままの形で成立することを述べる．第 4 節では，斜交 Q 関数を導入し，組合せ論的表示などの性質を紹介し，構造定数などの正値性に関する予想を与える．また，本稿で用いるパフィアンの公式を付録にまとめておく．

2　Schur の P 関数，Q 関数に関する公式

この節では，パフィアンのさまざまな公式を利用することによって，Schur の P 関数，Q 関数に関するいくつかの等式に見通しの良い証明を与える．

2.1　Nimmo の公式

Nimmo の公式を述べるために，記号を導入する．

定義 2.1. n 個の変数の組 $\boldsymbol{x} = (x_1, \cdots, x_n)$ に対して，

$$A(\boldsymbol{x}) = \left(\frac{x_j - x_i}{x_j + x_i}\right)_{1 \le i, j \le n}, \quad D(\boldsymbol{x}) = \prod_{1 \le i < j \le n} \frac{x_j - x_i}{x_j + x_i}$$

とおく．また，非負整数列 $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_l)$ に対して，

$$V_\alpha(\boldsymbol{x}) = \left(x_i^{\alpha_j}\right)_{1 \le i \le n,\, 1 \le j \le l}, \quad W_\alpha(\boldsymbol{x}) = \left(\chi(\alpha_j) x_i^{\alpha_j}\right)_{1 \le i \le n,\, 1 \le j \le l}$$

とおく．ここで，

$$\chi(r) = \begin{cases} 2 & (r \ge 1 \text{ のとき}), \\ 1 & (r = 0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

である．

定理 2.2. (Nimmo [14, (A12)]) 長さ n 以下のストリクトな分割 λ に対して，

$$P_\lambda(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} \dfrac{1}{D(\boldsymbol{x})} \operatorname{Pf} \begin{pmatrix} A(\boldsymbol{x}) & V_\lambda(\boldsymbol{x}) \\ -{}^t V_\lambda(\boldsymbol{x}) & O \end{pmatrix} & (n + l(\lambda) \text{ が偶数であるとき}), \\ \dfrac{1}{D(\boldsymbol{x})} \operatorname{Pf} \begin{pmatrix} A(\boldsymbol{x}) & V_{\lambda^0}(\boldsymbol{x}) \\ -{}^t V_{\lambda^0}(\boldsymbol{x}) & O \end{pmatrix} & (n + l(\lambda) \text{ が奇数であるとき}), \end{cases} \tag{5}$$

$$Q_\lambda(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} \dfrac{1}{D(\boldsymbol{x})} \operatorname{Pf} \begin{pmatrix} A(\boldsymbol{x}) & W_\lambda(\boldsymbol{x}) \\ -{}^t W_\lambda(\boldsymbol{x}) & O \end{pmatrix} & (n + l(\lambda) \text{ が偶数であるとき}), \\ \dfrac{1}{D(\boldsymbol{x})} \operatorname{Pf} \begin{pmatrix} A(\boldsymbol{x}) & W_{\lambda^0}(\boldsymbol{x}) \\ -{}^t W_{\lambda^0}(\boldsymbol{x}) & O \end{pmatrix} & (n + l(\lambda) \text{ が奇数であるとき}). \end{cases} \tag{6}$$

ここで，$\lambda = (\lambda_1, \cdots, \lambda_{l(\lambda)})$, $\lambda^0 = (\lambda_1, \cdots, \lambda_{l(\lambda)}, 0)$ である．

n が偶数であるとき $D(\boldsymbol{x}) = \operatorname{Pf} A(\boldsymbol{x})$（Schur のパフィアン (27)）であり，Nimmo の公式は Schur 関数の行列式の比による定義 (3) の Schur の Q 関数版と見なすことができる．

証明. （この証明は [14] の証明と同じである．）λ をストリクトな分割とし，$l = l(\lambda)$ とおく．このとき，$\mathfrak{S}_{n,\lambda} = \mathfrak{S}_{n-l}$ であり，[10, Theorem 2.8] より

$$\sum_{w \in \mathfrak{S}_{n-l}} w \left(\prod_{l+1 \le i < j \le n} \frac{x_i - t x_j}{x_i - x_j} \right) = \mathfrak{S}_{n-l}(t)$$

である．よって，

$$P_\lambda(\boldsymbol{x};t)=\sum_{w\in\mathfrak{S}_n/\mathfrak{S}_{n-l}} w\left(\prod_{i=1}^{l} x_i^{\lambda_i}\prod_{1\le i<j\le n}\frac{x_i-tx_j}{x_i-x_j}\Bigg/\prod_{l+1\le i<j\le n}\frac{x_i-tx_j}{x_i-x_j}\right).$$

$D(\boldsymbol{x})$ が $wD(\boldsymbol{x})=\mathrm{sgn}(w)D(\boldsymbol{x})$ $(w\in\mathfrak{S}_n)$ をみたすことに注意すると，

$$\begin{aligned}P_\lambda(\boldsymbol{x})&=\frac{1}{D(\boldsymbol{x})}\sum_{w\in\mathfrak{S}_n/\mathfrak{S}_{n-l}}\mathrm{sgn}(w)w\left(\prod_{i=1}^{l}x_i^{\lambda_i}\prod_{l+1\le i<j\le n}\frac{x_i-x_i}{x_i+x_j}\right)\\&=\frac{1}{D(\boldsymbol{x})}\sum_{w\in\mathfrak{S}_n/(\mathfrak{S}_l\times\mathfrak{S}_{n-l})}\mathrm{sgn}(w)w\left(\det\left(x_i^{\lambda_j}\right)_{1\le i,j\le l}\prod_{l+1\le i<j\le n}\frac{x_i-x_i}{x_i+x_j}\right).\end{aligned}$$

よって，$n-l$ が偶数であるときは，$(x_{l+1},\cdots,x_n)$ に対する Schur のパフィアン (27) を用いると，

$$P_\lambda(\boldsymbol{x})=\frac{1}{D(\boldsymbol{x})}\sum_{w\in\mathfrak{S}_n/(\mathfrak{S}_l\times\mathfrak{S}_{n-l})}\mathrm{sgn}(w)w\Big(\det V_\lambda(x_1,\cdots,x_l)\,\mathrm{Pf}\,A(x_{l+1},\cdots,x_n)\Big)$$

と書き直すことができる．また，$n-l$ が奇数であるときは，$(x_{l+1},\cdots,x_n,0)$ に対して (27) を用いると，

$$P_\lambda(\boldsymbol{x})=\frac{1}{D(\boldsymbol{x})}\sum_{w\in\mathfrak{S}_n/(\mathfrak{S}_l\times\mathfrak{S}_{n-l})}\mathrm{sgn}(w)w\left(\det V_\lambda(x_1,\cdots,x_l)\,\mathrm{Pf}\begin{pmatrix}A(x_{l+1},\cdots,x_n)&\mathbf{1}\\-{}^t\mathbf{1}&0\end{pmatrix}\right)$$

（ここで，$\mathbf{1}$ は成分がすべて 1 の縦ベクトルである）と書き直すことができる．従って，パフィアンの展開公式 (30) を用いることにより，求める結論が得られる．　□

Nimmo の公式（定理 2.2）を用いると，次の安定性が示される．

命題 2.3. 長さ $n+1$ 以下のストリクトな分割 λ に対して，

$$Q_\lambda(x_1,\cdots,x_n,0)=\begin{cases}Q_\lambda(x_1,\cdots,x_n) & (l(\lambda)\le n\text{ のとき}),\\ 0 & (l(\lambda)=n+1\text{ のとき}).\end{cases}$$

証明. Nimmo の公式 (6) より，

$$\begin{aligned}&Q_\lambda(\boldsymbol{x},0)\\&=\begin{cases}\dfrac{1}{D(\boldsymbol{x},0)}\,\mathrm{Pf}\begin{pmatrix}A(\boldsymbol{x})&-\mathbf{1}&W_\lambda(\boldsymbol{x})\\{}^t\mathbf{1}&0&{}^t\mathbf{0}\\-{}^tW_\lambda(\boldsymbol{x})&\mathbf{0}&O\end{pmatrix} & ((n+1)+l(\lambda)\text{ が偶数であるとき}),\\[2ex]\dfrac{1}{D(\boldsymbol{x},0)}\,\mathrm{Pf}\begin{pmatrix}A(\boldsymbol{x})&-\mathbf{1}&W_\lambda(\boldsymbol{x})&\mathbf{1}\\{}^t\mathbf{1}&0&{}^t\mathbf{0}&1\\-{}^tW_\lambda(\boldsymbol{x})&\mathbf{0}&O&\mathbf{0}\\-{}^t\mathbf{1}&1&{}^t\mathbf{0}&0\end{pmatrix} & ((n+1)+l(\lambda)\text{ が奇数であるとき}).\end{cases}\end{aligned}$$

よって，パフィアンの交代性，多重線型性（と $n+1+l(\lambda)$ が奇数であるときは展開公式 (29)）を用い，Nimmo の公式 (6) と比較すると，求める結論が得られる．　□

2.2 Schur の公式

一旦 Nimmo の公式が得られると，パフィアンに関する一般的な公式を適用することによって，Schur の P 関数，Q 関数に関する等式を導くことが可能になる．

Schur [17, Abschnitt IV] は，次の 3 段階で Schur の Q 関数 $Q_\lambda(\boldsymbol{x})$ を定義している：

(1) まず，長さ 1 の分割については，$Q_{(r)}(\boldsymbol{x}) = q_r(\boldsymbol{x})$ の母関数を与える．

(2) 次に，長さ 2 の分割については，$Q_{(r,s)}(\boldsymbol{x})$ を $q_k(\boldsymbol{x})$ $(k \geq 0)$ の 2 次式として定義する．

