$\mathrm{U}(p,q)$ のテータリフトの非消滅性について

跡部　発 * (京都大学)

1　はじめに

Roger Howe は reductive dual pair と呼ばれる 2 つの Lie 群の組み (G,H) に対して, G と H, またはそれらの二重被覆の既約表現の部分集合上に全単射があることを示した．この対応を局所テータ対応 (または, Howe duality correspondence) といい, 既約表現 π と σ が互いに対応する時, $\theta(\pi)=\sigma$, $\theta(\sigma)=\pi$ 等と書く．既約表現 π がこの対応に現れない時, $\theta(\pi)=0$ とおく．この時, 次の問題が考えられる．

問題 A: いつ $\theta(\pi)\neq 0$ となるか, 決定せよ．

問題 B: $\theta(\pi)\neq 0$ の時, それがどのような表現であるかを決定せよ．

本稿では, $(G,H)=(\mathrm{U}(p,q),\mathrm{U}(r,s))$ (unitary dual pair) の時に, 既約表現のパラメトライズである局所 Langlands 対応を用いて, 緩増加表現 π に対して, 問題 A を考える．なお, p-進群から成る reductive dual pair の時も Howe duality correspondence は知られており, その場合の問題 A と問題 B は共に, A.-Gan [1] によって答えが与えられた．

2　局所テータ対応

非負整数 p,q,r,s を固定し, $n=p+q$, $m=r+s$ とおく．符号数 (p,q) のエルミート空間を $W_{p,q}$, 符号数 (r,s) の歪エルミート空間を $V_{r,s}$ と書く．それらの isometry groups は次で与えられる．

$$\mathrm{U}(W_{p,q})=\mathrm{U}(p,q)=\left\{g\in\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})\mid {}^t\overline{g}\begin{pmatrix}\mathbf{1}_p & 0\\ 0 & -\mathbf{1}_q\end{pmatrix}g=\begin{pmatrix}\mathbf{1}_p & 0\\ 0 & -\mathbf{1}_q\end{pmatrix}\right\},$$
$$\mathrm{U}(V_{r,s})=\mathrm{U}(r,s)=\left\{h\in\mathrm{GL}_m(\mathbb{C})\mid {}^t\overline{h}\begin{pmatrix}\sqrt{-1}\mathbf{1}_r & 0\\ 0 & -\sqrt{-1}\mathbf{1}_s\end{pmatrix}h=\begin{pmatrix}\sqrt{-1}\mathbf{1}_r & 0\\ 0 & -\sqrt{-1}\mathbf{1}_s\end{pmatrix}\right\}.$$

この時, $W_{p,q}\otimes_{\mathbb{C}}V_{r,s}$ は $\mathbb{R}$ 上の $2mn$-次元シンプレクティック空間と見なせ, 以下の自然な写像が考えられる．

$$\alpha_{V,W}\colon \mathrm{U}(W_{p,q})\times\mathrm{U}(V_{r,s})\to\mathrm{Sp}(W_{p,q}\otimes_{\mathbb{C}}V_{r,s}).$$

シンプレクティック群 $\mathrm{Sp}(W_{p,q}\otimes_{\mathbb{C}}V_{r,s})$ の $\mathbb{C}^1$-cover を $\mathrm{Mp}(W_{p,q}\otimes_{\mathbb{C}}V_{r,s})$ と書く．但し, $\mathbb{C}^1=\{z\in\mathbb{C}^\times\mid z\overline{z}=1\}$ である．以下, $\mathbb{C}^\times$ の指標 χ_V と χ_W で, $\chi_V|\mathbb{R}^\times=\mathrm{sgn}^m$, $\chi_W|\mathbb{R}^\times=\mathrm{sgn}^n$ となるものと, $\mathbb{R}$ の非自明な指標 ψ を固定する．Kudla は $\alpha_{V,W}$ の明示的な splitting

$$\widetilde{\alpha}_{\chi_V,\chi_W}\colon \mathrm{U}(W_{p,q})\times\mathrm{U}(V_{r,s})\to\mathrm{Mp}(W_{p,q}\otimes_{\mathbb{C}}V_{r,s})$$

*atobe@math.kyoto-u.ac.jp

を与えた ([6]). この写像で $\mathrm{Mp}(W_{p,q}\otimes_{\mathbb{C}}V_{r,s})$ の Weil 表現 ω_ψ を引き戻すことにより, $\mathrm{U}(p,q)\times\mathrm{U}(r,s)$ の Weil 表現 $\omega_{p,q,r,s}$ が得られる. Weil 表現 $\omega_{p,q,r,s}$ の商に現れる $\mathrm{U}(p,q)$ の既約 Harish-Chandra 加群の同型類のなす集合を $\mathcal{R}(\mathrm{U}(p,q),\omega_{p,q,r,s})$ で表す. 同様に $\mathcal{R}(\mathrm{U}(r,s),\omega_{p,q,r,s})$ も定義する.

