局所体上の対称行列と多変数 q-超幾何多項式

Symmetric Matrices over a Local Field and Multivariate q-Hypergeometric Polynomials.

京都大学大学院 理学研究科　川村晃英

Kyoto University, Kawamura Koei

0　はじめに

有限アーベル群 A 上の有限群 G 不変な関数のフーリエ変換を考える．それを記述する「核関数」は，Gelfand pair $(A \rtimes G, G)$ の帯球関数や，association scheme の固有値と関連して，いくつかの例で調べられている．例えば A が有限体 $\mathbb{F}$ 上の n 次行列の全体 $A = \mathrm{Mat}_n(\mathbb{F})$ で，$G = \mathrm{GL}_n(\mathbb{F}) \times \mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$ の場合，核関数には affine q-Krawtchouk 多項式という q-超幾何型の直交多項式が現れることが知られている (Dersarte[1])．またその発展として，有限体を有限環 $\mathfrak{o}/\mathfrak{p}^\ell$ に置き換える（ここで $\mathfrak{o}$ は非アルキメデス的局所体の整数環，$\mathfrak{p}$ はその極大イデアル，$\ell \geq 1$ は自然数）．すると核関数には ℓ-変数版の affine q-Krawtchouk 多項式が現れる (川村 [11])．本稿では，A として $\mathfrak{o}/\mathfrak{p}^\ell$ 上の n 次対称行列の全体 $A = \mathrm{Sym}_n(\mathfrak{o}/\mathfrak{p}^\ell)$，$G = \mathrm{GL}_n(\mathfrak{o})$ の場合を考える．

第 1 節では，核関数の記述に用いる道具として，affine q-Krawtchouk 多項式およびその多変数版を紹介する．第 2 節では，考察対象である群不変フーリエ変換の核関数について，一般に述べる．第 3 節では，有限体 $\mathbb{F}$ 上の対称行列についての結果を述べ，次節への参考とする．第 4 節では，$\mathfrak{o}/\mathfrak{p}^\ell$ 上の対称行列の場合の考察を行い，現在のところ求められている結果を述べる．

1　affine q-Krawtchouk 多項式とその多変数版

超幾何型・選点系の直交多項式である Krawtchouk 多項式には，いくつかの q-analogue が知られているが，その 1 つに affine q-Krawtchouk 多項式がある．Koornwinder[3] によると，Krawtchouk 多項式には 2 つの群論的解釈があるが，その一方が対称群の帯球関数として現れるということである．この観点から Krawtchouk 多項式を q-analogue 化したものが，affine q-Krawtchouk 多項式であると考えられる．これは最初 Delsarte[1] により，有限体上の全行列群 $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{F})$ に関する帯球関数として見出された．その他，有限体上の交代行列，エルミート行列，対称行列などに関する帯球関数が，affine q-Krawtchouk 多項式を用いて記述される（Stanton[7] に概説がある）．

定義は，q-超幾何関数 ${}_3\varphi_2$ を用いて，次式で与えられる[2]．

定義 1.1. $<$ *affine q-Krawtchouk* 多項式 $>$

$n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $x, y \in \{0, 1, \cdots, n\}$ とパラメータ p, q に対し，

$$ {}^{\mathrm{aff}}K_y(x;p,n;q) = {}_3\varphi_2\left(\begin{matrix} q^{-x},\ q^{-y},\ 0 \\ q^{-n},\ p \end{matrix} ;\ q,\ q\right) = \sum_{k=0}^{y} \frac{(q^{-x};q)_k\ (q^{-y};q)_k}{(q^{-n};q)_k\ (p;q)_k\ (q;q)_k}\, q^k. \tag{1} $$

[2] いくつかの流儀があるが，ここでは Stanton[7] のものを正規化した形を採用する．

ここで，$(a;q)_k=\prod_{i=0}^{k-1}(1-aq^i)$ である．直交関係式は次で与えられる：ガウスの q - 2 項係数

$$\begin{bmatrix} n \\ x \end{bmatrix}_q = \frac{(q^n;q^{-1})_x}{(q;q)_x} \qquad (\, 0 \le x \le n\,) \tag{2}$$

を重みに用いて，

$$\sum_{x=0}^{n} {}^{\mathrm{aff}}K_y(x;p,n;q)\,{}^{\mathrm{aff}}K_z(x;p,n;q) \begin{bmatrix} n \\ x \end{bmatrix}_q p^{n-x}(p;q)_x = \ \delta_{y,z} \begin{bmatrix} n \\ y \end{bmatrix}_q^{-1} \frac{p^y}{(p;q)_y}. \tag{3}$$

次に，多変数 affine q-Krawtchouk 多項式を紹介する．これは筆者が [11] で導入し，有限環 $\mathfrak{o}/\mathfrak{p}^\ell$（記号は前節）上の全行列群の帯球関数として現れることを述べた．Mizukawa [6] などで研究されている多変数 Krawtchouk 多項式の q-analogue の 1 つとも言える．

変数の数を $\ell \ge 1$ とし，ℓ 変数 $x=(x_0,x_1,\cdots,x_{\ell-1})$ と $0 \le k \le \ell-1$ に対し，次の記号を用いる：

$$|x_k| = \sum_{i \le k} x_i, \quad |x^k| = \sum_{i \ge k} x_i, \quad |x| = \sum_{\text{全ての } i} x_i. \tag{4}$$