(3) 最後に，一般のストリクトな分割 λ については，$Q_\lambda(\boldsymbol{x})$ を $Q_{(r,s)}(\boldsymbol{x})$ $(r,\, s \geq 0)$ を成分とする交代行列のパフィアンとして定める．

ここでは，Nimmo の公式から Schur のこの定義が復元できることを示す．証明のために，

$$\sum_{r \geq 0} \chi(r) x_i^r z^r = \frac{1 + x_i z}{1 - x_i z} \tag{7}$$

であることに注意する．

命題 2.4. (Schur [17])

(1) $Q_{(0)}(\boldsymbol{x}) = Q_\emptyset(\boldsymbol{x}) = 1$ と定義すると，

$$\sum_{r \geq 0} Q_{(r)}(\boldsymbol{x}) z^r = \prod_{i=1}^{n} \frac{1 + x_i z}{1 - x_i z}. \tag{8}$$

(2) $Q_{(0,0)}(\boldsymbol{x}) = 0$ とし，正整数 $r,\, s$ に対して

$$Q_{(r,s)}(\boldsymbol{x}) = -Q_{(s,r)}(\boldsymbol{x}), \quad Q_{(r,0)}(\boldsymbol{x}) = -Q_{(0,r)}(\boldsymbol{x}) = Q_{(r)}(\boldsymbol{x})$$

となるように $Q_{(r,s)}(\boldsymbol{x})$ の定義を非負整数の組 (r, s) に対して拡張しておく．このとき，

$$\sum_{r,s \geq 0} Q_{(r,s)}(\boldsymbol{x}) z^r w^s = \frac{z - w}{z + w} \left(\prod_{i=1}^{n} \frac{1 + x_i z}{1 - x_i z} \prod_{i=1}^{n} \frac{1 + x_i w}{1 - x_i w} - 1 \right). \tag{9}$$

特に，$r > s > 0$ であるとき，

$$Q_{(r,s)}(\boldsymbol{x}) = Q_{(r)}(\boldsymbol{x}) Q_{(s)}(\boldsymbol{x}) + 2 \sum_{i=1}^{s} (-1)^i Q_{(r+i)}(\boldsymbol{x}) Q_{(s-i)}(\boldsymbol{x}).$$

証明. (1) 命題 2.3 により n は奇数であるとしてよい．このとき，Nimmo の公式 (6) とパフィアンの多重線型性を用いると，(7) により，

$$\sum_{r \geq 0} Q_{(r)}(\boldsymbol{x}) z^r = \frac{1}{D(\boldsymbol{x})} \operatorname{Pf} \left(\begin{array}{c|c} \left(\dfrac{x_j - x_i}{x_j + x_i} \right)_{1 \leq i,\, j \leq n} & \left(\dfrac{1 + x_i z}{1 - x_i z} \right)_{1 \leq i \leq n} \\ \hline -{}^t\left(\dfrac{1 + x_i z}{1 - x_i z} \right)_{1 \leq i \leq n} & 0 \end{array} \right).$$

よって，Schur のパフィアン (27) を $(x_1, \cdots, x_n, -1/z)$ に対して適用すると，(1) が得られる．

(2) 命題 2.3 により n は偶数であるとしてよい．このとき，Nimmo の公式 (6) とパフィアンの多重線型性を用いると，(7) により，

$$\sum_{r,s\geq 0} Q_{(r,s)}(\boldsymbol{x}) z^r w^s$$

$$= \frac{1}{D(\boldsymbol{x})} \operatorname{Pf} \left(\begin{array}{c|c|c} \left(\dfrac{x_j - x_i}{x_j + x_i}\right)_{1\leq i,j\leq n} & \left(\dfrac{1 + x_i z}{1 - x_i z}\right)_{1\leq i\leq n} & \left(\dfrac{1 + x_i w}{1 - x_i w}\right)_{1\leq i\leq n} \\ \hline -{}^t\left(\dfrac{1 + x_i z}{1 - x_i z}\right)_{1\leq i\leq n} & 0 & 0 \\ \hline -{}^t\left(\dfrac{1 + x_i w}{1 - x_i w}\right)_{1\leq i\leq n} & 0 & 0 \end{array} \right).$$

よって，(27) を $(x_1, \cdots, x_n, -1/z, -1/w)$ に対して適用したものと比較すると，(2) が得られる． □

定理 2.5. (Schur [17]) 非負整数列 $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_l)$ に対して，

$$S_\alpha(\boldsymbol{x}) = \left(Q_{(\alpha_i,\alpha_j)}(\boldsymbol{x})\right)_{1\leq i,j\leq l} \tag{10}$$

と定義する．このとき，長さ n 以下のストリクトな分割 λ に対して，

$$Q_\lambda(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} \operatorname{Pf} S_\lambda(\boldsymbol{x}) & (l(\lambda) \text{ が偶数であるとき}), \\ \operatorname{Pf} S_{\lambda^0}(\boldsymbol{x}) & (l(\lambda) \text{ が奇数であるとき}). \end{cases} \tag{11}$$

証明. 命題 2.3 により n は偶数であるとしてよい．このとき，パフィアン版 Sylvester の公式 (31) を

$$X = \begin{cases} \begin{pmatrix} A(\boldsymbol{x}) & W_\lambda(\boldsymbol{x}) \\ -{}^tW_\lambda(\boldsymbol{x}) & O \end{pmatrix} & (l(\lambda) \text{ が偶数であるとき}), \\ \begin{pmatrix} A(\boldsymbol{x}) & W_{\lambda^0}(\boldsymbol{x}) \\ -{}^tW_{\lambda^0}(\boldsymbol{x}) & O \end{pmatrix} & (l(\lambda) \text{ が奇数であるとき}) \end{cases}$$

に対して適用すればよい． □

2.3 Pieri 型の公式

次に，一般の Schur の P 関数に 1 行の分割に対応する Q 関数を掛けたときの分解を与える Pieri 型の公式を示す．

定理 2.6. (Morris [13, Theorem 1]) 長さ n 以下のストリクトな分割 μ と正整数 r に対して，

$$P_\mu(\boldsymbol{x}) Q_{(r)}(\boldsymbol{x}) = \sum_\lambda 2^{a(\lambda,\mu)} P_\lambda(\boldsymbol{x}).$$

ここで，和は $\lambda_1 \geq \mu_1 \geq \lambda_2 \geq \mu_2 \geq \cdots$, $|\lambda| = |\mu| + r$ をみたす長さ n 以下のストリクトな分割 λ 全体をわたり，$a(\lambda, \mu) = \#\{i : \lambda_i > \mu_i > \lambda_{i+1}\}$ である．

証明. $l=l(\mu)$ とおく．命題 2.3 により $n+l$ は奇数であるとしてよい．$Q_{(r)}(\boldsymbol{x})$ の母関数 (8) と Hall–Littlewood 関数の定義 (1) を用いると，

$$P_\mu(\boldsymbol{x})\sum_{r=0}^{\infty}Q_{(r)}(\boldsymbol{x})z^r=\frac{1}{\mathfrak{S}_{n,\mu}(t)}\sum_{w\in\mathfrak{S}_n}w\left(\prod_{i=1}^{n}\left(x_i^{\mu_i}\frac{1+x_iz}{1-x_iz}\right)\prod_{1\le i<j\le n}\frac{x_i-tx_j}{x_i-x_j}\right).$$

Nimmo の公式（定理 2.2）の証明と同様の議論により，

$$\begin{aligned}&P_\mu(\boldsymbol{x})\sum_{r=0}^{\infty}Q_{(r)}(\boldsymbol{x})z^r\\&=\frac{1}{D(\boldsymbol{x})}\sum_{w\in\mathfrak{S}_n/(\mathfrak{S}_L\times\mathfrak{S}_{n-l})}\operatorname{sgn}(w)w\left(\det\left(x_i^{\mu_j}\frac{1+x_iz}{1-x_iz}\right)_{1\le i,\,j\le l}\prod_{i=l+1}^{n}\frac{1+x_iz}{1-x_iz}\prod_{l+1\le i,\,j\le n}\frac{x_i-x_j}{x_i+x_j}\right).\end{aligned}$$

ここで，(27) を $(x_{l+1},\cdots,x_n,-1/z)$ に対して適用すると，

$$\prod_{i=l+1}^{n}\frac{1+x_iz}{1-x_iz}\prod_{l+1\le i,\,j\le n}\frac{x_j-x_i}{x_j+x_i}=\operatorname{Pf}\left(\begin{array}{c|c}\left(\dfrac{x_j-x_i}{x_j+x_i}\right)_{l+1\le i,\,j\le n}&\left(\dfrac{1+x_iz}{1-x_iz}\right)_{l+1\le i\le n}\\\hline -{}^t\left(\dfrac{1+x_iz}{1-x_iz}\right)_{l+1\le i\le n}&0\end{array}\right)$$

と表されるから，

$$\begin{aligned}&P_\mu(\boldsymbol{x})\sum_{r=0}^{\infty}Q_{(r)}(\boldsymbol{x})z^r\\&=\frac{1}{D(\boldsymbol{x})}\sum_{w\in\mathfrak{S}_n/(\mathfrak{S}_l\times\mathfrak{S}_{n-l})}\operatorname{sgn}(w)w\left(\begin{array}{l}\det\widetilde{V}_\mu(x_1,\cdots,x_l;z)\\\times\operatorname{Pf}\begin{pmatrix}A(x_{l+1},\cdots,x_n)&\widetilde{V}_{(0)}(x_{l+1},\cdots,x_n;z)\\-{}^t\widetilde{V}_{(0)}(x_{l+1},\cdots,x_n;z)&0\end{pmatrix}\end{array}\right).\end{aligned}$$