定理 2.1 (Howe duality correspondence [5])**.** 関係

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{U}(p,q)\times\mathrm{U}(r,s)}(\omega_{p,q,r,s},\pi\boxtimes\sigma)\neq 0$$

により, *well-defined* な全単射

$$\mathcal{R}(\mathrm{U}(p,q),\omega_{p,q,r,s})\ni\pi\mapsto\theta_{r,s}(\pi)=\sigma\in\mathcal{R}(\mathrm{U}(r,s),\omega_{p,q,r,s})$$

が定まる.

また, $\pi\notin\mathcal{R}(\mathrm{U}(p,q),\omega_{p,q,r,s})$ の時, $\theta_{r,s}(\pi)=0$ とおく. Harish-Chandra 加群 $\theta_{r,s}(\pi)$ を π のテータリフトという. ここで, 次の問題が考えられる.

問題 2.2. $\mathrm{U}(p,q)$ の既約 *Harish-Chandra* 加群 π について, $\theta_{r,s}(\pi)\neq 0$ となるような (r,s), つまり, $\pi\in\mathcal{R}(\mathrm{U}(p,q),\omega_{p,q,r,s})$ となるような (r,s) を決定せよ.

3 局所 Langlands 対応

上の問題を π が既約緩増加表現の時に考える. 但し, 既約緩増加表現とそれに付随する既約 Harish-Chandra 加群を同一視する. この問題の答えを与えるためには, $\mathrm{U}(p,q)$ の既約緩増加表現の分類が必要となる. この分類として局所 Langlands 対応を用いる. 局所 Langlands 対応とは, Langlands [7], Vogan [14], Shelstad [10], [11], [12] 等, 多くの数学者によって確立された連結簡約 Lie 群の既約表現の分類法である. 局所 Langlands 対応は, 既約離散系列表現に対しては, その Harish-Chandra パラメーターで分類する方法と本質的に同じである.

局所 Langlands 対応とは, 既約緩増加表現を緩増加な L-パラメーターによって, 分類する方法である. 群 $\mathrm{U}_n(\mathbb{R})$ の緩増加な L-パラメーターとは, 組み $\lambda=(\phi,\eta)$ であって,

- $\phi\colon\mathbb{C}^\times\to\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ は $\mathbb{C}^\times$ の n-次元表現で次の形であるもの:

  $$\phi=m_1\chi_{2\alpha_1}\oplus\cdots\oplus m_u\chi_{2\alpha_u}\oplus(\xi_1\oplus\cdots\oplus\xi_v)\oplus({}^c\xi_1^{-1}\oplus\cdots\oplus{}^c\xi_v^{-1}).$$

  但し, $\alpha_i\in(1/2)\mathbb{Z}$, $2\alpha_i\equiv n-1 \bmod 2$, $\alpha_1>\cdots>\alpha_u$ であって, 指標 $\chi_{2\alpha_i}$ は

  $$\chi_{2\alpha_i}(z)=\overline{z}^{-2\alpha_i}(z\overline{z})^{\alpha_i}$$

  で定義されるもの, $m_i>0$ は $\chi_{2\alpha_i}$ の重複度, ξ_i は上記以外のユニタリー指標, ${}^c\xi_i^{-1}(z)=\xi_i(\overline{z}^{-1})$ である. 特に, $m_1+\cdots+m_u+2v=n$ である.

- $\eta\colon A_\phi\to\{\pm1\}$ は ϕ の component group A_ϕ の指標である. 但し, A_ϕ は $\chi_{2\alpha_i}$ $(i=1,\ldots,u)$ に付随する基底 $e_{2\alpha_i}$ を持つ自由 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-加群

  $$A_\phi=(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})e_{2\alpha_1}\oplus\cdots\oplus(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})e_{2\alpha_u}$$

  である. 特に, $\#A_\phi=2^u$ が成り立つ.

