Uniformly boundedness of multiplicities and polynomial identities

東京大学大学院数理科学研究科　北川 宣稔
Masatoshi Kitagawa
Graduate School of Mathematical Sciences, The University of Tokyo

1　導入

本稿では、実簡約リー群の表現を簡約部分群に制限したときにいつ一様に有界な重複度を持つか、という問題を扱う。一般に簡約リー群 $G_{\mathbb{R}}$ のユニタリ表現 V は一意な既約分解

$$V|_{G'_{\mathbb{R}}} \simeq \int^{\oplus}_{\widehat{G'_{\mathbb{R}}}} m(\pi) V_\pi d\mu(\pi). \tag{1.0.1}$$

を持つ。ess sup $\left\{ m(\pi) : \pi \in \widehat{G'_{\mathbb{R}}} \right\} < \infty$ となるとき、 V は一様に有界な重複度を持つといわれる。特に $m(\pi) \leq 1$ となるとき、 V は無重複であると呼ばれる。

可視的作用の理論 [12, 13, 14, 16] によって多くの無重複表現が統一的に説明されたり、放物型部分群の軌道の様子によって重複度の有限性、有界性、非有界性を導く結果 [20] が得られるなど、幾何的な条件と重複度の大きさに関する研究が進展してきている。また、小さな退化主系列表現 [19]、極小表現 [6][18] やユニタリ最高ウェイト加群 [11, 13, 14] など多くの無重複あるいは一様に有界な重複度を持つ分岐則が発見されている。

一方で、一様に有界な重複度を持つような分岐則の分類についてはあまり進展がないように思われる。そのような分岐則の分類を目指し、本稿では分岐則が一様に有界になるための必要条件を $\mathcal{U}(\mathfrak{g})^{G'}$ という代数の不変量で与え、離散分解する場合及び最高ウェイト加群の場合に十分条件でもあることを紹介する。

本稿を通して、 $G_{\mathbb{R}}$ は連結な半単純リー群とし、 $G'_{\mathbb{R}}$ は連結な簡約部分群とする。$K_{\mathbb{R}}$ を $G_{\mathbb{R}}$ の極大コンパクト部分群であって $K'_{\mathbb{R}} := K_{\mathbb{R}} \cap G'_{\mathbb{R}}$ が $G'_{\mathbb{R}}$ の極大コンパクト部分群になるものとする。それぞれの複素化とリー環の複素化を $K, K', \mathfrak{g}, \mathfrak{g}', \ldots$ とする。

K の表現 V に対して、K-有限ベクトル全体を V_K と表す。$(\mathfrak{g}, K)$-加群 V に対して $V^\vee := (V^*)_K$ と定める。Category $\mathcal{O}$ の対象 V に対しても、$\mathcal{O}$ における双対加群を同じ記号 $V^\vee$ で表すことにする。代数の加群 V に対して、その加群の長さを $\mathrm{length}(V)$ とする。

リー環 $\mathfrak{g}'$ に対応する $\mathrm{Int}(\mathfrak{g})$ の解析的部分群 G' は代数群であると仮定する。$\mathfrak{g}' \oplus \mathfrak{g}$ への $\mathfrak{g}'$ の対角な埋め込みを Δ とする。同様に G' の $\mathrm{Int}(\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}')$ への対角な随伴作用による埋め込みを Δ とする。

本稿における主結果は以下である。

定理 1.1. (τ, V) を $G_{\mathbb{R}}$ の既約ユニタリ表現とする。このとき、$V|_{G'_{\mathbb{R}}}$ が一様に有界な重複度を持つならば、$\mathrm{PI.deg}(\tau(\mathcal{U}(\mathfrak{g})^{G'})) < \infty$ である。さらに、 $(V_K)|_{(\mathfrak{g}', K')}$ が離散分解するなら、逆も成立する。

定理 1.2. (τ, V) を $\mathfrak{g}$ の既約最高ウェイト加群とする。ただし、 $\mathfrak{g}$ の Borel 部分代数 $\mathfrak{b}$ は $\mathfrak{b} \cap \mathfrak{g}'$ が $\mathfrak{g}'$ の Borel 部分代数になるように取るものとする。このとき、 $\mathrm{PI.deg}(\tau(\mathcal{U}(\mathfrak{g})^{G'})) < \infty$ であることと $V|_{\mathfrak{g}'}$ の組

成因子の重複度が一様に有界であることは同値である。

2 polynomial identity

主結果で用いる polynomial identity degree という環の不変量について復習する。詳しくは [21, Chapter 13] を参照されたい。