変数 x および次数 $y=(y_0,y_1,\cdots,y_{\ell-1})$ の動く変域として，

$$X(\ell,n) = \{x \in (\mathbb{Z}_{\ge 0})^\ell \mid |x| \le n\} \tag{5}$$

と定める．これらの記号のもと，

定義 1.2. $<$ ℓ 変数 *affine q-Krawtchouk* 多項式 $>$

$n \in \mathbb{Z}_{\ge 0}$, $x,y \in X(\ell,n)$ およびパラメータ $p=(p_0,\cdots,p_{\ell-1})$, q に対し，

$$\begin{aligned} &{}^{\mathrm{aff}}K_y^{(\ell)}(x;p,n;q) \\ &= \frac{1}{q^{N(x,y)}(q^n;q^{-1})_{|y|}} \prod_{i=0}^{\ell-1} \frac{(q^{m_i};q^{-1})_{y_i}(p_i^{-1}q^{-n+m_i};q^{-1})_{y_i}}{(p_i^{-1}q^{-|y^{i+1}|};q^{-1})_{y_i}} \ {}^{\mathrm{aff}}K_{y_i}\big(x_i;p_iq^{n-m_i},m_i;q\big)\,, \end{aligned} \tag{6}$$

ここで

$$m_i = n - |x_{i-1}| - |y^{i+1}|, \quad N(x,y) = \sum_{i<j}(j-i-1)x_iy_j \tag{7}$$

とする．ただしこれは直交多項式ではなく，双直交多項式 (biorthogonal polynomial) である．すなわち，まず次のように ‘双対’ を定義する：

$${}^{\mathrm{aff}}\tilde{K}_y^{(\ell)}(x;p,n;q) = {}^{\mathrm{aff}}K_{x'}^{(\ell)}(y'\,;\,p',n;q), \tag{8}$$

ここで，$x'=(x_{\ell-1},\cdots,x_1,x_0)$（逆走）とする．他の文字・パラメータについても同様．すると，以下のような双直交関係式 (biorthoganality relation) が成り立つ：重みに q -多項係数

$$\begin{bmatrix} n \\ x \end{bmatrix}_q = \frac{(q^n;q^{-1})_{|x|}}{\prod_{i=0}^{\ell-1}(q;q)_{x_i}} \tag{9}$$

を用いて，

$$\sum_{x\in X(\ell,n)} {}^{\mathrm{aff}}K_y^{(\ell)}(x;p,n;q)\, {}^{\mathrm{aff}}\tilde{K}_z^{(\ell)}(x;p,n;q)\ q^{C(x)} \begin{bmatrix} n \\ x \end{bmatrix}_q \prod_{i=0}^{\ell-1} p_i^{n-|x_i|}(p_i q^{|x_{i-1}|};q)_{x_i}$$
$$= \ \delta_{y,z}\, q^{-C(y)} \ \begin{bmatrix} n \\ y \end{bmatrix}_q^{-1} \prod_{i=0}^{\ell-1} \frac{p_i^{|y^i|}}{(p_i q^{|y^{i+1}|};q)_{y_i}}, \tag{10}$$

ここで，$C(x) = \sum_{i<j}(j-i-1)x_i x_j + (n-|x|)\sum_{i=0}^{\ell-1}(\ell-i-1)x_i$.

2 有限アーベル上の群不変フーリエ変換

ここでは，本稿の考察対象となる有限アーベル群上の群不変フーリエ変換について述べる（途中までは，川村 [10] と同内容である）.

A を有限アーベル群とし，その指標群を $\hat{A}$ で表す．A 上関数 $\varphi \in \mathbb{C}[A]$ に対し，そのフーリエ変換，$\hat{A}$ 上関数 $\mathcal{F}\varphi \in \mathbb{C}[\hat{A}]$ が次式で定義される：

$$\mathcal{F}\varphi(\xi) \ = \ \sum_{a\in A}\varphi(a)\overline{\xi(x)} \qquad (\xi \in \hat{A}). \tag{11}$$

また，逆フーリエ変換は次式で定義される：$\psi \in \mathbb{C}[\hat{A}]$ に対して，

$$\bar{\mathcal{F}}\psi(a) \ = \ \frac{1}{|A|}\sum_{\xi\in\hat{A}}\psi(\xi)\xi(a) \qquad (a \in A). \tag{12}$$

これらは互いに逆変換である.

G を有限群とし，これが A へ群自己同型としての作用 ρ を持つとする．このとき指標群 $\hat{A}$ に対しても，G は反傾作用 $\hat{\rho}$ で働く．作用 ρ，$\hat{\rho}$ は，それぞれ G の表現 $(\rho,\mathbb{C}[A])$，$(\hat{\rho},\mathbb{C}[\hat{A}])$ へと持ち上がる．この時，フーリエ変換 $\mathcal{F}$ はこれらの表現のあいだの絡作用素となり，それにより，$\mathcal{F}$ を G-不変な関数の空間 $\mathbb{C}[A]^G$，$\mathbb{C}[\hat{A}]^G$ の間の変換に制限できる：

$$\mathcal{F}:\mathbb{C}[A]^G \to \mathbb{C}[\hat{A}]^G. \tag{13}$$

逆変換 $\bar{\mathcal{F}}$ についても同様である．これらを群不変フーリエ変換と呼ぶ.