また, $v=0$ であり, すべての i について $m_i=1$ が成り立つ時, $\lambda=(\phi,\eta)$ を離散的な L-パラメーターという.

緩増加な L-パラメーターを用いて, 以下の様に $\mathrm{U}(p,q)$ の既約緩増加表現は分類される.

定理 3.1 (局所 Langlands 対応)**.** *自然な全単射*

$$\bigsqcup_{p+q=n} \{\mathrm{U}(p,q) \text{ の既約緩増加表現 } \pi\} \longleftrightarrow \{\mathrm{U}_n(\mathbb{R}) \text{ の緩増加な } L\text{-パラメーター } \lambda = (\phi,\eta)\},$$

$$\pi = \pi(\phi,\eta) \longmapsto \lambda = (\phi,\eta)$$

であって, 次を満たすものが存在する.

(1) $\mathrm{U}(p,q)$ *の表現* $\pi = \pi(\phi,\eta)$ *が離散系列* $\iff$ *その* L*-パラメーター* $\lambda = (\phi,\eta)$ *が離散的.*

(2) L*-パラメーター* $\lambda = (\phi,\eta)$ *が離散的で,* $\phi = \chi_{2\alpha_1} \oplus \cdots \oplus \chi_{2\alpha_n}$ $(\alpha_1 > \cdots > \alpha_n)$ *の時, 対応する既約離散系列表現* $\pi = \pi(\phi,\eta)$ *の Harish-Chandra パラメーター* $\lambda = (\lambda_1,\ldots,\lambda_p;\lambda'_1,\ldots,\lambda'_q)$ $(\lambda_1 > \cdots > \lambda_p,\ \lambda'_1 > \cdots > \lambda'_q)$ *は次で特徴付けられる.*

- $\{\lambda_1,\ldots,\lambda_p,\lambda'_1,\ldots,\lambda'_q\} = \{\alpha_1,\ldots,\alpha_n\}$;
- $\alpha_i \in \{\lambda_1,\ldots,\lambda_p\} \iff \eta(e_{2\alpha_i}) = (-1)^{i-1}$.

特に, $\pi = \pi(\phi,\eta)$ *が* $\mathrm{U}(p,q)$ *の表現であるための必要十分条件は,*

$$p = \#\{i \in \{1,\ldots,n\} \mid \eta(e_{2\alpha_i}) = (-1)^{i-1}\},$$
$$q = \#\{i \in \{1,\ldots,n\} \mid \eta(e_{2\alpha_i}) = (-1)^{i}\}$$

である.

(3) 局所 Langlands 対応は, 放物型誘導表現と整合的である.

以下の主定理の証明では, 局所 Gan–Gross–Prasad 予想 ([3]) を用いる. Sun–Zhu の結果により, $\mathrm{U}(p,q)$ の任意の既約緩増加表現 π と $\mathrm{U}(p+1,q)$ の任意の既約緩増加表現 π' に対して,

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Hom}_{\mathrm{U}(p,q)}(\pi',\pi) \leq 1$$

が成り立つことが知られている. これがいつ等号になるかを局所 Langalnds 対応の言葉で与えるのが局所 Gan–Gross–Prasad 予想である.

予想 3.2 (局所 Gan–Gross–Prasad 予想)**.** $\pi = \pi(\phi,\eta)$ *を* $\mathrm{U}(p,q)$ *の既約緩増加表現とし,* $\pi' = \pi(\phi',\eta')$ *を* $\mathrm{U}(p',q)$ *の既約緩増加表現とする. また,* ϕ *と* ϕ' *は次の形であるとする.*

$$\phi = \chi_{2\alpha_1} \oplus \cdots \oplus \chi_{2\alpha_u} \oplus (\xi_1 \oplus \cdots \oplus \xi_v) \oplus ({}^c\xi_1^{-1} \oplus \cdots \oplus {}^c\xi_v^{-1}),$$
$$\phi' = \chi_{2\beta_1} \oplus \cdots \oplus \chi_{2\beta_{u'}} \oplus (\xi'_1 \oplus \cdots \oplus \xi'_{v'}) \oplus ({}^c{\xi'_1}^{-1} \oplus \cdots \oplus {}^c{\xi'_{v'}}^{-1}).$$

但し,

- $2\alpha_i \equiv n-1 \bmod 2$, $2\beta_j \equiv n \bmod 2$, $\alpha_1 > \cdots > \alpha_u$, $\beta_1 > \cdots > \beta_{u'}$;
- ξ_i, ξ'_j *は* $\mathbb{C}^\times$ *のユニタリー指標 (*$\chi_{2\alpha}$, $\chi_{2\beta}$ *の形でも良い);*
- $n = u + 2v$, $n+1 = u' + 2v'$.

