

# A cohomological obstruction to the existence of compact Clifford-Klein forms

森田陽介 (東京大学大学院数理科学研究科 博士課程 3 年)\*

## 概要

$G$  の離散部分群  $\Gamma$  が等質空間  $G/H$  に固有不連続かつ自由に作用するとき、商多様体  $\Gamma \backslash G/H$  のことを Clifford-Klein 形という。どのような  $G/H$  に対してコンパクトな Clifford-Klein 形が存在するかという問題は、様々な手法によって研究されている。本講演では、Lie 環の相対コホモロジーと de Rham コホモロジーを比較する準同型と、不連続群のコホモロジー次元の評価を組み合わせて得られる、コンパクト Clifford-Klein 形の存在に対する新たな障害を紹介する。さらに、 $\varepsilon$ -family の理論を用いて具体例を系統的に構成する方法を述べる。

## 1 Clifford-Klein 形

$G$  を Lie 群,  $H$  を  $G$  の閉部分群,  $\Gamma$  を  $G$  の離散部分群とする。射影  $\pi : G/H \rightarrow \Gamma \backslash G/H$  が  $\Gamma$  を被覆変換群とする被覆写像になるとき (あるいは同値なことだが,  $\Gamma$  の  $G/H$  への作用が固有不連続かつ自由であるとき), 商空間  $\Gamma \backslash G/H$  を  $G/H$  の Clifford-Klein 形とよぶ。Clifford-Klein 形には  $G/H$  を局所モデルとする多様体の構造が自然に入る。

**例 1.1.** 断面曲率が恒等的に  $-1$  であるような符号  $(p, q)$  の完備な擬 Riemann 多様体とは, 次のような  $G/H$  の Clifford-Klein 形のこと他にない:

$$G/H = \begin{cases} O(p, q+1)/O(p, q) & (q \geq 2), \\ \widetilde{O(p, 2)}/\widetilde{O(p, 1)} & (q = 1), \\ PO(p, 1)/O(p) & (q = 0). \end{cases}$$

例えば  $q = 0$  のときが双曲多様体,  $q = 1$  のときが反 de Sitter 多様体,  $p = 1$  のときが de Sitter 多様体である。詳しくは [9] を参照されたい。

本講演では次の問題を考える:

**問題 1.2.** 与えられた等質空間  $G/H$  が, コンパクトな Clifford-Klein 形を持つか判定せよ。

$H$  が  $G$  のコンパクト部分群で,  $\Gamma$  が  $G$  のねじれの無い一様格子のとき,  $\Gamma \backslash G/H$  はコンパクト

---

\* email: ymorita@ms.u-tokyo.ac.jp

Clifford–Klein 形になる. 特に非コンパクト型 Riemann 対称空間は常にコンパクト Clifford–Klein 形 (言い換えれば, コンパクト Riemann 局所対称空間) を持つ [2]. しかし  $H$  が非コンパクトな場合には,  $G$  の離散部分群が  $G/H$  に固有不連続に作用するとは限らない. 例えば,  $G$  の一様格子  $\Gamma$  は決して  $G/H$  に固有不連続に作用しない. そのため問 1.2 は非常に難しくなる. この状況での一般的な研究は 1980 年代後半の小林俊行に端を発する [5]. それ以降, 小林俊行のほか, 小野薫, Y. Benoist, F. Labourie, G. Margulis, R. J. Zimmer らによって,  $H$  が非コンパクトな状況での問 1.2 は探求されてきた. これらの結果を概説した文献には, [7], [6], [9], [10] などがある.

問 1.2 に対する 1 つのアプローチとして, Lie 環の相対コホモロジー  $H^\bullet(\mathfrak{g}, H; \mathbb{R})$  と Clifford–Klein 形の de Rham コホモロジー  $H^\bullet(\Gamma \backslash G/H; \mathbb{R})$  を比較する手法がある. この手法は小林–小野 [8] によって開発され, 小林 [5], Benoist–Labourie [1] などの手によって発展してきた. 今回の講演では, この手法を用いて得られた新しい結果について紹介したい.

謝辞. 本研究は日本学術振興会・特別研究員奨励費 (課題番号: 14J08233) および数物フロンティア・リーディング大学院の助成を受けたものである.