A, $\hat{A}$ の G-軌道全体をそれぞれ $G\backslash A$, $G\backslash\hat{A}$ と表す．$\mathcal{P}\in G\backslash\hat{A}$，$\mathcal{O}\in G\backslash A$ に対し，

$$\Phi(\mathcal{P},\mathcal{O}) \ = \ \sum_{a\in\mathcal{O}}\overline{\xi(a)}, \qquad \text{ここで } \xi\in\mathcal{P} \tag{14}$$

とおく（反傾作用の定義より，右辺は $\xi\in\mathcal{P}$ の取り方によらない）．すると群不変フーリエ変換 (13) は，$\Phi(\mathcal{P},\mathcal{O})$ を核関数とする積分変換の形で表される．すなわち $\varphi\in\mathbb{C}[A]^G$ および $\mathcal{P}\in G\backslash\hat{A}$ に対して，

$$\mathcal{F}\varphi(\mathcal{P}) \ = \ \sum_{\mathcal{O}\in G\backslash A}\Phi(\mathcal{P},\mathcal{O})\,\varphi(\mathcal{O}) \tag{15}$$

が成り立つ.

本稿では詳細を略すが，核関数 $\Phi(\mathcal{P},\mathcal{O})$ は Gelfand pair $(A\rtimes G, G)$ の帯球関数と（ほぼ）同定できる [8]．また，群作用から得られる association scheme の隣接行列の固有値としても捉えられる [9]．それらの文脈の中で，いくつかの例について，核関数 $\Phi(\mathcal{P},\mathcal{O})$ の具体形が求められている．例えば $A=\mathrm{Mat}_n(\mathbb{F})$, $G=\mathrm{GL}_n(\mathbb{F})\times\mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$ の場合が，Delsarte[1] が最初に求めた affine q-Krawtchouk 多項式である．また，$A=$

$\mathrm{Mat}_n(\mathfrak{o}/\mathfrak{p}^\ell)$, $G=\mathrm{GL}_n(\mathfrak{o})\times\mathrm{GL}_n(\mathfrak{o})$ の場合が，ℓ-変数 affine q-Krawtchouk 多項式である．しかし，本稿で取り組む有限体・局所体上の対称行列の例の場合，核関数 (14) そのものではなく，それを適当な形に線形変換したものを求める方がよい（その場合に，affine q-Krawtchouk 多項式を用いた記述が行える）.

その変換について説明するために，核関数をフーリエ変換の行列要素として捉えよう．軌道 $\mathcal{O}\in G\backslash A$ の定義関数を $\chi_{\mathcal{O}}$ と表す（$\mathcal{O}$ 上で値 1，$A-\mathcal{O}$ 上で値 0 をとる関数）．すると，$\mathcal{A}=\{\chi_{\mathcal{O}}\mid \mathcal{O}\in G\backslash A\}$ は $\mathbb{C}[A]^G$ の $\mathbb{C}$-基底となる．同様に，軌道 $\mathcal{P}\in G\backslash\hat{A}$ の定義関数を $\hat{\chi}_{\mathcal{P}}$ とすると，$\hat{\mathcal{A}}=\{\hat{\chi}_{\mathcal{P}}\mid\mathcal{P}\in G\backslash\hat{A}\}$ は $\mathbb{C}[\hat{A}]^G$ の基底である．これらの基底のもと，線形変換である (13) を行列表示すると，

$$\Phi=\ (\Phi(\mathcal{P},\mathcal{O}))_{\mathcal{P}\in G\backslash\hat{A},\mathcal{O}\in G\backslash A} \tag{16}$$

となることが (15) よりわかる．ここで，$\mathbb{C}[A]^G$, $\mathbb{C}[\hat{A}]^G$ の基底をそれぞれ他の適当なもの $\mathcal{B}$, $\hat{\mathcal{B}}$ に変換する．ただし，$\mathcal{A}$ と $\mathcal{B}$ の間の基底の変換行列 P と，$\hat{\mathcal{A}}$ と $\hat{\mathcal{B}}$ の間のそれは同一としておこう．このとき，$\mathcal{B}$，$\hat{\mathcal{B}}$ のもとでフーリエ変換 $\mathcal{F}$ を表す行列を Ψ と表し，その行列要素を変換核関数と呼び，我々の求めるべき対象とする．具体的な $\mathcal{B}$, $\hat{\mathcal{B}}$ の取り方については，例を扱う際に述べる．

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{C}[A]^G \arrow[r, "\mathcal{F}"] & \mathbb{C}[\hat{A}]^G \\
\mathbb{C}^{|G\backslash A|} \arrow[u, "\mathcal{A}"'] \arrow[r, "\Phi"] & \mathbb{C}^{|G\backslash A|} \arrow[u, "\hat{\mathcal{A}}"] \\
\mathbb{C}^{|G\backslash A|} \arrow[u, "P"'] \arrow[r, "\Psi"] \arrow[uu, bend left, "\mathcal{B}"] & \mathbb{C}^{|G\backslash A|} \arrow[u, "P"] \arrow[uu, bend right, "\hat{\mathcal{B}}"']
\end{tikzcd} \tag{17}$$