この時, $\mathrm{Hom}_{\mathrm{U}(p,q)}(\pi',\pi) \neq 0$ *となるための必要十分条件は, 任意の* $e_{2\alpha} \in A_\phi$ *と* $e_{2\beta} \in A_{\phi'}$ *に対して*

$$\eta(e_{2\alpha}) = (-1)^{\#\{j \in \{1,\ldots,u'\} \mid \beta_j < \alpha\} + n},$$
$$\eta'(e_{2\beta}) = (-1)^{\#\{i \in \{1,\ldots,u'\} \mid \alpha_i < \beta\} + n}$$

が成り立つことであろう.

局所 Gan–Gross–Prasad 予想は, π, π' が共に離散系列の時は, He [4] によって証明された. 一般には, Beuzart-Plessis [2] が弱い形で示している.

4 定義と主定理

主定理を述べるために, 以下の定義をする.

定義 4.1. π を $\mathrm{U}(p,q)$ の既約緩増加表現とし, $\lambda=(\phi,\eta)$ をその L-パラメーターとする. $\kappa\in\{1,2\}$ と $\mathbb{C}^\times$ の指標 χ_V で $\chi_V|\mathbb{R}^\times=\mathrm{sgn}^{\kappa+n}$ となるものを固定する. また,

$$\phi\chi_V^{-1}=\chi_{2\alpha_1}\oplus\cdots\oplus\chi_{2\alpha_u}\oplus(\xi_1\oplus\cdots\oplus\xi_v)\oplus({}^c\xi_1^{-1}\oplus\cdots\oplus{}^c\xi_v^{-1})$$

を予想 *3.2* と同様とする. 但し, $2\alpha_i\equiv\kappa-1 \bmod 2$ とする.

(1) $\mathcal{T}$ を $\kappa-2$ と次を満たす正整数 $k\equiv\kappa \bmod 2$ からなる集合とする.

(chain condition) $k-1,k-3,\ldots,-k+1\in\{2\alpha_1,\ldots,2\alpha_u\}$;

(alternating condition) $\eta(e_{V,k+1-2i})\neq\eta(e_{V,k-1-2i})$ が全ての $i=1,\ldots,k-1$ で成り立つ.

但し, $e_{V,2\alpha}$ は $\chi_V\chi_{2\alpha}$ に対応する A_ϕ の元である. この時, $k_\lambda=\max\mathcal{T}$ とおく.

(2) 非負整数の組み (r_λ,s_λ) を次で定める.

$$r_\lambda=\#\left\{i\in\{1,\ldots,u\}\mid|\alpha_i|\geq\frac{k_\lambda+1}{2},\ (-1)^{i-1}\eta(e_{V,2\alpha_i})\alpha_i>0\right\}+v,$$
$$s_\lambda=\#\left\{i\in\{1,\ldots,u\}\mid|\alpha_i|\geq\frac{k_\lambda+1}{2},\ (-1)^{i-1}\eta(e_{V,2\alpha_i})\alpha_i<0\right\}+v.$$

(3) $(1/2)\mathbb{Z}\times\{\pm1\}$ の部分集合 X_λ を次で定める.

$$\begin{aligned}X_\lambda=&\{(\alpha_i,(-1)^{i-1}\eta(e_{V,2\alpha_i}))\mid i=1,\ldots,u\}\\&\cup\{(\alpha,+1),(\alpha,-1)\mid\chi_{2\alpha}\subset\phi,\ \alpha\neq\alpha_i,\ \eta(e_{V,2\alpha})=(-1)^{\#\{i\in\{1,\ldots,u\}\ \mid\ \alpha_i>\alpha\}+1}\}.\end{aligned}$$