ここで，$\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_l)$ に対して，

$$\widetilde{V}_\alpha(\boldsymbol{x};z)=\left(x_i^{\alpha_j}\frac{1+x_iz}{1-x_iz}\right)_{1\le i\le n,\,1\le j\le l}$$

とおいた．従って，パフィアンの展開公式 (30) を用いると，

$$P_\mu(\boldsymbol{x})\sum_{r=0}^{\infty}Q_{(r)}(\boldsymbol{x})z^r=\frac{1}{D(\boldsymbol{x})}\operatorname{Pf}\begin{pmatrix}A(\boldsymbol{x})&\widetilde{V}_{\mu^0}(\boldsymbol{x};z)\\-{}^t\widetilde{V}_{\mu^0}(\boldsymbol{x};z)&O\end{pmatrix}$$

となることがわかる．後は，パフィアンの多重線型性を用いることによって結論を導くことができる． □

2.4 Cauchy 型の公式

定理 2.7. (Schur [17]) 変数 $\boldsymbol{x}=(x_1,\cdots,x_n)$, $\boldsymbol{y}=(y_1,\cdots,y_n)$ に対して,

$$\sum_\lambda P_\lambda(\boldsymbol{x})Q_\lambda(\boldsymbol{y})=\sum_\lambda \frac{1}{2^{l(\lambda)}}Q_\lambda(\boldsymbol{x})Q_\lambda(\boldsymbol{y})=\prod_{i,j=1}^n \frac{1+x_iy_j}{1-x_iy_j}. \tag{12}$$

ここで, λ は長さ n 以下のストリクトな分割全体を動く.

証明. パフィアン版 Cauchy–Binet の公式 (33) を

$$A=A(\boldsymbol{x}),\quad S=\left(x_i^j\right)_{1\le i\le n,\, j\ge 0},\quad B=A(\boldsymbol{y}),\quad T=\left(\chi(j)y_i^j\right)_{1\le i\le n,\, j\ge 0}$$

に対して適用する. n が偶数［あるいは奇数］であるとき, ストリクトな分割と偶数個［奇数個］の元からなる非負整数の集合は対応

$$\lambda\longmapsto\begin{cases}\{\lambda_1,\cdots,\lambda_{l(\lambda)}\} & (l(\lambda)\text{ が偶数［奇数］であるとき}),\\ \{\lambda_1,\cdots,\lambda_{l(\lambda)},0\} & (l(\lambda)\text{ が奇数［偶数］であるとき})\end{cases}$$

によって 1 対 1 に対応しているから, (6), (33) を用いると,

$$\sum_\lambda P_\lambda(\boldsymbol{x})Q_\lambda(\boldsymbol{y})=\frac{(-1)^{\binom{n}{2}}}{D(\boldsymbol{x})D(\boldsymbol{y})}\mathrm{Pf}\left(\begin{array}{c|c}\left(\dfrac{x_j-x_i}{x_j+x_i}\right)_{1\le i,\,j\le n} & \left(\dfrac{1+x_iy_j}{1-x_iy_j}\right)_{1\le i,\,j\le n}\\ \hline -{}^t\!\left(\dfrac{1+x_iy_j}{1-x_iy_j}\right)_{1\le i,\,j\le n} & -\left(\dfrac{y_j-x_i}{y_j+y_i}\right)_{1\le i,\,j\le n}\end{array}\right).$$

このパフィアンは, (27) を $(x_1,\cdots,x_n,-1/y_1,\cdots,-1/y_n)$ に対して適用することによって, 積の形に表すことができ, 求める結論が得られる. □

2.5 Józefiak–Pragacz の公式

ここでは, 歪 Q 関数をパフィアンで表す Józefiak–Pragacz の公式を証明する.

定義 2.8. 非負整数列 $\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_l)$, $\beta=(\beta_1,\cdots,\beta_m)$ に対して,

$$M_{\alpha/\beta}(\boldsymbol{x})=\left(Q_{(\alpha_i-\beta_{m+1-j})}(\boldsymbol{x})\right)_{1\le i\le l,\,1\le j\le m} \tag{13}$$

とおく. ただし, $r<0$ のときは $Q_{(r)}(\boldsymbol{x})=0$ であると約束する. 分割 λ,μ に対して, **歪 Q 関数** $Q_{\lambda/\mu}(\boldsymbol{x})$ を

$$Q_{\lambda/\mu}(\boldsymbol{x})=\begin{cases}\mathrm{Pf}\begin{pmatrix}S_\lambda(\boldsymbol{x}) & M_{\lambda/\mu}(\boldsymbol{x})\\ -{}^tM_{\lambda/\mu}(\boldsymbol{x}) & O\end{pmatrix} & (l(\lambda)+l(\mu)\text{ が偶数であるとき}),\\ \mathrm{Pf}\begin{pmatrix}S_\lambda(\boldsymbol{x}) & M_{\lambda/\mu^0}(\boldsymbol{x})\\ -{}^tM_{\lambda/\mu^0}(\boldsymbol{x}) & O\end{pmatrix} & (l(\lambda)+l(\mu)\text{ が奇数であるとき})\end{cases} \tag{14}$$

によって定義する.

注意. $\lambda \not\supset \mu$（つまり，任意の $i \geq 1$ に対して $\lambda_i \geq \mu_i$）でないときは，$Q_{\lambda/\mu}(\boldsymbol{x}) = 0$ である．

定理 2.9. (Józefiak–Pragacz [6]) ストリクトな分割 λ と変数 $\boldsymbol{x} = (x_1, \cdots, x_n)$, $\boldsymbol{y} = (y_1, \cdots, y_k)$ に対して，

$$Q_\lambda(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sum_\mu Q_{\lambda/\mu}(\boldsymbol{x}) Q_\mu(\boldsymbol{y}). \tag{15}$$

ここで，μ はストリクトな分割全体を動く．

証明. $l = l(\lambda)$ とおく．命題 2.3 により $l + k$ は偶数であると仮定してよい．このとき，パフィアン版 Cauchy–Binet の公式 (32) を

$$A = S_\lambda(\boldsymbol{x}), \quad S = \Big(Q_{(\lambda_i - j)}(\boldsymbol{x})\Big)_{1 \leq i \leq l,\, j \geq 0}, \quad B = A(\boldsymbol{y}), \quad T = \Big(\chi(j) y_i^j\Big)_{1 \leq i \leq k,\, j \geq 0}$$

に対して適用する．このとき，(8) を用いると，$S {}^t T$ の (i, j) 成分が

$$\sum_{k=0}^{\lambda_i} Q_{(\lambda_i - k)}(\boldsymbol{x}) \cdot \chi(k) y_j^k = Q_{(\lambda_i)}(\boldsymbol{x}, y_j)$$

となることがわかるから，(6), (32) を用いると，

$$\sum_\mu Q_{\lambda/\mu}(\boldsymbol{x}) Q_\mu(\boldsymbol{y})$$

$$= \frac{1}{D(\boldsymbol{y})} \mathrm{Pf} \left(\begin{array}{c|c} \Big(Q_{(\lambda_i, \lambda_j)}(\boldsymbol{x})\Big)_{1 \leq i, j \leq l} & \Big(Q_{(\lambda_i)}(\boldsymbol{x}, y_j)\Big)_{1 \leq i \leq l, 1 \leq j \leq k} \\ \hline -{}^t\Big(Q_{(\lambda_i)}(\boldsymbol{x}, y_j)\Big)_{1 \leq i \leq l, 1 \leq j \leq k} & \left(\dfrac{y_j - y_i}{y_j + y_i}\right)_{1 \leq i, j \leq k} \end{array} \right).$$

よって，次の定理が示されればよい． □

定理 2.10. 変数 $\boldsymbol{x} = (x_1, \cdots, x_n)$, $\boldsymbol{y} = (y_1, \cdots, y_k)$ を考え，非負整数列 $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_l)$ に対して，

$$N_\alpha(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{y}) = \Big(Q_{(\alpha_i)}(\boldsymbol{x}, y_j)\Big)_{1 \leq i \leq l, 1 \leq j \leq k}$$

とおく．このとき，ストリクトな分割 λ に対して，

$$Q_\lambda(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \begin{cases} \dfrac{1}{D(\boldsymbol{y})} \mathrm{Pf} \begin{pmatrix} S_\lambda(\boldsymbol{x}) & N_\lambda(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{y}) \\ -{}^t N_\lambda(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{y}) & A(\boldsymbol{y}) \end{pmatrix} & (l(\lambda) + k \text{ が偶数であるとき}), \\ \dfrac{1}{D(\boldsymbol{y})} \mathrm{Pf} \begin{pmatrix} S_{\lambda^0}(\boldsymbol{x}) & N_{\lambda^0}(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{y}) \\ -{}^t N_{\lambda^0}(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{y}) & A(\boldsymbol{y}) \end{pmatrix} & (l(\lambda) + k \text{ が奇数であるとき}). \end{cases} \tag{16}$$

この定理において，$n = 0$ の場合（変数 $\boldsymbol{x}$ がないとき）が Nimmo の公式 (6) であり，$k = 0$ の場合（変数 $\boldsymbol{y}$ がないとき）が Schur の公式 (11) である．