3 Sym($\mathbb{F}$) 上の $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$-不変フーリエ変換

$\mathbb{F}$ を有限体，その位数 q を奇数とする．本節では前節における設定の一例として，$\mathbb{F}$ 上の対称行列全体のなすアーベル群 $\mathrm{Sym}_n(\mathbb{F})$ 上の，$\mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$ 不変関数のフーリエ変換について調べる．作用 ρ は次式で与えられる：

$$\rho(g)a=ga\,{}^tg \qquad (a\in\mathrm{Sym}(\mathbb{F}),\ g\in\mathrm{GL}_n(\mathbb{F})). \tag{18}$$

なお，ここで得られる計算結果はすでに Hodges[2] に見られるものである．しかし，我々は変換核関数としてこれを捉え直し，次節で多変数の場合を考察するための準備・参考とする．

まず，本節および次節を通して用いる記号をまとめておく．$\mathbb{F}$ には 0 を除き，平方元と非平方元が半々ずつ存在する．そこで元 $a\in\mathbb{F}$ の符号を，それが平方元ならば $\mathrm{sgn}(a)=1$，非平方元ならば $\mathrm{sgn}(a)=-1$ と定める．$\epsilon=\mathrm{sgn}(-1)$ とおく：

$$\epsilon=\begin{cases}1 & \text{if}\quad q\equiv 1(\mathrm{mod}\ 4),\\ -1 & \text{if}\quad q\equiv 3(\mathrm{mod}\ 4)\end{cases} \tag{19}$$

がなりたつ．非平方元 $\delta\in\mathbb{F}$ を一つ固定しておく．また，非自明加法指標 $\theta\in\hat{\mathbb{F}}$ を一つ取っておく．定数 γ を次式で定義する（θ に関するガウス和と呼ばれる）:

$$\gamma=\sum_{a\in\mathbb{F}-\{0\}}\mathrm{sgn}(a)\overline{\theta(a)}. \tag{20}$$

0 次以上の正方行列 $a_1,\cdots,a_k$ に対し，それらを順に対角に並べた正方行列を $\mathrm{diag}(a_1,\cdots,a_k)$ で表す．

$$I^+(k)=\ \mathrm{diag}(\underbrace{1,\cdots,1}_{k\text{ 個}}),\quad I^-(k)=\mathrm{diag}(\underbrace{1,\cdots,1,\delta}_{k\text{ 個}}) \tag{21}$$

とおく．また k 次 0 行列を $O(k)$ で表す.

3.1 軌道分解

次が知られている [5]：

事実 3.1. ランク $r \geq 1$ の対称行列 $a \in \mathrm{Sym}_n(\mathbb{F})$ は，作用 (18) によって，$\mathrm{diag}\,(I^+(r), O(n-r))$ または $\mathrm{diag}\,(I^-(r), O(n-r))$ のいずれか一方のみと移り合う.

これにより，対称行列 $a \in \mathrm{Sym}_n(\mathbb{F})$ $(a \neq 0)$ の符号を次のように定められる：

$$\mathrm{sgn}(a) = \begin{cases} 1 & a \text{ が } \mathrm{diag}(I^+(r), O(n-r)) \text{ と移りあうとき,} \\ -1 & a \text{ が } \mathrm{diag}(I^-(r), O(n-r)) \text{ と移りあうとき.} \end{cases} \tag{22}$$

これは $n=1$ の場合，上に定めた $a \in \mathbb{F}$ の符号と一致する．さて $\mathrm{Sym}_n(\mathbb{F})$ への $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$-作用においては，0 行列は 1 つの軌道 $\mathcal{O}(0)$ を成すが，それ以外は，符号とランクによって各軌道に分かれる．すなわち $r \geq 1$ に対し，$\mathcal{O}(r^+) = \{a \in \mathrm{Sym}_n \mid \mathrm{rank}(a) = r,\ \mathrm{sgn}(a) = 1\}$ および $\mathcal{O}(r^-) = \{a \in \mathrm{Sym}_n \mid \mathrm{rank}(a) = r,\ \mathrm{sgn}(a) = -1\}$ と置くことで，軌道は

$$X^{\pm}(1,n) = \{0\} \sqcup \{r^\sigma \mid 1 \leq r \leq n,\ \sigma \text{は} + \text{または} -\} \tag{23}$$

なる集合でパラメトライズされる.

一方，指標群 $(\mathrm{Sym}_n(\mathbb{F}))\hat{}$ の $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$-軌道分解は，非自明加法指標 θ を用いて，$\mathrm{Sym}_n(\mathbb{F})$ と対応付ける形で行える．すなわち，$a \in \mathrm{Sym}_n(\mathbb{F})$ に対して $\Theta_a \in (\mathrm{Sym}_n(\mathbb{F}))\hat{}$ を

$$\Theta_a(b) = \theta(\mathrm{tr}\, ab) \qquad (b \in \mathrm{Sym}_n(\mathbb{F})) \tag{24}$$

(tr は行列のトレース) と定めれば，$\Theta : \mathrm{Sym}_n(\mathbb{F}) \to (\mathrm{Sym}_n(\mathbb{F}))\hat{}$, $a \mapsto \Theta_a$ は群同型かつ $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$-軌道を保つことがわかる．よって $\mu \in X^{\pm}(1,n)$ に対し，$\mathcal{P}(\mu) = \Theta(\mathcal{O}(\mu))$ と置くことで，軌道の全体 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F})\backslash(\mathrm{Sym}_n(\mathbb{F}))\hat{} = \{\mathcal{P}(\mu) \mid \mu \in X^{\pm}(1,n)\}$ が得られる.