(4) 次のようにして, 列 $X_\lambda=X_\lambda^{(0)}\supset X_\lambda^{(1)}\supset\cdots\supset X_\lambda^{(n)}\supset\cdots$ を構成する. 射影 $(1/2)\mathbb{Z}\times\{\pm1\}\to(1/2)\mathbb{Z}$ における $X_\lambda^{(j)}$ の像を $\{\beta_1,\ldots,\beta_{u_j}\}$ とおく時, 集合 S を $i\in\{2,\ldots,u_j\}$ で,

- $(\beta_{i-1},+1),(\beta_i,-1)\in X_\lambda^{(j)}$;
- $\min\{|\beta_{i-1}|,|\beta_i|\}\geq(k_\lambda+1)/2$;
- $\beta_{i-1}\beta_i\geq0$

となるもの全体とする. この時, $X_\lambda^{(j)}$ の部分集合 $X_\lambda^{(j+1)}$ を

$$X_\lambda^{(j+1)}=X_\lambda^{(j)}\setminus\left(\bigcup_{i\in S}\{(\beta_{i-1},+1),(\beta_i,-1)\}\right)$$

と定める. この時, $X_\lambda^{(n+1)}=X_\lambda^{(n)}$ である. さらに, $X_\lambda^{(\infty)}=X_\lambda^{(n)}$ と書く.

(5) 整数 T と $\epsilon\in\{\pm1\}$ に対して, 有限集合 $\mathcal{C}_\lambda^\epsilon(T)$ を次で定める.

$$\mathcal{C}_\lambda^\epsilon(T)=\left\{(\alpha,\epsilon)\in X_\lambda^{(\infty)}\mid 0\leq\epsilon\alpha+\frac{k_\lambda-1}{2}<T\right\}.$$

以上の定義の下, 主定理は次のように述べられる.

定理 4.2. 局所 *Gan–Gross–Prasad* 予想 *(*予想 *3.2)* を仮定する. π を $\mathrm{U}(p,q)$ の既約緩増加表現とし, $\lambda=(\phi,\eta)$ をその L-パラメーターとする. ここで, $k=k_\lambda$, $r=r_\lambda$, $s=s_\lambda$ とおく.

(1) $k=-1$ であったとする．この時, 整数 l と $t\geq 1$ に対して, $\theta_{r+2t+1+l,s+l}(\pi)\neq 0$ となるための必要十分条件は, $l\geq 0$ かつ $\#\mathcal{C}_\lambda^\epsilon(t+l)\leq l$ が各 $\epsilon\in\{\pm1\}$ について成り立つことである．また, 整数 l に対して, $\theta_{r+1+l,s+l}(\pi)\neq 0$ となるための必要十分条件は,

$$\begin{cases} l\geq 0 & \phi \text{ が } \chi_V \text{ を含まない時,} \\ l\geq 1 & (0,\pm1)\in X_\lambda \text{ となる時,} \\ l\geq -1 & \text{上記以外の時} \end{cases}$$

である．

(2) $k\geq 0$ であったとする．この時, 整数 l と $t\geq 1$ に対して, $\theta_{r+2t+l,s+l}(\pi)\neq 0$ となるための必要十分条件は, $l\geq k$ かつ $\#\mathcal{C}_\lambda^\epsilon(t+l)\leq l$ が各 $\epsilon\in\{\pm1\}$ について成り立つことである．また, 次の *3* 条件を考える．

(chain condition 2) $\phi\chi_V^{-1}$ は $\chi_{k+1}+\chi_{k-1}+\cdots+\chi_{-k+1}+\chi_{-k-1}$ を含む．

(even-ness condition) χ_{k+1} と χ_{-k-1} の内, 少なくとも一方は重複度偶数で $\phi\chi_V^{-1}$ に現れる．

(chain condition 2) $\eta(e_{V,k+1-2i})\neq\eta(e_{V,k-1-2i})$ が全ての $i=0,\ldots,k$ で成り立つ．

この時, 整数 l に対して, $\theta_{r+l,s+l}(\pi)\neq 0$ となるための必要十分条件は,

$$\begin{cases} l\geq -1 & \text{上の 3 条件を満たす時,} \\ l\geq 0 & \text{上記以外の時} \end{cases}$$