## 2 Lie 環の相対コホモロジーと de Rham コホモロジー

$G, H$  の Lie 環をそれぞれ  $\mathfrak{g}, \mathfrak{h}$  とする. 等質空間  $G/H$  上の  $G$ -不変微分形式の空間  $\Omega^\bullet(G/H)^G$  は, 外微分  $d$  で保たれる. そのコホモロジーを  $H^\bullet(\mathfrak{g}, H; \mathbb{R})$  と書き, Lie 環の相対コホモロジーと呼ぶ.

**注意 2.1.**  $G$ -不変微分形式  $\omega \in \Omega^p(G/H)^G$  が与えられたとき, 1 点  $x_0 = eH \in G/H$  での  $\omega$  の値を決めれば, 他の点での  $\omega$  の値は  $G$ -不変性から自動的に決まる. これによって同型

$$\Omega^p(G/H)^G \simeq (\Lambda^p(\mathfrak{g}/\mathfrak{h})^*)^H$$

が定まる. この同型のもとで,

$$(d\omega)(X_1, \dots, X_{p+1}) := \sum_{1 \leq i < j \leq p+1} (-1)^{i+j} \omega([X_i, X_j], X_1, \dots, \hat{X}_i, \dots, \hat{X}_j, \dots, X_{p+1})$$

と書ける ( $X_1, \dots, X_{p+1} \in \mathfrak{g}$ ).

$\Gamma \backslash G/H$  が  $G/H$  の Clifford–Klein 形するとき, 自然な包含写像

$$\eta_H : \Omega^\bullet(G/H)^G \hookrightarrow \Omega^\bullet(G/H)^\Gamma \simeq \Omega^\bullet(\Gamma \backslash G/H)$$

が考えられる.  $\eta_H$  がコホモロジーの間に定める準同型も

$$\eta_H : H^\bullet(\mathfrak{g}, H; \mathbb{R}) \rightarrow H^\bullet(\Gamma \backslash G/H; \mathbb{R})$$

と書くことにする. この  $\eta_H$  について, 次の結果が知られている:

**補題 2.2.**  $\Gamma \backslash G/H$  がコンパクトならば,  $\eta_H : H^N(\mathfrak{g}, H; \mathbb{R}) \rightarrow H^N(\Gamma \backslash G/H; \mathbb{R})$  ( $N := \dim G/H$ ) は単射.

これはコンパクト多様体上の体積形式が零でないコホモロジー類を定めることからすぐに従う.

### 3 主定理

$G$  を線型連結 Lie 群,  $H$  を連結閉部分群とする.  $H^N(\mathfrak{g}, H; \mathbb{R}) \neq 0$  ( $N = \dim G - \dim H$ ) を仮定する (この仮定は, 例えば  $G/H$  が簡約型等質空間のときには常に満たされる).  $K_H$  を  $H$  の極大コンパクト部分群,  $T_H$  を  $K_H$  の極大トーラスとする.  $G$ -同変な射影  $\pi_{H, T_H} : G/H \rightarrow G/T_H$  が誘導する Lie 環の相対コホモロジーの準同型を  $i_{H, T_H} : H^\bullet(\mathfrak{g}, H; \mathbb{R}) \rightarrow H^\bullet(\mathfrak{g}, T_H; \mathbb{R})$  とする.

さらに,  $I$  を,

$$\bigoplus_{C, p} \text{Image}(i_{C, T_H} : H^p(\mathfrak{g}, C; \mathbb{R}) \rightarrow H^p(\mathfrak{g}, T_H; \mathbb{R}))$$

(直和は  $C \supset T_H$  なる連結コンパクト部分群  $C$  と  $p > N + \dim K_H - \dim C$  を走る) が生成する  $H^N(\mathfrak{g}, T_H; \mathbb{R})$  のイデアルとする. このとき以下が成り立つ:

**定理 3.1** (M. [11]). 準同型  $i_{H, T_H} : H^N(\mathfrak{g}, H; \mathbb{R}) \rightarrow H^N(\mathfrak{g}, T_H; \mathbb{R})$  の像が  $I$  に含まれるならば,  $G/H$  はコンパクト Clifford–Klein 形を持たない.