3.2 変換基底

$\lambda \in X^{\pm}(1,n)$ に対し，軌道 $\mathcal{O}(\lambda)$ の定義関数を χ_λ と表すと，$\mathcal{A} = \{\chi_\lambda \mid \lambda \in X^{\pm}(1,n)\}$ は $\mathbb{C}[\mathrm{Sym}_n(\mathbb{F})]^{\mathrm{GL}_n(\mathbb{F})}$ の基底である．一方，変換基底のパラメータ集合として，

$$X'(1,n) = \{0\} \sqcup \{{}^{\alpha}r \mid 1 \leq r \leq n,\ \alpha \text{は記号 triv または sgn}\} \tag{25}$$

とおく．0 および $r \geq 1$ に対して，関数 ψ_0, $\psi_{({}^{\mathrm{triv}}r)}$ をそれぞれ $\mathrm{Sym}_n(\mathbb{F})$ 上のランク 0, r の行列の定義関数とする．また $r \geq 1$ に対して，関数 $\psi_{({}^{\mathrm{sgn}}r)}$ を次式で定める：

$$\psi_{({}^{\mathrm{sgn}}r)}(a) = \begin{cases} \mathrm{sgn}(a) & \mathrm{rank}(a) = r \text{ のとき} \\ 0 & \text{その他} \end{cases} \qquad (a \in \mathrm{Sym}_n(\mathbb{F})). \tag{26}$$

このとき，

$$\psi_{({}^{\mathrm{triv}}r)} = \chi_{r^+} + \chi_{r^-}, \quad \text{および} \quad \psi_{({}^{\mathrm{sgn}}r)} = \chi_{r^+} - \chi_{r^-} \tag{27}$$

が成り立ち，$\mathcal{B}=\{\psi_\nu \mid \nu\in X'(1,n)\}$ もまた $\mathbb{C}[\mathrm{Sym}_n(\mathbb{F})]^{\mathrm{GL}_n(\mathbb{F})}$ の基底となる．$\mathbb{C}[(\mathrm{Sym}_n(\mathbb{F}))\hat{}\,]^{\mathrm{GL}_n(\mathbb{F})}$ についても同様に，軌道の定義関数からなる基底 $\hat{\mathcal{A}}=\{\hat{\chi}_\mu \mid \mu\in X^{\pm}(1,n)\}$ および，同じ関係式 $\hat{\psi}_{({}^{\mathrm{triv}}s)}=\hat{\chi}_{s^+}+\hat{\chi}_{s^-}$ と $\hat{\psi}_{({}^{\mathrm{sgn}}s)}=\hat{\chi}_{s^+}-\hat{\chi}_{s^-}$ で定まる変換基底 $\hat{\mathcal{B}}$ を考える．

3.3 変換核関数の記述

軌道の定義関数からなる基底 $\mathcal{A}$, $\hat{\mathcal{A}}$ のもとで，フーリエ変換

$$\mathcal{F}:\mathbb{C}[\mathrm{Sym}_n(\mathbb{F})]^{\mathrm{GL}_n(\mathbb{F})}\to\mathbb{C}[\mathrm{Sym}_n(\mathbb{F})\hat{}\,]^{\mathrm{GL}_n(\mathbb{F})} \tag{28}$$

を表す行列は，核関数からなる行列 $\varPhi=(\varPhi(\mu,\lambda))_{\mu,\lambda\in X^{\pm}(1,n)}$ である．一方，変換基底 $\mathcal{B}$, $\hat{\mathcal{B}}$ のもとで $\mathcal{F}$ を表す行列を $\Psi=(\Psi(\nu,\pi))_{\nu,\pi\in X'(1,n)}$ とする．$\varPhi$ と Ψ の関係は，基底の関係式 (27) よりすぐにわかる：

$$\varPhi(s^\tau,r^\sigma)=\frac{1}{2}\left(\Psi({}^{\mathrm{triv}}s,{}^{\mathrm{triv}}r)+\tau\Psi({}^{\mathrm{sgn}}s,{}^{\mathrm{triv}}r)+\sigma\Psi({}^{\mathrm{triv}}s,{}^{\mathrm{sgn}}r)+\tau\sigma\Psi({}^{\mathrm{sgn}}s,{}^{\mathrm{sgn}}r)\right). \tag{29}$$

あとは計算過程を省略して結果のみ述べるが，変換核関数 Ψ が次のように affine q-Krawtchouk 多項式を用いて表せる：

命題 3.2. $n\geq 2$, $1\leq s,r\leq n$ に対し，

(1)
$$\Psi({}^{\mathrm{triv}}s,{}^{\mathrm{triv}}r)=(-1)^{r+x}q^{x(x+1)}(q^{2N+(-1)^n};q^{-2})_x\begin{bmatrix}N\\x\end{bmatrix}_{q^2}{}^{\mathrm{aff}}K_y(x;q^{-2N-(-1)^n},N;q^2),$$
ここで $N=\lfloor\frac{n-1}{2}\rfloor$, $y=\lfloor\frac{s-1}{2}\rfloor$, $x=\lfloor\frac{r}{2}\rfloor$.

(2)
$$\Psi({}^{\mathrm{sgn}}s,{}^{\mathrm{triv}}r)=(-\epsilon)^x q^{x^2}(q^{2N-(-1)^n};q^{-2})_x\begin{bmatrix}N\\x\end{bmatrix}_{q^2}{}^{\mathrm{aff}}K_y(x;q^{-2N+(-1)^n},N;q^2),$$
ここで r は偶数，$N=\lfloor\frac{n}{2}\rfloor$, $y=\lfloor\frac{s}{2}\rfloor$, $x=\frac{r}{2}$.