である．

注意 4.3. *(1)* 整数 ν で $\nu\equiv\kappa+n \bmod 2$ となるものに対して, χ_V が $\chi_V(xe^{\sqrt{-1}\theta})=e^{\nu\sqrt{-1}\theta}$ *(*$x>0$, $\theta\in\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$*)* の形の時, 任意の既約緩増加表現 π に対して,

$$\theta_{r,s}(\pi)\neq 0 \iff \theta_{s,r}(\pi^\vee\otimes\det{}^\nu)\neq 0$$

となることが知られている．但し, $\pi^\vee$ は π の反傾表現である．これと定理 *4.2* により, $\pi\in\mathcal{R}(\mathrm{U}(p,q),\omega_{p,q,r,s})$ となる (r,s) が完全に決定できる．

(2) 表現 π が離散系列の時は, 局所 *Gan–Gross–Prasad* 予想を *He [4]* が示した場合のみ使う．ゆえに, 定理 *4.2* は離散系列表現については予想を仮定することなく成り立つ．

定理 *4.2* の証明の方針. 定理 4.2 は次の三つのステップにより証明される．

ステップ 1: $t\geq 1$ の時のテータリフトの非消滅性. 局所 Gan–Gross–Prasad 予想と seesaw 等式を用いて帰納法を回す．帰納法の最初のステップは (almost) equal rank case のテータ対応 (Paul の結果 [8], [9]) である．

ステップ 2: $t\geq 1$ の時のテータリフトの消滅性. Seesaw 等式と指標 $\det^a$ のテータリフトの消滅性を用いる．

ステップ 3: $t=0$ の場合. Conservation relation (Sun–Zhu [13]) を用いる．

□

例 4.4. $\mathrm{U}(4,5)$ の離散系列表現 π で, その *Harish-Chandra* パラメーターが

$$\lambda = (6,5,4,-7;3,1,0,-3,-8)$$

であるものについて, いつ, $\theta_{r,s}(\pi) \neq 0$ *(*但し, $r+s \in 2\mathbb{Z}$*)* となるかを考える. 指標 χ_V は自明指標であるとする. 定義 *4.1* より, $k_\lambda = 1$, $(r_\lambda, s_\lambda) = (5,3)$ であり,

$$\begin{aligned} X_\lambda &= \{(6,+1),(5,+1),(4,+1),(3,-1),(1,-1),(0,-1),(-3,-1),(-7,+1),(-8,-1)\}, \\ X_\lambda^{(\infty)} &= \{(6,+1), \qquad (0,-1),(-3,-1), \qquad \} \end{aligned}$$

となる. ゆえに,

$$\mathcal{C}_\lambda^+(T) = \begin{cases} \emptyset & \textit{if } 0 < T \leq 6, \\ \{(6,+1)\} & \textit{if } T > 6, \end{cases} \quad \mathcal{C}_\lambda^-(T) = \begin{cases} \{(0,-1)\} & \textit{if } 0 < T \leq 3, \\ \{(0,-1),(-3,-1)\} & \textit{if } T > 3 \end{cases}$$