証明. 示すべき等式 (16) の右辺を $Q'_\lambda(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{y})$ とおくと，パフィアン版 Sylvester の公式 (31) から

$$Q'_\lambda(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{y}) = \mathrm{Pf}\left(Q'_{(\lambda_i,\lambda_j)}(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{y})\right)_{1\le i,j\le r}$$

（ここで，$l(\lambda)$ が偶数のときは $r = l(\lambda)$，奇数のときは $r = l(\lambda)+1$ である）となることがわかる．よって，$Q'_{(r)}(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{y}) = Q_{(r)}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$, $Q'_{(r,s)}(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{y}) = Q_{(r,s)}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ となることを示せばよい．そのために，$Q'_{(r)}(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{y})$, $Q'_{(r,s)}(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{y})$ が命題 2.4 (1), (2) と同じ形の母関数をもつことを示す．例えば，k が奇数であるとき，

$$\sum_{r\ge 0} Q'_{(r)}(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{y}) z^r$$
$$= \frac{1}{D(\boldsymbol{y})}\,\mathrm{Pf}\left(\begin{array}{c|c} 0 & {}^t\!\left(\displaystyle\prod_{i=1}^n \frac{1+x_i z}{1-x_i z}\cdot\frac{1+y_j z}{1-y_j z}\right)_{1\le j\le k} \\ \hline \left(\displaystyle\prod_{i=1}^n \frac{1+x_i z}{1-x_i z}\cdot\frac{1+y_j z}{1-y_j z}\right)_{1\le j\le k} & \left(\dfrac{y_j-y_i}{y_j+y_i}\right)_{1\le i,j\le k}\end{array}\right).$$

ここで，パフィアンの多重線型性を用い，(27) を $(-1/z, y_1, \cdots, y_k)$ に対して適用すると，

$$\sum_{r\ge 0} Q'_{(r)}(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{y}) z^r = \prod_{i=1}^n \frac{1+x_i z}{1-x_i z}\prod_{j=1}^k \frac{1+y_j z}{1-y_j z} = \sum_{r\ge 0} Q_{(r)}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) z^r$$

となることがわかる．他も同様である． □

3 一般化された P 関数

前節で与えた Schur の P 関数，Q 関数の等式の証明をよく見ると，Hall–Littlewood 関数の定義 (1) の因子や Nimmo の公式 (5), (6) の右上ブロック $V_\alpha(\boldsymbol{x})$, $W_\alpha(\boldsymbol{x})$ の成分が単項式であることは本質的ではない．そこで，次のような一般化が考えられる．

定義 3.1. 1 変数多項式の列 $\mathcal{G} = \{g_d(u)\}_{d=0}^\infty$ で

$$g_0(u) = 1, \quad \deg g_d(u) = d \quad (d \ge 1)$$

をみたすものと，長さ n 以下の分割 λ が与えられたとき，

$$P_\lambda^{\mathcal{G}}(\boldsymbol{x};t) = \frac{1}{\mathfrak{S}_{n,\lambda}(t)}\sum_{w\in\mathfrak{S}_n} w\left(\prod_{i=1}^n g_{\lambda_i}(x_i)\prod_{1\le i<j\le n}\frac{x_i - t x_j}{x_i - x_j}\right) \tag{17}$$

とおき，**$\mathcal{G}$ に付随した Hall–Littlewood 関数**と呼ぶ．また，ストリクトな分割 λ に対して，

$$P_\lambda^{\mathcal{G}}(\boldsymbol{x}) = P_\lambda^{\mathcal{G}}(\boldsymbol{x};-1) \tag{18}$$

とおき，**$\mathcal{G}$ に付随した P 関数**と呼ぶ．

この一般化は，次のように Schur の P 関数，Q 関数，Ivanov の factorial P 関数，Q 関数（[4, 5] を見よ）を含んでいる．

例 3.2. (1) 多項式列 $\mathcal{G}$ が $g_d(u) = u^d$ $(d \geq 1)$ で与えられるとき，$P^{\mathcal{G}}_{\lambda}(\boldsymbol{x})$ は Schur の P 関数である．

(2) 多項式列 $\mathcal{G}$ が $g_d(u) = 2u^d$ $(d \geq 1)$ で与えられるとき，$P^{\mathcal{G}}_{\lambda}(\boldsymbol{x})$ は Schur の Q 関数である．

(3) 多項式列 $\mathcal{G}$ が $g_d(u) = (u|\boldsymbol{a})^d = \prod_{i=0}^{d-1}(u + a_i)$ $(d \geq 1)$ で与えられるとき，$P^{\mathcal{G}}_{\lambda}(\boldsymbol{x})$ は Ivanov の factorial P 関数である．

(4) 多項式列 $\mathcal{G}$ が $g_d(u) = 2(u|\boldsymbol{a})^d = 2\prod_{i=0}^{d-1}(u+a_i)$ $(d \geq 1)$ で与えられるとき，$P^{\mathcal{G}}_{\lambda}(\boldsymbol{x})$ は Ivanov の factorial Q 関数である．

また，次の節（命題 4.3）で見るように，C 型ルート系に付随した P 関数，Q 関数も含まれている．

前節の証明をほぼ踏襲することにより，次の定理が示される．(厳密には，命題 2.3 の安定性が成り立たないので，偶奇による場合分けとそれぞれの場合での証明が必要となる．また，一般には母関数 $\sum_{r\geq 0} g_r(u)z^r$ が因数分解しないので，Schur のパフィアン (27) が利用できなくなり証明はやや複雑になる.）

定理 3.3. （Nimmo 型の公式）非負整数列 $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_l)$ に対して，

$$V^{\mathcal{G}}_{\alpha}(\boldsymbol{x}) = \Big(g_{\alpha_j}(x_i)\Big)_{1\leq i\leq n,\, 1\leq j\leq l}$$

とおく．このとき，長さ n 以下のストリクトな分割 λ に対して，

$$P^{\mathcal{G}}_{\lambda}(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} \dfrac{1}{D(\boldsymbol{x})} \operatorname{Pf}\begin{pmatrix} A(\boldsymbol{x}) & V^{\mathcal{G}}_{\lambda}(\boldsymbol{x}) \\ -{}^t V^{\mathcal{G}}_{\lambda}(\boldsymbol{x}) & O \end{pmatrix} & (n + l(\lambda) \text{ が偶数であるとき}), \\ \dfrac{1}{D(\boldsymbol{x})} \operatorname{Pf}\begin{pmatrix} A(\boldsymbol{x}) & V^{\mathcal{G}}_{\lambda^0}(\boldsymbol{x}) \\ -{}^t V^{\mathcal{G}}_{\lambda^0}(\boldsymbol{x}) & O \end{pmatrix} & (n + l(\lambda) \text{ が奇数であるとき}). \end{cases}$$

定理 3.4. （Schur 型の公式）非負整数列 $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_l)$ に対して，

$$S^{\mathcal{G}}_{\alpha}(\boldsymbol{x}) = \Big(P^{\mathcal{G}}_{(\alpha_i,\alpha_j)}(\boldsymbol{x})\Big)_{1\leq i,\, j\leq l}$$

とおく．このとき，長さ n 以下のストリクトな分割 λ に対して，

$$P^{\mathcal{G}}_{\lambda}(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} \operatorname{Pf} S^{\mathcal{G}}_{\lambda}(\boldsymbol{x}) & (l(\lambda) \text{ が偶数であるとき}), \\ \operatorname{Pf} S^{\mathcal{G}}_{\lambda^0}(\boldsymbol{x}) & (l(\lambda) \text{ が奇数であるとき}). \end{cases}$$

一般の $\mathcal{G}$ に付随した歪 Q 関数の定義には少し工夫が必要である．

定義 3.5. 非負整数 r, k に対して，$P^{\mathcal{G}}_{r/k}(\boldsymbol{x}) = P^{\mathcal{G}}_{r/k}(x_1, \cdots, x_n)$ を

$$P^{\mathcal{G}}_{(r)}(x_1, \cdots, x_n, u) = \sum_{k=0}^{\infty} P^{\mathcal{G}}_{r/k}(x_1, \cdots, x_n) g_k(u)$$

によって定義する．（$0 \leq k \leq r$ でなければ $P^{\mathcal{G}}_{r/k}(\boldsymbol{x}) = 0$ である．）非負整数列 $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_l)$, $\beta = (\beta_1, \cdots, \beta_m)$ に対して，

$$M^{\mathcal{G}}_{\alpha/\beta}(\boldsymbol{x}) = \left(P^{\mathcal{G}}_{\alpha_i/\beta_{m+1-j}}(\boldsymbol{x})\right)_{1\leq i\leq l,\,1\leq j\leq m}$$