(3)
$$\Psi({}^{\mathrm{triv}}s,{}^{\mathrm{sgn}}r)=(-1)^{r+x+1}\epsilon^{y+1}q^{n+x^2+x-y-1}(q^{2N-(-1)^n};q^{-2})_x\begin{bmatrix}N\\x\end{bmatrix}_{q^2}{}^{\mathrm{aff}}K_y(x;q^{-2N+(-1)^n},N;q^2),$$
ここで s は偶数，$N=\lfloor\frac{n-2}{2}\rfloor$, $y=\frac{s-2}{2}$, $x=\lfloor\frac{r-1}{2}\rfloor$.

(4)
$$\Psi({}^{\mathrm{sgn}}s,{}^{\mathrm{sgn}}r)=(-1)^x\epsilon^{x+y}q^{n+x^2-y-1}\gamma(q^{2N+(-1)^n};q^{-2})_x\begin{bmatrix}N\\x\end{bmatrix}_{q^2}{}^{\mathrm{aff}}K_y(x;q^{-2N-(-1)^n},N;q^2),$$
ここで s,r は奇数，$N=\lfloor\frac{n-1}{2}\rfloor$, $y=\frac{s-1}{2}$, $x=\frac{r-1}{2}$.

4 $\mathrm{Sym}(\mathfrak{o}/\mathfrak{p}^\ell)$ 上の $\mathrm{GL}_n(\mathfrak{o})$-不変フーリエ変換

F を非アルキメデス的局所体，$v:F\to\mathbb{Z}\cup\{\infty\}$ をその上の離散付値，$\mathfrak{o}=\{a\in F\mid v(a)\geq 0\}$ を F の整数環，$\mathfrak{p}=\{a\in F\mid v(a)\geq 1\}$ を $\mathfrak{o}$ の極大イデアルとする．$\mathfrak{p}$ の生成元を ϖ とおく．剰余体 $\mathbb{F}:=\mathfrak{o}/\mathfrak{p}$ は有限体なので，位数を q とし，それが奇数であると仮定する．また，$\ell\geq 1$ に対して剰余環 $\mathfrak{o}/\mathfrak{p}^\ell$ を R_ℓ と表す．これは位数 q^ℓ の有限環である．前節同様に，$\mathbb{F}$ の非自明加法指標 θ，$\mathbb{F}$ の非平方元 δ を固定し，定数 γ，符号 ϵ を定める．その他の記号も踏襲する．

ここでは，第 2 節の群不変フーリエ変換の例として，$A = \mathrm{Sym}_n(R_\ell)$, $G = \mathrm{GL}_n(\mathfrak{o})$ の場合を考える．作用 ρ は次である：

$$\rho(g)a = ga\,{}^t g \qquad (a \in \mathrm{Sym}_n(R_\ell),\ g \in \mathrm{GL}_n(\mathfrak{o})). \tag{30}$$

4.1 軌道分解

まず軌道をパラメトライズする集合を導入する．ℓ 変数 $r = (r_0, r_1, \cdots, r_{\ell-1}) \in X(\ell, n)$（式 (5)）と列 $\sigma = (\sigma_0, \sigma_1, \cdots, \sigma_{\ell-1})$ で $r_i \neq 0$ のとき $\sigma_i = +$ または $-$，$r_i = 0$ のとき $\sigma_i = \phi$ (なし) なるものを組み合わせたパラメータ $r^\sigma = (r_0^{\sigma_0}, r_1^{\sigma_1}, \cdots, r_{\ell-1}^{\sigma_{\ell-1}})$ を考え，その全体を $X^\pm(\ell, n)$ とおく．$r^\sigma \in X^\pm(\ell, n)$ に対し，対角行列

$$D(r^\sigma) = \ \mathrm{diag}\left(I^{\sigma_0}(r_0),\, \varpi I^{\sigma_1}(r_1), \cdots,\, \varpi^{\ell-1} I^{\sigma_{\ell-1}}(r_{\ell-1}),\, O(n - |r|)\right) \quad \in \mathrm{Sym}_n(R_\ell) \tag{31}$$

を考え，(30) の作用に関して $D(r^\sigma)$ を含む軌道を $\mathcal{O}(r^\sigma)$ とおく．すると，単項イデアル整域 $\mathfrak{o}$ 上の単因子の理論と，事実 3.1 により，軌道分解

$$\mathrm{Sym}_n(R_\ell) = \bigsqcup_{r^\sigma \in X^\pm(\ell, n)} \mathcal{O}(r^\sigma) \tag{32}$$

が得られる．

一方，指標群 $\hat{A} = (\mathrm{Sym}_n(R_\ell))\hat{}$ の軌道分解は，非自明加法指標 $\theta \in \hat{\mathbb{F}}$ を用いて，$\mathrm{Sym}_n(R_\ell)$ と対応付けて行う．まず $\theta_{\ell-1} \in \hat{R}_\ell$ を，$\theta_{\ell-1}(a) = \theta(a_{\ell-1})$，ここで $a_{\ell-1}$ は $a \in R_\ell$ の $\mathfrak{p}$-進級数展開の $\ell - 1$ 次の係数（$\mathbb{F}$ の元とみなせる），と定める．これを用いて，$a \in \mathrm{Sym}_n(R_\ell)$ に対して $\Theta_a \in (\mathrm{Sym}_n(R_\ell))\hat{}$ を

$$\Theta_a(b) = \ \theta_{\ell-1}(\mathrm{tr}\, ab) \qquad (b \in \mathrm{Sym}_n(R_\ell)) \tag{33}$$