**定理 3.1** の証明の概略.  $G/H$  のコンパクト Clifford–Klein 形  $\Gamma \backslash G/H$  が存在したとして, 矛盾を導こう. Selberg の補題より  $\Gamma$  はねじれを持たないとしてよい. まず次の可換図式を考える:

$$\begin{array}{ccc} H^N(\mathfrak{g}, H; \mathbb{R}) & \xrightarrow{i_{H, T_H}} & H^N(\mathfrak{g}, T_H; \mathbb{R}) \\ \eta_H \downarrow & & \eta_{T_H} \downarrow \\ H^N(\Gamma \backslash G/H; \mathbb{R}) & \xrightarrow{\pi_{H, T_H}^*} & H^N(\Gamma \backslash G/T_H; \mathbb{R}). \end{array}$$

補題 2.2 より  $\eta_H$  は単射である. また, 次に述べる事実 3.2 を  $P = \Gamma \backslash G$  として適用すると  $i_{H, T_H}$  は単射であることがわかる:

**事実 3.2** (分裂原理 [4, Th. 6.8.3]). 多様体  $P$  に連結 Lie 群  $H$  が固有かつ自由に作用しているものとする (または同値なことだが,  $\pi : P \rightarrow P/H$  は主  $H$ -束であるとする).  $H$  の極大コンパクト部分群を  $K_H$  とおき,  $K_H$  の極大トーラスを  $T_H$  とおく. このとき,  $\pi^* : H^\bullet(P/H; \mathbb{R}) \rightarrow H^\bullet(P/T_H; \mathbb{R})$  は単射.

従って図式の可換性より

$$\eta_{T_H} \circ i_{H, T_H} : H^N(\mathfrak{g}, H; \mathbb{R}) \rightarrow H^N(\Gamma \backslash G/T_H; \mathbb{R})$$

は単射でなくてはならない.

次に,  $C$  を勝手な連結コンパクト部分群として,

$$\begin{array}{ccc} H^p(\mathfrak{g}, C; \mathbb{R}) & \xrightarrow{i_{C, T_H}} & H^p(\mathfrak{g}, T_H; \mathbb{R}) \\ \eta_C \downarrow & & \eta_{T_H} \downarrow \\ H^p(\Gamma \backslash G / C; \mathbb{R}) & \xrightarrow{\pi_{C, T_H}^*} & H^p(\Gamma \backslash G / T_H; \mathbb{R}) \end{array}$$

という可換図式を考えよう. すると Leray–Serre スペクトル系列の計算から,  $p > N + \dim K_H - \dim C$  のとき  $H^p(\Gamma \backslash G / C; \mathbb{R}) = 0$  であることがわかる. 特に図式の可換性から

$$\eta_{T_H} \circ i_{C, T_H} : H^p(\mathfrak{g}, C; \mathbb{R}) \rightarrow H^p(\Gamma \backslash G / T_H; \mathbb{R})$$

は  $p > N + \dim K_H - \dim C$  で零射である. よってイデアル  $I$  の定め方より,  $I \subset \ker \eta_{T_H}$  である. 今  $\text{Image}(i_{H, T_H} : H^N(\mathfrak{g}, H; \mathbb{R}) \rightarrow H^N(\mathfrak{g}, T_H; \mathbb{R})) \subset I$  と仮定していたから,

$$\eta_{T_H} \circ i_{H, T_H} : H^N(\mathfrak{g}, H; \mathbb{R}) \rightarrow H^N(\Gamma \backslash G / T_H; \mathbb{R})$$

は零射でなくてはならない. これは先ほど示した単射性に矛盾.  $\square$

## 4 $\varepsilon$ -family を用いた例の構成

この節では,  $\varepsilon$ -family (大島–関口 [12], [13]) を用いて定理 3.1 が適用できる半単純対称空間を系統的に構成する方法を与える.