とおく．そして，ストリクトな分割 λ, μ と非負整数 k に対して，**$\mathcal{G}$ に付随した歪 $\boldsymbol{P}$ 関数** $P^{\mathcal{G}}_{\lambda/\mu,k}(\boldsymbol{x})$ を

$$P^{\mathcal{G}}_{\lambda/\mu,k}(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} \mathrm{Pf}\begin{pmatrix} S^{\mathcal{G}}_{\lambda}(\boldsymbol{x}) & M^{\mathcal{G}}_{\lambda/\mu}(\boldsymbol{x}) \\ -{}^tM^{\mathcal{G}}_{\lambda/\mu}(\boldsymbol{x}) & O \end{pmatrix} & (l(\lambda) \equiv k,\, l(\mu) \equiv k \bmod 2 \text{ であるとき}), \\ \mathrm{Pf}\begin{pmatrix} S^{\mathcal{G}}_{\lambda}(\boldsymbol{x}) & M^{\mathcal{G}}_{\lambda/\mu^0}(\boldsymbol{x}) \\ -{}^tM_{\lambda/\mu^0}(\boldsymbol{x}) & O \end{pmatrix} & (l(\lambda) \equiv k,\, l(\mu) \not\equiv k \bmod 2 \text{ であるとき}), \\ \mathrm{Pf}\begin{pmatrix} S^{\mathcal{G}}_{\lambda^0}(\boldsymbol{x}) & M^{\mathcal{G}}_{\lambda^0/\mu}(\boldsymbol{x}) \\ -{}^tM^{\mathcal{G}}_{\lambda^0/\mu}(\boldsymbol{x}) & O \end{pmatrix} & (l(\lambda) \not\equiv k,\, l(\mu) \equiv k \bmod 2 \text{ であるとき}), \\ \mathrm{Pf}\begin{pmatrix} S^{\mathcal{G}}_{\lambda^0}(\boldsymbol{x}) & M^{\mathcal{G}}_{\lambda^0/\mu^0}(\boldsymbol{x}) \\ -{}^tM^{\mathcal{G}}_{\lambda^0/\mu^0}(\boldsymbol{x}) & O \end{pmatrix} & (l(\lambda) \not\equiv k,\, l(\mu) \not\equiv k \bmod 2 \text{ であるとき}) \end{cases}$$

によって定義する．

注意. 一般には，$P^{\mathcal{G}}_{r/k}(\boldsymbol{x}) \neq P^{\mathcal{G}}_{r-k}(\boldsymbol{x})$ であり，$P^{\mathcal{G}}_{\lambda/\emptyset}(\boldsymbol{x}) \neq P^{\mathcal{G}}_{\lambda}(\boldsymbol{x})$ である．また，多項式列 $\mathcal{G}$ が $g_d(0) = 0$ $(d \geq 1)$ をみたしているならば，k によらずに

$$P^{\mathcal{G}}_{\lambda/\mu,k}(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} \mathrm{Pf}\begin{pmatrix} S^{\mathcal{G}}_{\lambda}(\boldsymbol{x}) & M^{\mathcal{G}}_{\lambda/\mu}(\boldsymbol{x}) \\ -{}^tM^{\mathcal{G}}_{\lambda/\mu}(\boldsymbol{x}) & O \end{pmatrix} & (l(\lambda)+l(\mu) \text{ が偶数であるとき}), \\ \mathrm{Pf}\begin{pmatrix} S^{\mathcal{G}}_{\lambda}(\boldsymbol{x}) & M^{\mathcal{G}}_{\lambda/\mu^0}(\boldsymbol{x}) \\ -{}^tM^{\mathcal{G}}_{\lambda/\mu^0}(\boldsymbol{x}) & O \end{pmatrix} & (l(\lambda)+l(\mu) \text{ が奇数であるとき}) \end{cases}$$

となる．

定理 3.6. （Józefiak–Pragacz 型の公式）ストリクトな分割 λ と変数 $\boldsymbol{x} = (x_1, \cdots, x_n)$, $\boldsymbol{y} = (y_1, \cdots, y_k)$ に対して，

$$P^{\mathcal{G}}_{\lambda}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sum_{\mu} P^{\mathcal{G}}_{\lambda/\mu,k}(\boldsymbol{x}) P^{\mathcal{G}}_{\mu}(\boldsymbol{y}).$$

ここで，μ はストリクトな分割全体をわたる．

4　斜交 Q 関数

この節では，C_n 型ルート系に付随した Hall–Littlewood 関数において $t = -1$ を代入したものを考える．

4.1　斜交 Q 関数

Hall–Littlewood 関数は，一般のルート系に対しても定義される.（例えば，[12, §10] を見よ.）ここでは，C_n 型ルート系に付随した Hall–Littlewood 関数を考える．Euclid 空間 $\mathbb{R}^n$ の標準基底（正規直交基底）を $e_1, \cdots, e_n$ とするとき，C_n 型ルート系 Δ とその正ルート系 Δ^+ はそれぞれ

$$\begin{gathered}\Delta = \{\pm(e_i \pm e_j) : 1 \le i < j \le n\} \cup \{\pm 2e_i : 1 \le i \le n\},\\ \Delta^+ = \{e_i \pm e_j : 1 \le i < j \le n\} \cup \{2e_i : 1 \le i \le n\}\end{gathered}$$

で与えられる．また，対応する Weyl 群を W とすると，$W \cong \mathfrak{S}_n \ltimes (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n$ である．

定義 4.1. 長さ n 以下の分割 λ に対して，

$$P_{\langle\lambda\rangle}(\boldsymbol{x};t) = \frac{1}{W_\lambda(t)} \sum_{w \in W} w \left(\prod_{i=1}^n x_i^{\lambda_i} \prod_{i=1}^n \frac{1 - t x_i^{-2}}{1 - x_i^{-2}} \prod_{1 \le i < j \le n} \frac{1 - t x_i^{-1} x_j}{1 - x_i^{-1} x_j} \frac{1 - t x_i^{-1} x_j^{-1}}{1 - x_i^{-1} x_j^{-1}} \right) \tag{19}$$

とおき，**斜交 Hall–Littlewood 関数** (symplectic Hall–Littlewood function) と呼ぶ．ここで，

$$W_\lambda = \{w \in W : w\lambda = \lambda\}, \quad W_\lambda(t) = \sum_{w \in W_\lambda} t^{l(w)}$$

（ただし $l(w)$ は Coxeter 群 W の元として w の長さ）である．

定義 1.1 で定義した Hall–Littlewood 関数（A 型のルート系に対応するもの）の場合と同様に，$P_{\langle\lambda\rangle}(\boldsymbol{x};t) \in \mathbb{Z}[t][x_1^{\pm1}, \cdots, x_n^{\pm1}]^W$ となることがわかり，$t = 0,\ -1$ を代入したものを考えることができる．$t = 0$ を代入すると，

$$P_{\langle\lambda\rangle}(\boldsymbol{x};0) = s_{\langle\lambda\rangle}(\boldsymbol{x})$$

と斜交 Schur 関数となる．ここで，**斜交 Schur 関数** (symplectic Schur function) $s_{\langle\lambda\rangle}(\boldsymbol{x})$ は

$$s_{\langle\lambda\rangle}(\boldsymbol{x}) = \frac{\det\left(x_i^{\lambda_j+n-j+1} - x_i^{-(\lambda_j+n-j+1)}\right)_{1\le i,j\le n}}{\det\left(x_i^{n-j+1} - x_i^{-(n-j+1)}\right)_{1\le i,j\le n}}$$

によって定義される．斜交 Schur 関数 $s_{\langle\lambda\rangle}(\boldsymbol{x})$ は，斜交群 $\mathbf{Sp}(2n,\mathbb{C})$ の最高ウェイト λ をもつ既約表現の指標である．

定義 4.2. 長さ n 以下のストリクトな分割 λ に対して，

$$P_{\langle\lambda\rangle}(\boldsymbol{x}) = P_{\langle\lambda\rangle}(\boldsymbol{x};-1), \quad Q_{\langle\lambda\rangle}(\boldsymbol{x}) = 2^{l(\lambda)} P_{\langle\lambda\rangle}(\boldsymbol{x}) \tag{20}$$

とおき，それぞれ**斜交 P 関数** (symplectic P-function)，**斜交 Q 関数** (symplectic Q-function) と呼ぶ.

斜交 P 関数，Q 関数は前節で導入した一般化された P 関数の一例となっている．

命題 4.3. (1) $\mathcal{G}=\{g_d(u)\}_{d\geq 0}$ を

$$g_0(z)=1,\quad g_d(z+z^{-1})=(z+z^{-1})\frac{z^d-z^{-d}}{z-z^{-1}}$$

となる多項式列とする．このとき，長さ n 以下のストリクトな分割 λ に対して，

$$P_{\langle\lambda\rangle}(\boldsymbol{x})=P^{\mathcal{G}}_{\lambda}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x}^{-1}). \tag{21}$$

ここで，$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x}^{-1}=(x_1+x_1^{-1},\cdots,x_n+x_n^{-1})$ である．

(2) $\mathcal{G}'=\{g'_d(u)\}_{d\geq 0}$ を

$$g'_0(z)=1,\quad g'_d(z+z^{-1})=2(z+z^{-1})\frac{z^d-z^{-d}}{z-z^{-1}}$$

となる多項式列とする．このとき，長さ n 以下のストリクトな分割 λ に対して，

$$Q_{\langle\lambda\rangle}(\boldsymbol{x})=P^{\mathcal{G}'}_{\lambda}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x}^{-1}). \tag{22}$$

従って，前節で与えた Nimmo 型の公式（定理 3.3），Schur 型の公式（定理 3.4），Józefiak–Pragacz 型の公式（定理 3.6）が，斜交 Q 関数に対しても成立する.（命題 4.3 において $g_d(0)=g'_d(0)=0$ $(d\geq 1)$ であることに注意する.）長さ 2 以下の分割に対応する斜交 Q 関数の母関数は，次の命題のように表される．

命題 4.4. (1) $Q_{\langle(0)\rangle}(\boldsymbol{x})=Q_{\langle\emptyset\rangle}(\boldsymbol{x})=1$ と定義すると，

$$\sum_{r\geq 0}Q_{\langle(r)\rangle}(\boldsymbol{x})z^r=\prod_{i=1}^{n}\frac{(1+x_iz)(1+x_i^{-1}z)}{(1-x_iz)(1-x_i^{-1}z)}. \tag{23}$$