と定めれば，$\Theta : \mathrm{Sym}_n(R_\ell) \to (\mathrm{Sym}_n(R_\ell))\hat{}$，$a \mapsto \Theta_a$ は群同型かつ $\mathrm{GL}_n(\mathcal{O})$-軌道を保つ．また，$s^\tau = (s_0^{\tau_0}, \cdots, s_{\ell-1}^{\tau_{\ell-1}}) \in X^\pm(\ell, n)$ に対し，逆走 $(s^\tau)' = (s_{\ell-1}^{\tau_{\ell-1}}, \cdots, s_0^{\tau_0})$ としておき，$\mathcal{P}(s^\tau) = \Theta\left(\mathcal{O}((s^\tau)')\right)$ と置くことで，軌道の全体 $\mathrm{GL}_n(\mathcal{O}) \backslash (\mathrm{Sym}_n(R_\ell))\hat{}= \{\mathcal{P}(s^\tau) \mid s^\tau \in X^\pm(\ell, n)\}$ が得られる（注意：逆走と対応させたのは，結論に出てくる多変数 Krawtchouk 多項式と文字の順番を一致させるためである）．

4.2 変換基底

軌道 $\mathcal{O}(\lambda)$ $(\lambda \in X^\pm(\ell, n))$ の定義関数 χ_λ から成る $\mathbb{C}[\mathrm{Sym}_n(R_\ell)]^{\mathrm{GL}_n(\mathcal{O})}$ の基底を $\mathcal{A}$ とする．一方，変換基底をパラメトライズする集合 $X'(\ell, n)$ を次のように導入する：ℓ 変数 $r = (r_0, r_1, \cdots, r_{\ell-1}) \in X(\ell, n)$（式 (5)）と，列 $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \cdots, \alpha_{\ell-1})$ で $x_i \neq 0$ のとき $\alpha_i = \mathrm{triv}$ または sgn なる記号，$x_i = 0$ のとき $\alpha_i = \phi$(なし) なるものを組み合わせたパラメータ ${}^\alpha r = ({}^{\alpha_0}r_0,\, {}^{\alpha_1}r_1,\, \cdots,\, {}^{\alpha_{\ell-1}}r_{\ell-1})$ を考え，その全体を $X'(\ell, n)$ とおく．次に ${}^\alpha r \in X'(\ell, n)$ に対して関数 $\psi_{({}^\alpha r)} \in \mathbb{C}[\mathrm{Sym}_n(R_\ell)]^{\mathrm{GL}_n(\mathcal{O})}$ を次式で定める：

$$\psi_{({}^\alpha r)} = \ \sum_\sigma \prod_{i=1}^{\ell-1} \alpha_i(\sigma_i) \chi_{r^\sigma}, \tag{34}$$

上式で，σ は符号の列 $\sigma = (\sigma_i \mid 0 \le i \le \ell - 1,\ r_i \neq 0)$ なるものの全体を走る．また，$\mathrm{triv}(\pm) = 1$, $\mathrm{sgn}(\pm) = \pm 1$（複合同順）とする．すると $\mathcal{B} = \{\psi_{({}^\alpha r)} \mid {}^\alpha r \in X'(\ell, n)\}$ もまた $\mathbb{C}[\mathrm{Sym}_n(\mathbb{F})]^{\mathrm{GL}_n(\mathbb{F})}$ の基底となる．$\mathbb{C}[(\mathrm{Sym}_n(\mathbb{F}))\hat{}]^{\mathrm{GL}_n(\mathbb{F})}$ についても同様に，軌道の定義関数からなる基底 $\hat{\mathcal{A}} = \{\hat{\chi}_\mu \mid \mu \in X^\pm(\ell, n)\}$ および，(34) と同じ関係式で定まる変換基底 $\hat{\mathcal{B}} = \{\hat{\psi}_{({}^\beta s)} \mid {}^\beta s \in X'(\ell, n)\}$ を考える．

$\mathcal{A}$, $\hat{\mathcal{A}}$ のもとで，フーリエ変換

$$\mathcal{F} : \mathbb{C}[\mathrm{Sym}_n(R_\ell)]^{\mathrm{GL}_n(\mathcal{O})} \to \mathbb{C}[\mathrm{Sym}_n(R_\ell)\hat{}\,]^{\mathrm{GL}_n(\mathcal{O})} \tag{35}$$

を表す行列は，核関数からなる行列 $\Phi = (\Phi(\mu,\lambda))_{\mu,\lambda\in X^{\pm}(\ell,n)}$ である．一方，変換基底 $\mathcal{B}$, $\hat{\mathcal{B}}$ のもとで $\mathcal{F}$ を表す行列を $\Psi = \left(\Psi({}^{\beta}s, {}^{\alpha}r)\right)_{{}^{\beta}s,{}^{\alpha}r\in X'(\ell,n)}$ とする．

Φ および Ψ が 0 となる十分条件が，分割のヤング図形との対応で与えられるので，紹介しておこう：

命題 4.1. $s, r \in X(\ell,n)$ について，s のヤング図形を ($0^{n-|s|+s_0}, 1^{s_1}, \cdots, (\ell-1)^{s_{\ell-1}}$)（ここで i^m という表記は，値 i の重複度が m であることを表す），r のヤング図形を ($0^{r_0}, 1^{r_1}, \cdots, (\ell-1)^{r_{\ell-1}}, \ell^{n-|r|}$) とする．この時，s の図形が r の図形にふくまれないならば，$\Phi(s^\tau, r^\sigma) = 0$，$\Psi({}^{\beta}s, {}^{\alpha}r) = 0$.