となる. 同様に, 反傾表現 $\pi^\vee$ の *Harish-Chandra* パラメーター

$$\lambda^\vee = (7,-4,-5,-6;8,3,0,-1,-3)$$

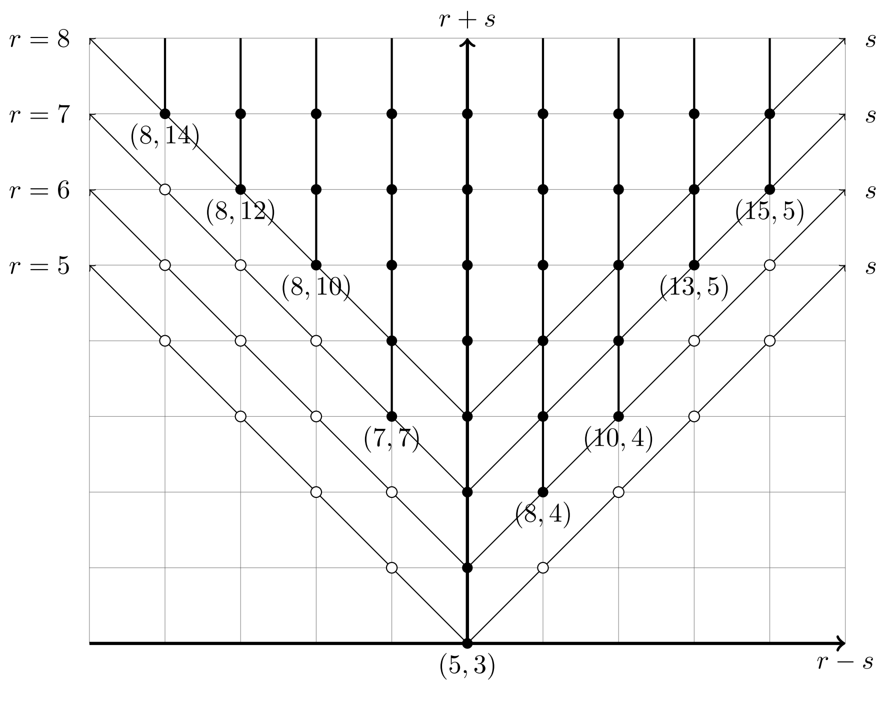
では

$$\begin{aligned} X_{\lambda^\vee} &= \{(8,-1),(7,+1),(3,-1),(0,-1),(-1,-1),(-3,-1),(-4,+1),(-5,+1),(-6,+1)\}, \\ X_{\lambda^\vee}^{(\infty)} &= \{(8,-1), \qquad (0,-1),(-1,-1),(-3,-1),(-4,+1),(-5,+1),(-6,+1)\}. \end{aligned}$$

となる. ゆえに, $\mathcal{C}_{\lambda^\vee}^+(T) = \emptyset$ であり,

$$\mathcal{C}_{\lambda^\vee}^-(T) = \begin{cases} \{(0,-1)\} & \textit{if } 0 < T \leq 1, \\ \{(0,-1),(-1,-1)\} & \textit{if } 1 < T \leq 3, \\ \{(0,-1),(-1,-1),(-3,-1)\} & \textit{if } T > 3 \end{cases}$$

となる. 従って, $\theta_{r,s}(\pi) \neq 0$ となる (r,s) は次の図において黒のプロットとなる部分である.



参考文献

[1] H. Atobe and W. T. Gan, *Local theta correspondence of tempered representations and Langlands parameters*, arXiv:1602.01299.

[2] R. Beuzart-Plessis, *A local trace formula for the Gan-Gross-Prasad conjecture for unitary groups: the archimedean case*, arXiv:1506.01452v2.

[3] W. T. Gan, B. H. Gross and D. Prasad, *Symplectic local root numbers, central critical L-values, and restriction problems in the representation theory of classical groups*, *Astérisque* No. **346** (2012), 1–109.

[4] H. He, *The Gan–Gross–Prasad Conjecture for* $\mathrm{U}(p, q)$, arXiv:1508.02032v1.

[5] R. Howe, *Transcending classical invariant theory*, *J. Amer. Math. Soc.* **2** (1989), no. 3, 535–552.

[6] S. S. Kudla, *Splitting metaplectic covers of dual reductive pairs*, *Israel J. Math.* **87** (1994), no. 1-3, 361–401.

[7] R. P. Langlands, *On the classification of irreducible representations of real algebraic groups*, *Representation theory and harmonic analysis on semisimple Lie groups*, 101–170, Math. Surveys Monogr., 31, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1989.

[8] A. Paul, *Howe correspondence for real unitary groups*, *J. Funct. Anal.* **159** (1998), no. 2, 384–431.

[9] A. Paul, *Howe correspondence for real unitary groups.* II, *Proc. Amer. Math. Soc.* **128** (2000), no. 10, 3129–3136.

[10] D. Shelstad, *Tempered endoscopy for real groups.* I. *Geometric transfer with canonical factors*, *Representation theory of real reductive Lie groups*, 215–246, Contemp. Math., **472**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2008.

[11] D. Shelstad, *Tempered endoscopy for real groups.* II. *Spectral transfer factors*, *Automorphic forms and the Langlands program*, 236–276, Adv. Lect. Math. (ALM), **9**, Int. Press, Somerville, MA, 2010.

[12] D. Shelstad, *Tempered endoscopy for real groups.* III. *Inversion of transfer and L-packet structure*, *Represent. Theory* **12** (2008), 369–402.

[13] B. Sun and C.-B. Zhu, *Conservation relations for local theta correspondence*, *J. Amer. Math. Soc.* **28** (2015), no. 4, 939–983.

[14] D. A. Vogan, Jr, *The local Langlands conjecture*, *Representation theory of groups and algebras*, 305–379, *Contemp. Math.*, **145**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1993.