(2) $Q_{\langle(0,0)\rangle}(\boldsymbol{x})=0$ とし，正整数 r, s に対して

$$Q_{\langle(r,s)\rangle}(\boldsymbol{x})=-Q_{\langle(s,r)\rangle}(\boldsymbol{x}),\quad Q_{\langle(r,0)\rangle}(\boldsymbol{x})=-Q_{\langle(0,r)\rangle}(\boldsymbol{x})=Q_{\langle(r)\rangle}(\boldsymbol{x}),$$

となるように $Q_{\langle(r,s)\rangle}(\boldsymbol{x})$ の定義を非負整数の組 (r,s) に対して拡張しておく．このとき，

$$\begin{aligned}&\sum_{r,s\geq 0}Q_{\langle(r,s)\rangle}(\boldsymbol{x})z^rw^s\\&=\frac{(z+w)(1+zw)}{(z-w)(1-zw)}\left(\prod_{i=1}^{n}\frac{(1+x_iz)(1+x_i^{-1}z)}{(1-x_iz)(1-x_i^{-1}z)}\prod_{i=1}^{n}\frac{(1+x_iw)(1+x_i^{-1}w)}{(1-x_iw)(1-x_i^{-1}w)}-1\right).\end{aligned} \tag{24}$$

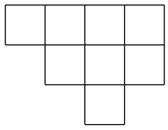
4.2 斜交 Q 関数の組合せ論的表示

Józefiak–Pragacz 型の公式（定理 3.6）を用いることによって，斜交 Q 関数をある種の半標準盤の母関数として表す公式（King–Hamel [7] の予想）を証明することができる．

ストリクトな分割 λ に対して，

$$S(\lambda) = \{(i, j) \in \mathbb{Z}^2 : 1 \leq i \leq l(\lambda),\ i \leq j \leq \lambda_i + i - 1\}$$

とおき，λ の**変形 Young 図形** (shifted Young diagram) と呼ぶ．また，Young 図形のときと同様に，正方形を並べて $S(\lambda)$ を図示する．例えば，$\lambda = (4, 3, 1)$ の変形 Young 図形は



となる．

定義 4.5. (King–Hamel [7]) ストリクトな分割 λ に対して，λ を枠とする**斜交プライムつき変形盤** (symplectic primed shifted tableau) とは，λ の変形 Young 図形 $S(\lambda)$ の各正方形に全順序集合

$$A_n = \{1' < 1 < \overline{1'} < \overline{1} < 2' < 2 < \overline{2'} < \overline{2} < \cdots < n' < n < \overline{n'} < \overline{n}\}$$

の元を 1 つずつ書き込んで次の 5 つの条件 (i) 〜 (v) をみたすようにしたもののことである：

(i) 各行の成分は左から右に広義単調増加である．
(ii) 各列の成分は上から下に広義単調増加である．
(iii) k' も $\overline{k'}$ も各行に 2 回以上現れない．
(iv) k も $\overline{k}$ も各列に 2 回以上現れない．
(v) 第 k 行の成分は A_n の順序に関して k' 以上である．

このような λ を枠とする斜交プライムつき半標準盤全体のなす集合を $\mathrm{SpPSTab}(\lambda; n)$ と表す．盤 $T \in \mathrm{SpPSTab}(\lambda; n)$ に対して，文字 $\gamma \in A_n$ の T における出現回数を $m(\gamma)$ とし，

$$\boldsymbol{x}^T = \prod_{k=1}^{n} x_i^{m(k') + m(k) - m(\overline{k'}) - m(\overline{k})}$$

と定義する．

例えば，

$$T = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & \overline{2'} & 3' \\ \hline \multicolumn{1}{c|}{} & 2' & \overline{2'} & 3 \\ \cline{2-4} \multicolumn{1}{c}{} & \multicolumn{1}{c|}{} & 4 & \multicolumn{1}{|c}{} \\ \cline{3-3} \end{array}$$

は斜交プライムつき変形盤であり，$\boldsymbol{x}^T = x_1^2 x_2^{-1} x_3^2 x_4$ である．

定理 4.6. （King–Hamel の予想 [7, Conjecture 3.1]）長さ n 以下のストリクトな分割 λ に対して，

$$Q_{\langle\lambda\rangle}(\boldsymbol{x}) = \sum_{T \in \mathrm{SpPSTab}(\lambda; n)} \boldsymbol{x}^T. \tag{25}$$

証明のアイデア． 示すべき式 (25) の両辺がともに次の 3 つの性質 (a), (b), (c) をみたすことが証明できる：

(a) $Q_{\langle\lambda\rangle}(x_1,\cdots,x_{n-1},x_n)=\sum_\mu Q_{\langle\mu\rangle}(x_1,\cdots,x_{n-1})Q_{\langle\lambda/\mu\rangle}(x_n)$.
(b) $S(\lambda)\supset S(\mu)$ かつ $l(\lambda)-l(\mu)\le 1$ でない限り，$Q_{\langle\lambda/\mu\rangle}(x_n)=0$.
(c) $S(\lambda)\supset S(\mu)$ かつ $l(\lambda)-l(\mu)\le 1$ であるとき，

$$Q_{\langle\lambda/\mu\rangle}(x_n)=\det\left(Q_{\langle(\lambda_i-\mu_j)\rangle}(x_n)\right)_{1\le i,\,j\le l(\lambda)}.$$

（左辺については Józefiak–Pragacz 型の公式（定理 3.6）を用い，右辺については斜交プライムつき変形盤の定義と lattice path method を用いる.）よって，$n=1$, $\lambda=(r)$ の場合に帰着されるが，この場合は両辺を具体的に計算すれば (25) が示される． □

注意. $\boldsymbol{a}=(a_0,a_1,a_2,\cdots)$ を factorial パラメータとする斜交 factorial Hall–Littlewood 関数を

$$P_{\langle\lambda\rangle}(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{a};t)=\frac{1}{W_\lambda(t)}\sum_{w\in W}w\left(\prod_{i=1}^{n}(x_i|\boldsymbol{a})^{\lambda_i}\prod_{i=1}^{n}\frac{1-tx_i^{-2}}{1-x_i^{-2}}\prod_{1\le i<j\le n}\frac{1-tx_i^{-1}x_j}{1-x_i^{-1}x_j}\frac{1-tx_i^{-1}x_j^{-1}}{1-x_i^{-1}x_j^{-1}}\right)$$

（ここで，$(t|\boldsymbol{a})^d=\prod_{i=0}^{d-1}(t+a_i)$ である）とおいて定義し，斜交 factorial P 関数，Q 関数を

$$P_{\langle\lambda\rangle}(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{a})=P_{\langle\lambda\rangle}(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{a};-1),\quad Q_{\langle\lambda\rangle}(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{a})=2^{l(\lambda)}P_{\langle\lambda\rangle}(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{a})$$

によって定める．すると，これらの斜交 factorial P 関数，Q 関数も前節で導入した一般化された P 関数の一例となる．さらに，斜交プライムつき変形盤 $T\in\mathrm{SpPSTab}(\lambda;n)$ の重みを

$$(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{a})^T=\prod_{(i,j)\in S(\lambda)}\mathrm{wt}(T(i,j);i,j),\quad \mathrm{wt}(\gamma;i,j)=\begin{cases}x_k-a_{j-i} & (\gamma=k'\ \text{のとき}),\\ x_k+a_{j-i} & (\gamma=k\ \text{のとき}),\\ x_k^{-1}-a_{j-i} & (\gamma=\overline{k'}\ \text{のとき}),\\ x_k^{-1}+a_{j-i} & (\gamma=\overline{k}\ \text{のとき})\end{cases}$$

と定めると，定理 4.6 の証明と同様にして，$a_0=0$ の場合には

$$Q_{\langle\lambda\rangle}(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{a})=\sum_{T\in\mathrm{SpPSTab}(\lambda;n)}(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{a})^T$$

となることが示される．この右辺の母関数は Hamel–King [2] が組合せ論的に定義した斜交 Q 関数の factorial 類似（ただし $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{x}$ の場合）であり，上記の Hall–Littlewood 関数の表示を用いると，徳山型の公式 [2, Theorem 17] が容易に導かれる．

4.3 正値性予想

n 変数対称多項式環を $\Lambda_n=\mathbb{C}[x_1,\cdots,x_n]^{\mathfrak{S}_n}$ とし，その部分環 Γ_n を

$$\Gamma_n=\{f\in\Lambda_n : f(t,-t,x_3,\cdots,x_n)\ \text{は}\ t\ \text{によらない}\}$$

とおいて定義する．このとき，Schur 関数 $\{s_\lambda(\boldsymbol{x}) : \lambda$ は長さ n 以下の分割$\}$ は Λ_n の基底をなし，Schur の Q 関数 $\{Q_\lambda(\boldsymbol{x}) : \lambda$ は長さ n 以下のストリクトな分割$\}$ は，Γ_n の基底をなす.

定理 4.7. ([11, Chapter III, (8.17)] を見よ)

(1) 長さ n 以下のストリクトな分割 μ, ν に対して,

$$P_\mu(\boldsymbol{x})P_\nu(\boldsymbol{x}) = \sum_\lambda f^\lambda_{\mu,\nu} P_\lambda(\boldsymbol{x})$$

と展開するとき, 係数 $f^\lambda_{\mu,\nu}$ は非負整数である.

(2) 長さ n 以下のストリクトな分割 λ に対して,

$$P_\lambda(\boldsymbol{x}) = \sum_\mu g_{\lambda,\mu} s_\mu(\boldsymbol{x})$$

と展開するとき, 係数 $g_{\lambda,\mu}$ は非負整数である.