$\mathfrak{g}$  を実半単純 Lie 環,  $\theta$  を  $\mathfrak{g}$  の Cartan 対合とする.  $\mathfrak{k} = \mathfrak{g}^\theta$ ,  $\mathfrak{p} = \mathfrak{g}^{-\theta}$  とおく.  $\theta\sigma = \sigma\theta$  を満たす  $\mathfrak{g}$  の対合  $\sigma$  をとり,  $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}^\sigma$ ,  $\mathfrak{q} = \mathfrak{g}^{-\sigma}$  とおく. このとき  $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$  を半単純対称対と呼ぶ.  $\mathfrak{a}$  を  $\mathfrak{p} \cap \mathfrak{q}$  の極大可換部分群とする. 各  $\alpha \in \mathfrak{a}^*$  に対し  $\mathfrak{g}_\alpha = \{X \in \mathfrak{g} : [Y, X] = \alpha(Y)X \ (\forall Y \in \mathfrak{a})\}$  とおく. このとき  $\Sigma = \{\alpha \in \mathfrak{a}^* : \mathfrak{g}_\alpha \neq 0\} \setminus \{0\}$  はルート系の公理を満たす (Rossmann [14, Th. 5]).  $\Sigma$  を  $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$  の制限ルート系と呼ぶ.

写像  $\varepsilon : \Sigma \rightarrow \{\pm 1\}$  が以下の 2 条件を満たすとき,  $\varepsilon$  は  $\Sigma$  の符号であるという:

$$\begin{aligned} \varepsilon(-\alpha) &= \varepsilon(\alpha) \quad (\alpha \in \Sigma), \\ \varepsilon(\alpha)\varepsilon(\beta) &= \varepsilon(\alpha + \beta) \quad (\alpha, \beta, \alpha + \beta \in \Sigma). \end{aligned}$$

$\Sigma$  の符号  $\varepsilon$  が与えられたとき,  $\mathfrak{g}$  の対合  $\sigma_\varepsilon$  を

$$\sigma_\varepsilon(X) = \begin{cases} \sigma(X) & (X \in \mathfrak{z}_\mathfrak{g}(\mathfrak{a})), \\ \varepsilon(\alpha)\sigma(X) & (X \in \mathfrak{g}_\alpha, \alpha \in \Sigma). \end{cases}$$

で定義する.  $\mathfrak{h}_\varepsilon = \mathfrak{g}^{\sigma_\varepsilon}$ ,  $\mathfrak{q}_\varepsilon = \mathfrak{g}^{-\sigma_\varepsilon}$  とおく.  $F((\mathfrak{g}, \mathfrak{h})) = \{(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}_\varepsilon) : \varepsilon \text{ は } \Sigma \text{ の符号}\}$  を半単純対称対  $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$  の  $\varepsilon$ -family と呼ぶ. 任意の  $\Sigma$  の符号  $\varepsilon$  に対して  $\dim(\mathfrak{k} \cap \mathfrak{h}) \geq \dim(\mathfrak{k} \cap \mathfrak{h}_\varepsilon)$  が成り立つとき, 半単純対称対  $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$  は basic であるという. 各  $\varepsilon$ -family に対して, basic な対称対が (同型を除いて) ただ 1 つだけ存在する.

**注意 4.1.** [13] では,  $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$  が basic であることを対合  $\theta\sigma$  の固有値の重複度を用いて定義していた. 2つの定義が一致することの証明は容易である ([11, Lem. 5.1] を参照されたい).

以下の2条件を満たす写像  $\delta: \Sigma \rightarrow \{\pm 1, \pm\sqrt{-1}\}$  を  $\Sigma$  の半符号と呼ぶことにする:

$$\begin{aligned}\delta(-\alpha) &= \delta(\alpha)^{-1} \quad (\alpha \in \Sigma), \\ \delta(\alpha)\delta(\beta) &= \delta(\alpha + \beta) \quad (\alpha, \beta, \alpha + \beta \in \Sigma).\end{aligned}$$

$\Sigma$  の半符号  $\delta$  に対し,  $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$  の自己同型  $f_{\delta}(X)$  を

$$f_{\delta}(X) = \begin{cases} X & (X \in (\mathfrak{a}_{\mathfrak{g}})_{\mathbb{C}}), \\ \delta(\alpha)X & (X \in (\mathfrak{g}_{\alpha})_{\mathbb{C}}, \alpha \in \Sigma), \end{cases}$$

で定める. さらに,  $\mathfrak{g}_{\delta} = \{X \in \mathfrak{g} : f_{\delta}(X) = X\}$  とする.