4.3 $\ell = 2$ のときの変換核関数の記述

計算の容易さのため $\ell = 2$ のときに限定して，変換核関数 $\Psi({}^{\beta}s, {}^{\alpha}r)$, ${}^{\beta}s, {}^{\alpha}r \in X'(2,n)$ の値をいくつか計算してみたところ，次の命題に示すように，$s = (s_0, s_1), r = (r_0, r_1)$ の成分がすべて奇数の場合は，統一した形で 2 変数 affine q-Krawtchouk 多項式で表されることがわかった．

命題 4.2. $0 \le y, z, u, x \le N = \lfloor \dfrac{n-2}{2} \rfloor$ と $\beta = (\beta_0, \beta_1)$, $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1)$（triv または sgn の組）に対して，

$$\begin{aligned}
&\Psi({}^{\beta_0}2y+1, {}^{\beta_1}2z+1; {}^{\alpha_0}2u+1, {}^{\alpha_1}2x+1) \\
&= C(y,z,u,x)\,(q^{2N-(-1)^n}; q^{-2})_{u+x} \begin{bmatrix} N \\ (u,x) \end{bmatrix}_{q^2} {}^{\mathrm{aff}}K^{(2)}_{(y,z)}(u,x;\, q^{-2N+(-1)^n}, N; q^2),
\end{aligned}$$

ここで，$(\beta;\alpha) = (\mathrm{triv}, \mathrm{triv}; \mathrm{triv}, \mathrm{triv})$ のとき，$C(y,z,u,x) = (-1)^{u+x} q^{n(2x+1)-x^2+u(u+1)}$,

$(\beta;\alpha) = (\mathrm{sgn}, \mathrm{triv}; \mathrm{triv}, \mathrm{sgn})$ のとき，$C(y,z,u,x) = (-1)^{u+x+1} \epsilon^{z+u} \gamma q^{n(2x+1)+n-z+u^2-x^2-2x-2}$,

$(\beta;\alpha) = (\mathrm{triv}, \mathrm{sgn}; \mathrm{sgn}, \mathrm{triv})$ のとき，$C(y,z,u,x) = (-1)^{u+x+1} \epsilon^{y+x} \gamma q^{2n(x+1)-y-2z+u(u+1)-x(x+1)-2}$,

$(\beta;\alpha) = (\mathrm{sgn}, \mathrm{sgn}; \mathrm{sgn}, \mathrm{sgn})$ のとき，$C(y,z,u,x) = (-1)^{u+x} \epsilon^{y+z+u+x+1} q^{2n(x+1)+n-y-3z+u^2-x^2-3x-3}$,

その他の $(\beta;\alpha)$ では $C(y,z,u,x) = 0$.

このように，変換核関数の一部の値は多変数 affine q-Krawtchouk 多項式で書くことができる．しかし値によっては，まとまらないものもあり，今のところ全体像を与える記述方法や解釈は得られていない．

引用・参考文献

[1] Ph. Delsarte, *Bilinear Forms over a Finite Field, with Applications to Coding Theory*, J. Comb. Theory, Series A **25** (1978), 226-241.

[2] J. Hodges, *Exponential Sums for Symmetric Matrices in a Finite Field*, Arch. Math. **7**, (1956), 116-121.

[3] T.H. Koornwinder, *Krawtchouk Polinomials, a Unification of Two Different Group Theoretic Interpretations*, S.I.A.M. J. Math. Anal., **13** (1982), 1011-1023.

[4] R. Koekoek, P.A. Lesky and R.F. Awarttouw, *Hypergeometric Orthogonal Polynomials and Their q-Analogues*, Springer Monographs in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2010.

[5] J. MacWilliams, *Othogonal Matrices Over Finite Fields*, *Amer. Math. Monthly*, **76**, no.2 (1969), 152-164.

[6] H. Mizukawa, *Orthogonaity Relations for Multivariate Krawtchouk Polynomials*, Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications, SIGMA **7** (2011), 017, 5pages.

[7] D. Stanton, *Three Addition Theorems for some q-Krawtchouk Polynomials*, Geom. Dedicata, **10** (1981), 403-425.

[8] A. Terras, *Fourier Analysis on Finite Groups and Applications*, London Mathmatical Society Student Text **43**, University of California, San Diego, 1999.

[9] Y. Wang, Y. Huo, and C. Ma, *Association Schemes of Matrices*, International Series in Mathematics, Science Press Beijing, 2010.

[10] 川村晃英, 有限体上の群不変フーリエ変換と q-超幾何多項式, 表現論シンポジウム講演集 (2014).

[11] 川村晃英, 局所体上の帯球関数として現れる多変数 q-超幾何多項式, RIMS 研究集会「表現論と非可換調和解析をめぐる諸問題」講究録 (2016).