注意. 展開定数 $f^\lambda_{\mu,\nu}$ については, Schur 関数に対する Littlewood–Richardson 規則の対応物が Stembridge [19, Theorem 8.3], Cho [1, Theorem 5.12] によって与えられている. また, 展開係数 $g_{\lambda,\mu}$ についても, Stembridge [19, Theorem 9.3] によって組合せ論的な表示が得られている.

同様に, C_n 型 Weyl 群 W の作用で不変な Laurent 多項式全体のなす環を $\Lambda^C_n = \mathbb{C}[x_1^{\pm 1}, \cdots, x_n^{\pm 1}]^W$ とし, その部分環 Γ^C_n を

$$\Gamma^C_n = \{ f \in \Lambda^C_n : f(t, -t, x_3, \cdots, x_n) \text{ は } t \text{ によらない} \}$$

とおいて定める. このとき, 斜交 Schur 関数 $\{ s_{\langle\lambda\rangle}(\boldsymbol{x}) : \lambda$ は長さ n 以下の分割$\}$ は Λ^C_n の基底をなし, 斜交 Q 関数 $\{ Q_{\langle\lambda\rangle}(\boldsymbol{x}) : \lambda$ は長さ n 以下のストリクトな分割$\}$ は Γ^C_n の基底をなす. まず, Γ^C_n の積の構造定数について,

予想 4.8. 長さ n 以下のストリクトな分割 μ, ν に対して,

$$P_{\langle\mu\rangle}(\boldsymbol{x})P_{\langle\nu\rangle}(\boldsymbol{x}) = \sum_\lambda f^{\langle\lambda\rangle}_{\langle\mu\rangle,\langle\nu\rangle} P_{\langle\lambda\rangle}(\boldsymbol{x})$$

と展開するとき, 係数 $f^{\langle\lambda\rangle}_{\langle\mu\rangle,\langle\nu\rangle}$ は非負整数である.

次に, Schur の Q 関数 $Q_\lambda(x_1, \cdots, x_{2n})$ において, $x_{n+i} = x_i^{-1}$ $(1 \le i \le n)$ と代入したものを考えると, $Q_\lambda(x_1, \cdots, x_n, x_1^{-1}, \cdots, x_n^{-1}) \in \Gamma^C_n$ となる. よって, 斜交 Q 関数で展開することができる.

予想 4.9. 長さ n 以下のストリクトな分割 λ に対して,

$$Q_\lambda(x_1, \cdots, x_n, x_1^{-1}, \cdots, x_n^{-1}) = \sum_\mu c_{\lambda,\langle\mu\rangle} Q_{\langle\mu\rangle}(x_1, \cdots, x_n)$$

と展開するとき, 係数 $c_{\lambda,\langle\mu\rangle}$ は非負整数である.

さらに,

予想 4.10. 長さ n 以下のストリクトな分割 λ に対して,

$$P_{\langle\lambda\rangle}(\boldsymbol{x}) = \sum_\mu g_{\langle\lambda\rangle,\langle\mu\rangle} s_{\langle\mu\rangle}(\boldsymbol{x})$$

と展開するとき, 係数 $g_{\langle\lambda\rangle,\langle\mu\rangle}$ は非負整数である.

A　パフィアンの公式

この付録では，本文中で用いたパフィアンの公式をまとめておく．

まず，$2m$ 次交代行列 $A = (a_{ij})_{1\le i,\, j\le 2m}$ の**パフィアン**は，

$$\mathrm{Pf}(A) = \sum_{\pi\in\mathfrak{F}_{2m}} \mathrm{sgn}(\pi) a_{\pi(1),\pi(2)} a_{\pi(3),\pi(4)} \cdots a_{\pi(2m-1),\pi(2m)}$$

と定義される．ここで，

$$\mathfrak{F}_{2m} = \{\pi \in \mathfrak{S}_{2m} : \pi(1) < \pi(3) < \cdots < \pi(2m-1),\ \pi(2i-1) < \pi(2i)\,(1 \le i \le m)\}$$

であり，$\mathrm{sgn}(\pi)$ は置換 π の符号である．パフィアンは交代性，多重線型性をもち，同じサイズの交代行列 A と正方行列 T に対して

$$\mathrm{Pf}({}^t TAT) = \det(T)\,\mathrm{Pf}(A) \tag{26}$$

が成り立つ．パフィアンの基本的な性質やさまざまな公式とその応用については，[3], [15] を参照されたい．

Schur の Q 関数の理論で最もよく用いられるのが，次の Schur のパフィアンである．

補題 A.1. (Schur [17]) n が偶数であるとき，

$$\mathrm{Pf}\left(\frac{x_j - x_i}{x_j + x_i}\right)_{1\le i,\, j\le n} = \prod_{1\le i<j\le n} \frac{x_j - x_i}{x_j + x_i}. \tag{27}$$

正整数 n に対して $[n] = \{1, 2, \dots, n\}$ とおき，$[n]$ の部分集合 I に対して $\Sigma(I) = \sum_{i\in I} i$ と表す．また，$M \times N$ 行列 $X = (x_{i,j})_{1\le i\le M,\, 1\le j\le N}$ と部分集合 $I = \{i_1, \cdots, i_r\} \subset [M]$, $J = \{j_1, \cdots, j_s\} \subset [N]$ $(i_1 < \cdots < i_r,\ j_1 < \cdots < j_s)$ に対して，X から第 i_1 行，$\cdots$，第 i_r 行，第 j_1 列，$\cdots$，第 j_s 列を取り出してできる $r \times s$ 行列を $X(I; J)$ と表す：

$$X(I; J) = \left(x_{i_p, j_q}\right)_{1\le p\le r,\, 1\le q\le s}.$$

交代行列 X に対しては，$X(I; I)$ を単に $X(I)$ と表す．空集合については，$\det X(\emptyset; \emptyset) = 1$, $\mathrm{Pf}\, X(\emptyset) = 1$ であると約束する．

命題 A.2. m, n を非負整数とし，$m + n$ は偶数であると仮定する．このとき，m 次交代行列 Z，n 次交代行列 Z' と $m \times n$ 行列 W に対して，

$$\mathrm{Pf}\begin{pmatrix} Z & W \\ -{}^t W & Z' \end{pmatrix} = \sum_{I,J} \varepsilon(I, J)\,\mathrm{Pf}\, Z(I)\,\mathrm{Pf}\, Z'(J) \det W([m] \setminus I; [n] \setminus J). \tag{28}$$

ここで，和は偶数個の元からなる部分集合 $I \subset [m]$, $J \subset [n]$ の対 (I, J) で $m - \#I = n - \#J$ をみたすもの全体にわたる．また，

$$\varepsilon(I, J) = (-1)^{\Sigma(I)+\Sigma(J)+\binom{m}{2}+\binom{n}{2}+\binom{k}{2}}$$

（ただし $k = m - \#I = n - \#J$）である．

証明. 置換 $\pi \in \mathfrak{F}_{m+n}$ は，$[m+n] = \{1, 2, \cdots, m+n\}$ の $(m+n)/2$ 個の 2 元部分集合への分割 $\{\{\pi(1), \pi(2)\}, \{\pi(3), \pi(4)\}, \cdots\}$ と同一視できる．そこで，記号を混用して，$[m+n]$ の部分集合 I（ただし $\#I$ は偶数）に対して，I の $\#I/2$ 個の 2 元部分集合への分割全体のなす集合を $\mathfrak{F}_I$ と表すことにする．$[m+n]$ の分割 $\pi \in \mathfrak{F}_{[m+n]}$ が与えられたとき，

$$\pi_i = \{b \in \pi : \#(b \cap [m]) = i\} \quad (i = 0, 1, 2)$$

とおくと，$\pi_2 \in \mathfrak{F}_I$, $\pi_0 \in \mathfrak{F}_{J+m}$（ただし $J + m = \{j + m : j \in J\}$）となる部分集合 $I \subset [m]$, $J \subset [n]$ が定まり，$m - \#I = n - \#J$ をみたす．さらに，$[m] \setminus I = \{r_1, \cdots, r_k\}$, $[n] \setminus J = \{s_1, \cdots, s_k\}$ $(r_1 < \cdots < r_k,\ s_1 < \cdots < s_k)$ とすると，$\pi_1 = \{\{r_i, s_{\sigma(i)} + m\} : 1 \le i \le k\}$ となる置換 $\sigma \in \mathfrak{S}_k$ が定まる．このとき，対応 $\pi \mapsto (\pi_2, \sigma, \pi_0)$ は全単射

$$\mathfrak{F}_{[m+n]} \longrightarrow \bigsqcup_{I,J} \mathfrak{F}_I \times \mathfrak{S}_k \times \mathfrak{F}_J$$

（ここで，I, J は偶数個の元からなる部分集合 $I \subset [m]$, $J \subset [n]$ で $m - \#I = n - \#J$ をみたすもの全体にわたる）を与え，

$$\operatorname{sgn}(\pi) = \varepsilon(I, J) \operatorname{sgn}(\pi_2) \operatorname{sgn}(\sigma) \operatorname{sgn}(\pi_0)$$

が成り立つ．この考察とパフィアン，行列式の定義を合わせると，示すべき式が得られる． □

命題 A.2 において $m = 1$ の場合を考えると，パフィアンの展開公式

$$\operatorname{Pf} A = \sum_{k=2}^{n} (-1)^k a_{1,k} \operatorname{Pf} A([n] \setminus \{1, k\}) \tag{29}$$