**補題 4.2** (cf. [12, Lem. 1.3]).  $\varepsilon$  を  $\Sigma$  の符号とし,  $\delta$  を  $\delta^2 = \varepsilon$  を満たす  $\Sigma$  の半符号とする. このとき次が成り立つ:

- (1)  $f_{\delta}(\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}) = (\mathfrak{h}_{\varepsilon})_{\mathbb{C}}$ .
- (2)  $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}_{\delta} = \mathfrak{h}_{\varepsilon} \cap \mathfrak{g}_{\delta}$ .

$G/H$  を半単純対称空間とする. すなわち,  $G$  を連結かつ線型な実半単純 Lie 群,  $\sigma$  を  $G$  の対合,  $H$  を  $G^{\theta}$  の開部分群とする (ここでは簡単のため  $H$  は連結であるとする).  $\theta$  を  $\sigma$  と可換な  $G$  の Cartan 対合とする.  $\varepsilon$  を  $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$  の制限ルート系  $\Sigma$  の符号とすると,  $\mathfrak{g}$  の対合  $\sigma_{\varepsilon}$  は  $G$  の対合に自然に持ち上がる.  $H_{\varepsilon}$  を  $G^{\sigma_{\varepsilon}}$  の単位元連結成分とする.  $K = G^{\theta}$ ,  $K_H = K \cap H$ ,  $K_{H_{\varepsilon}} = K \cap H_{\varepsilon}$  はそれぞれ  $G, H, H_{\varepsilon}$  の極大コンパクト部分群である.

**命題 4.3** (M. [11]).  $G/H$  を basic な半単純対称空間とする.  $\Sigma$  を  $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$  の制限ルート系とする.  $\Sigma$  の符号  $\varepsilon$  を,  $G/H_{\varepsilon}$  が basic にならないようにとる. もし  $\Sigma$  の半符号  $\delta$  で  $\delta^2 = \varepsilon$  かつ  $\text{rank}(\mathfrak{k}_{H_{\varepsilon}}) = \text{rank}(\mathfrak{k}_{H_{\varepsilon}} \cap \mathfrak{g}_{\delta})$  を満たすものが存在するならば,  $G/H_{\varepsilon}$  はコンパクト Clifford–Klein 形を持たない.

**命題 4.3** の証明の概略. 補題 4.2 (1) より,  $f_{\delta}$  は  $\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}$  を  $(\mathfrak{h}_{\varepsilon})_{\mathbb{C}}$  にうつす  $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$  の自己同型だから,  $H^{\bullet}(\mathfrak{g}, H_{\varepsilon}; \mathbb{R}) \otimes \mathbb{C}$  から  $H^{\bullet}(\mathfrak{g}, H; \mathbb{R}) \otimes \mathbb{C}$  への同型を誘導する.  $\text{rank}(\mathfrak{k}_{H_{\varepsilon}}) = \text{rank}(\mathfrak{k}_{H_{\varepsilon}} \cap \mathfrak{g}_{\delta})$  より,  $K_{H_{\varepsilon}}$  の極大トーラス  $T_{H_{\varepsilon}}$  を,  $\mathfrak{t}_{H_{\varepsilon}} \subset \mathfrak{k}_{H_{\varepsilon}} \cap \mathfrak{g}_{\delta}$  を満たすようにとれる. 補題 4.2 (2) より  $T_{H_{\varepsilon}} \subset K_H$  である. さて, このとき次の2条件が成り立つ:

- (i)  $f_{\delta}(\mathfrak{t}_{H_{\varepsilon}})_{\mathbb{C}} = (\mathfrak{t}_{H_{\varepsilon}})_{\mathbb{C}}$ .
- (ii)  $f_{\delta}$  が誘導する  $H^{\bullet}(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, (\mathfrak{t}_{H_{\varepsilon}})_{\mathbb{C}}; \mathbb{C})$  の自己同型は恒等写像になる.

((i) は明らか. (ii) はコホモロジーの計算を H. Cartan の定理 [3] を用いて不変式論の計算に帰着することで示される).

従って、次の図式は可換である:

$$\begin{array}{ccc}
H^N(\mathfrak{g}, H_\varepsilon; \mathbb{R}) \otimes \mathbb{C} & \xrightarrow{i} & H^N(\mathfrak{g}, T_{H_\varepsilon}; \mathbb{R}) \otimes \mathbb{C} \\
\downarrow f_\delta^* & & \uparrow i \\
H^N(\mathfrak{g}, H; \mathbb{R}) \otimes \mathbb{C} & \xrightarrow{i} & H^N(\mathfrak{g}, K_H; \mathbb{R}) \otimes \mathbb{C}
\end{array}$$

このことから

$$\begin{aligned}
& \text{Image}(i : H^N(\mathfrak{g}, H_\varepsilon; \mathbb{R}) \otimes \mathbb{C} \rightarrow H^N(\mathfrak{g}, T_{H_\varepsilon}; \mathbb{R}) \otimes \mathbb{C}) \\
& \subset \text{Image}(i : H^N(\mathfrak{g}, K_H; \mathbb{R}) \otimes \mathbb{C} \rightarrow H^N(\mathfrak{g}, T_{H_\varepsilon}; \mathbb{R}) \otimes \mathbb{C}),
\end{aligned}$$

または同値なことだが

$$\text{Image}(i : H^N(\mathfrak{g}, H_\varepsilon; \mathbb{R}) \rightarrow H^N(\mathfrak{g}, T_{H_\varepsilon}; \mathbb{R})) \subset \text{Image}(i : H^N(\mathfrak{g}, K_H; \mathbb{R}) \rightarrow H^N(\mathfrak{g}, T_{H_\varepsilon}; \mathbb{R}))$$

が分かる. 今,  $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$  が basic な対称対,  $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}_\varepsilon)$  は basic でない対称対だから,  $\dim K_H > \dim K_{H_\varepsilon}$ .  
よって

$$\text{Image}(i : H^N(\mathfrak{g}, K_H; \mathbb{R}) \rightarrow H^N(\mathfrak{g}, T_{H_\varepsilon}; \mathbb{R})) \subset I^N.$$

これで  $G/H_\varepsilon$  に対して定理 3.1 が適用できることが分かった. □

## 5 例

定理 3.1 から, コンパクト Clifford–Klein 形を持たない等質空間の例が新たに幾つか得られる.

**例 5.1.**  $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$  が以下のいずれかのとき, 既約対称空間  $G/H$  はコンパクト Clifford–Klein 形を持たない:

$\mathfrak{g}$	$\mathfrak{h}$	条件
$\mathfrak{sl}(p+q, \mathbb{C})$	$\mathfrak{su}(p, q)$	$p, q \geq 1$
$\mathfrak{sl}(p+q, \mathbb{R})$	$\mathfrak{so}(p, q)$	$p, q \geq 1$
$\mathfrak{sl}(p+q, \mathbb{H})$	$\mathfrak{sp}(p, q)$	$p, q \geq 1$
$\mathfrak{so}(p+q, \mathbb{C})$	$\mathfrak{so}(p, q)$	$p, q \geq 2, (p, q) \neq (2, 2)$
$\mathfrak{so}(2n+1, \mathbb{C})$	$\mathfrak{so}(2n, 1)$	$n \geq 1$
$\mathfrak{so}(2n, \mathbb{C})$	$\mathfrak{so}^*(2n)$	$n \geq 3$
$\mathfrak{so}(p+r, q)$	$\mathfrak{so}(p, q) \oplus \mathfrak{so}(r)$	$p, q, r \geq 1, q : \text{奇数}$
$\mathfrak{sp}(p+q, \mathbb{C})$	$\mathfrak{sp}(p, q)$	$p, q \geq 1$
$\mathfrak{e}_{6, \mathbb{C}}$	$\mathfrak{e}_{6(-14)}$	—
$\mathfrak{e}_{6(6)}$	$\mathfrak{sp}(2, 2)$	—