（ただし $A = (a_{i,j})_{1 \le i, j \le n}$ は n 次交代行列）が得られる．また，$Z' = O$ の場合を考えると，

系 A.3. m, n を非負整数とし，$m + n$ は偶数であると仮定する．このとき，m 次交代行列 Z と $m \times n$ 行列 W に対して，

$$\operatorname{Pf} \begin{pmatrix} Z & W \\ -{}^t W & O \end{pmatrix} = \begin{cases} \displaystyle\sum_I (-1)^{\Sigma(I) + \binom{m}{2}} \operatorname{Pf} Z(I) \det W([m] \setminus I; [n]) & (m > n \text{ のとき}), \\ (-1)^{\binom{m}{2}} \det W & (m = n \text{ のとき}), \\ 0 & (m < n \text{ のとき}). \end{cases} \tag{30}$$

ここで，$m > n$ の場合の和は $[n]$ の $(m - n)$ 元部分集合 I 全体をわたる．

この系 A.3 の $m = n$ の場合から，行列式はパフィアンの特別な場合であるとみなすことができ，行列式の公式の多くは対応するパフィアンの公式から導くことができる．例えば，次の命題 A.4 は行列式に対する Sylvester の公式

$$\det \left(\frac{\det Y([m] \cup \{m+i\}; [m] \cup \{m+j\})}{\det Y([m]; [m])} \right)_{1 \le i, j \le k} = \frac{\det Y}{\det Y([m]; [m])}$$

（ただし Y は $(m+k)$ 次正方行列）のパフィアン版である．

命題 A.4. ([8, (2.5)]) n, l を偶数とする．$(n+l) \times (n+l)$ 交代行列 X に対して，

$$\mathrm{Pf}\left(\frac{\mathrm{Pf}\, X([n] \cup \{n+i, n+j\})}{\mathrm{Pf}\, X([n])}\right)_{1 \le i < j \le l} = \frac{\mathrm{Pf}\, X}{\mathrm{Pf}\, X([n])}. \tag{31}$$

また，Cauchy–Binet の公式のパフィアン版が次のように与えられる．

命題 A.5. m, n, l を非負整数とし，$m+n$ は偶数であると仮定する．このとき，m 次交代行列 A，n 次交代行列 B，$m \times l$ 行列 S，$n \times l$ 行列 T に対して，

$$\begin{aligned}\sum_K (-1)^{\binom{\#K}{2}} \mathrm{Pf}\begin{pmatrix} A & S([m];K) \\ -{}^t S([m];K) & O \end{pmatrix} \mathrm{Pf}\begin{pmatrix} B & T([n];K) \\ -{}^t T([n];K) & O \end{pmatrix} \\ = \mathrm{Pf}\begin{pmatrix} A & S{}^t T \\ -T{}^t S & B \end{pmatrix},\end{aligned} \tag{32}$$

$$\begin{aligned}\sum_K \mathrm{Pf}\begin{pmatrix} A & S([m];K) \\ -{}^t S([m];K) & O \end{pmatrix} \mathrm{Pf}\begin{pmatrix} B & T([n];K) \\ -{}^t T([n];K) & O \end{pmatrix} \\ = (-1)^{\binom{n}{2}} \mathrm{Pf}\begin{pmatrix} A & S{}^t T \\ -T{}^t S & -B \end{pmatrix}.\end{aligned} \tag{33}$$

ここで，K は $[l]$ の部分集合で $m + \#K$（よって，$n + \#K$）が偶数となるもの全体をわたる．

証明. パフィアンの展開公式 (30) を

$$Z = \begin{pmatrix} A & S \\ -{}^t S & O \end{pmatrix}, \quad Z' = \begin{pmatrix} B & -T \\ {}^t T & O \end{pmatrix}, \quad W = \begin{pmatrix} O & O \\ O & E_l \end{pmatrix}$$

（ここで，E_l は l 次単位行列である）に対して適用する．このとき，部分集合 $I \subset [m+l]$，$J \subset [n+l]$ に対して，

$$\begin{aligned} & W([m+l] \setminus I; [n+l] \setminus J) \\ & \qquad = \begin{cases} 1 & (I = [m] \sqcup (K+m),\ J = [n] \sqcup (K+n) \text{ と表されるとき}), \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}\end{aligned}$$

であり，部分集合 $K \subset [l]$ に対して，

$$\begin{aligned} \mathrm{Pf}\, Z([m] \sqcup (K+m)) &= \mathrm{Pf}\begin{pmatrix} A & S([m];K) \\ -{}^t S([m];K) & O \end{pmatrix}, \\ \mathrm{Pf}\, Z'([n] \sqcup (K+n)) &= (-1)^{\#K} \mathrm{Pf}\begin{pmatrix} B & T([n];K) \\ -{}^t T([n];K) & O \end{pmatrix} \end{aligned}$$

である．一方，(30) の左辺は，(26) とパフィアンの交代性，展開公式 (29) を用いると，

$$
\begin{aligned}
\operatorname{Pf}\begin{pmatrix} A & S & O & O \\ -{}^tS & O & O & E_l \\ O & O & B & -T \\ O & -E_l & {}^tT & O \end{pmatrix} &= \operatorname{Pf}\begin{pmatrix} A & O & S{}^tT & O \\ O & O & O & E_l \\ -T{}^tS & O & B & O \\ O & -E_l & O & O \end{pmatrix} \\
&= (-1)^{nl+\binom{l}{2}} \operatorname{Pf}\begin{pmatrix} A & S{}^tT \\ -T{}^tS & B \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

と変形できる．これより (32) が導かれる．(33) は (32) において B を $-B$ に置き換えることによって示される． $\square$

公式 (32), (33) において $m = n$, $A = O$, $B = O$ の場合を考えると，(30) の $m = n$ の場合を用いることにより，行列式に対する Cauchy–Binet の公式

$$
\sum_I \det S([n]; I) \det T([n]; I) = \det \left({}^tST\right)
$$

（ここで，I は $[l]$ の n 元部分集合全体を動く）が得られる．

参考文献

[1] S. Cho, A new Littlewood–Richardson rule for Schur P-functions, Trans. Amer. Math. Soc. **365** (2013), 939–972.

[2] A. M. Hamel and R. C. King, Factorial characters and Tokuyama's identity for classical groups, Proceedings of the 28th International Conference of Formal Power Series and Algebraic Combinatorics (Vancouver, July 4–8, 2016), Discrete Math. Theor. Comput. Sci. proc. **BC** (2016), 623–634.

[3] M. Ishikawa and S. Okada, Identities for determinants and Pfaffians, and their applications, Sugaku Expositions **27** (2014), 85–116.

[4] V. N. Ivanov, Combinatorial formula for factorial Schur Q-functions, J. Math. Sci. (N.Y.) **107** (2001), 4195–4211.

[5] V. N. Ivanov, Interpolation analogues of Schur Q-functions, J. Math. Sci. (N.Y.) **131** (2005), 5495–5507.

[6] T. Józefiak and P. Pragacz, A determinantal formula for skew Q-functions, J. London Math. Soc. (2) **43** (1991), 76–90.

[7] R. C. King and A. M. Hamel, Combinatorial realisation of Hall–Littlewood polynomials at $t = -1$, Proceedings of the 19th International Conference on Formal Power Series and Algebraic Combinatorics (Tianjin, July 2–6, 2007), available at `http://igm.univ-mlv.fr/~fpsac/FPSAC07/SITE07/PDF-Proceedings/Posters/75.pdf`

[8] D. E. Knuth, Overlapping Pfaffians, Electron. J. Combin. **3** (no. 2, The Foata Festschrift) (1996), #R5.

[9] D. E. Littlewood, On certain symmetric functions, Proc. London Math. Soc. **43** (1961), 485–498.

[10] I. G. Macdonald, The Poincaré series of a Coxeter group, Math. Ann. **199** (1972), 161–174.

[11] I. G. Macdonald, "Symmetric Functions and Hall Polynomials, 2nd edition", Oxford Univ. Press, 1995.

[12] I. G. Macdonald, Orthogonal polynomials associated with root systems, Sém. Lothar. Combin. **45** (2000/01), Art. B45a.

[13] A. O. Morris, A note on the multiplication of Hall functions, J. London Math. Soc. **39** (1964), 481–488.

[14] J. J. C. Nimmo, Hall–Littlewood symmetric functions and the BKP equation, J. Phys. A **23** (1990), 751–760.

[15] 岡田 聡一, Pfaffian identities and applications, 2012 年度表現論シンポジウム講演集, 2012, pp. 69–91.

[16] P. Pragacz, Algebro-geometric applications of Schur S- and Q-polynomials, in "Topics in Invariant Theory", Séminaire d'Algèbre Dubreil-Malliavin 1989-90, Lecture Notes in Math. **1478**, Springer-Verlag, 1991, pp. 130–191.

[17] I. Schur, Über die Darstellung der symmetrischen und der alternierenden Gruppe durch gebrochene lineare Substitutionen, J. Reine Angew. Math. **139** (1911), 155–250.

[18] A. N. Sergeev, The tensor algebra of the identity representation as a module over the Lie superalgebras $\mathfrak{Gl}(n, m)$ and $Q(n)$, Math. USSR-Sb. **51** (1985), 419–427.

[19] J. R. Stembridge, Shifted tableaux and the projective representations of symmetric groups, Adv. Math. **74** (1989), 87–134.

[20] Y. C. You, Polynomial solutions of the BKP hierarchy and projective representations of symmetric groups, in "Infinite Dimensional Lie Algebrasa and Groups", Adv. Ser. in Math. Phys. **7**, World Sci. 1989, pp. 449–466.