$\mathfrak{e}_{7,\mathbb{C}}$	$\mathfrak{e}_{7(-5)}$	—
$\mathfrak{e}_{7,\mathbb{C}}$	$\mathfrak{e}_{7(-25)}$	—
$\mathfrak{e}_{8,\mathbb{C}}$	$\mathfrak{e}_{8(-24)}$	—
$\mathfrak{f}_{4,\mathbb{C}}$	$\mathfrak{f}_{4(-20)}$	—

表 1: コンパクト Clifford–Klein 形を持たない既約対称空間

これらの例のうち  $(\mathfrak{so}(p+r, q), \mathfrak{so}(p, q) \oplus \mathfrak{so}(r))$  ( $p, q, r \geq 1$ ,  $q$ : 奇数) 以外は, 命題 4.3 を用いることによって得られる.  $(\mathfrak{so}(p+r, q), \mathfrak{so}(p, q) \oplus \mathfrak{so}(r))$  ( $p, q, r \geq 1$ ,  $q$ : 奇数) には命題 4.3 は適用できないが, 定理 3.1 を直接使うことでコンパクト Clifford–Klein 形を持たないことが証明できる.

対称空間でない等質空間についても, 新しい例が得られた. 例えば:

**例 5.2.** 等質空間  $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R})/\mathrm{SL}(m, \mathbb{R})$  ( $n > m \geq 2$ ,  $m$ : 偶数) はコンパクト Clifford–Klein 形を持たない.

**注意 5.3.** 例 5.1 のうち一部と例 5.2 は, 同時期に Tholozan [15] によっても発見されている.

## 参考文献

- [1] Y. Benoist and F. Labourie, Sur les espaces homogènes modèles de variétés compactes. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* **76** (1992), 99–109.
- [2] A. Borel, Compact Clifford–Klein forms of symmetric spaces. *Topology* **2** (1963), 111–122.
- [3] H. Cartan, La transgression dans un groupe de Lie et dans un espace fibré principal. *Colloque de topologie (espaces fibrés), Bruxelles, 1950*, pp. 57–71, Georges Thone, Liège; Masson et Cie., Paris, 1951.
- [4] V. W. Guillemin and S. Sternberg, *Supersymmetry and equivariant de Rham theory. With an appendix containing two reprints by Henri Cartan*. Mathematics Past and Present. Springer-Verlag, Berlin, 1999.
- [5] T. Kobayashi, Proper action on a homogeneous space of reductive type. *Math. Ann.* **285** (1989), 249–263.
- [6] T. Kobayashi, Discontinuous groups and Clifford–Klein forms of pseudo-Riemannian homogeneous manifolds. *Algebraic and analytic methods in representation theory (Sønderborg, 1994)*, pp. 99–165, Perspect. Math., 17, Academic Press, San Diego, CA, 1997.
- [7] 小林俊行, 非リーマン等質空間の不連続群について, *数学* **57** (2005), 267–281.

- [8] T. Kobayashi and K. Ono, Note on Hirzebruch's proportionality principle. *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math.* **37** (1990), 71–87.
- [9] T. Kobayashi and T. Yoshino, Compact Clifford–Klein forms of symmetric spaces — revisited. *Pure Appl. Math. Q.* **1** (2005), 591–663.
- [10] F. Labourie, Quelques résultats récents sur les espaces localement homogènes compacts. *Manifolds and geometry (Pisa, 1993)*, *Sympos. Math.*, XXXVI (1996), pp. 267–283, Cambridge Univ. Press, Cambridge.
- [11] Y. Morita, A cohomological obstruction to the existence of compact Clifford–Klein forms. arXiv:1601.07359v1, to appear in *Selecta Math.*
- [12] T. Oshima and J. Sekiguchi, Eigenspaces of invariant differential operators on an affine symmetric space. *Invent. Math.* **57** (1980), 1–81.
- [13] T. Oshima and J. Sekiguchi, The restricted root system of a semisimple symmetric pair. *Group representations and systems of differential equations (Tokyo, 1982)*, pp. 433–497, Adv. Stud. Pure Math., 4, North-Holland, Amsterdam, 1984.
- [14] W. Rossmann, The structure of semisimple symmetric spaces. *Canad. J. Math.* **31** (1979), 157–180.
- [15] N. Tholozan, Volume and non-existence of compact Clifford–Klein forms. arXiv:1511.09448v1, preprint.