定義 2.1. 非可換多項式 $s_0, s_1, \ldots$ を

$$s_n(X_1, X_2, \ldots, X_n) := \sum_{s \in \mathfrak{S}_n} \operatorname{sgn}(s) X_{s(1)} X_{s(2)} \cdots X_{s(n)}$$

と定める。ここで、 $\mathfrak{S}_n$ は n 次対称群である。環 $\mathcal{R}$ に対して、 $\mathcal{R}$ の polynomial identity degree を

$$\mathrm{PI.deg}(\mathcal{R}) := \min \{n \in \mathbb{N} : s_{2n} \equiv 0 \text{ on } \mathcal{R}\}$$

で定義する。

例えば、 $\mathrm{PI.deg}(\mathcal{R}) = 1$ であることと $\mathcal{R}$ が可換であることは同値である。行列環の PI.deg に関して、以下の定理が知られている。

事実 2.2 (Amitsur–Levitzki)**.** $M_n(\mathbb{C})$ を $n \times n$ の行列環とする。このとき、 $\mathrm{PI.deg}(M_n(\mathbb{C})) = n$ となる。

この事実を用いると代数の PI.deg と、既約加群の次元を結びつけることができる。

命題 2.3. $\mathcal{A}$ を $\mathbb{C}$-代数とする。$\{(\pi_\lambda, V_\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda}$ を $\mathcal{A}$-加群の族であり、

$$\bigcap_{\lambda \in \Lambda} \ker(\pi_\lambda) = 0$$

を満たすものとする。このとき、

$$\mathrm{PI.deg}(\mathcal{A}) \leq \sup \{\dim_{\mathbb{C}} V_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$$

が成り立つ。さらに、任意の $\lambda \in \Lambda$ に対して (π_λ, V_λ) が既約であれば、上の不等式の等号が成り立つ。

3 重複度の上限

$G_{\mathbb{R}}$ の既約ユニタリ表現 V に対して、$V|_{G'_{\mathbb{R}}}$ の既約分解が一意に定まる:

$$V|_{G'_{\mathbb{R}}} \simeq \int^{\oplus}_{\widehat{G'_{\mathbb{R}}}} m(\pi) V_\pi d\mu(\pi). \tag{3.0.1}$$

ここで、 $\widehat{G'_{\mathbb{R}}}$ は $G'_{\mathbb{R}}$ のユニタリ双対であり、 μ は $\widehat{G'_{\mathbb{R}}}$ 上の測度である。$m : \widehat{G'_{\mathbb{R}}} \to \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ は重複度関数と呼ばれる可測関数である。

ユニタリ表現の分岐則における重複度の代数的な類似として、

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}', K'}(V_K, (V_\pi)_{K'}) \quad \pi \in \widehat{G'_{\mathbb{R}}}_{,adm}$$

が考えられる。ここで、 $\widehat{G'_{\mathbb{R},adm}}$ は既約 $(\mathfrak{g}', K')$-加群の同値類全体である。smooth vector, analytic vector, K'-finite vector などで同様の対象が考えられるが、本稿ではユニタリ表現と K-finite vector の場合のみを扱う。他の表現のクラスに対する重複度の関係については小林俊行氏による [17] を参照されたい。

本稿は、重複度関数の各点ごとの値ではなく (本質的) 上限を主に扱う。分岐則の重複度の上限に関わるいくつかの量を定義する。

定義 3.1. (τ, V) を $G_{\mathbb{R}}$ の既約ユニタリ表現とする。(3.0.1) にあるように $V|_{G'_{\mathbb{R}}}$ の既約分解と重複度関数を取る。このとき、

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}^{an}_{G'_{\mathbb{R}}}(V) &:= \text{ess sup}\left\{m(\pi) : \pi \in \widehat{G'_{\mathbb{R}}}\right\} \\
\mathcal{M}^{alg}_{G'_{\mathbb{R}}}(V) &:= \sup\left\{\dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}',K'}(V_K, (V_\pi)_{K'}) : \pi \in \widehat{G'_{\mathbb{R},adm}}\right\} \\
\mathcal{M}^{PI}_{G'_{\mathbb{R}}}(V) &:= \mathrm{PI.deg}(\tau(\mathcal{U}(\mathfrak{g})^{G'}))
\end{aligned}$$

と定める。

$\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}',K'}(V_K, (V_\pi)_{K'})$ への $\mathcal{U}(\mathfrak{g})^{G'}$ の作用を見ることで次元を評価したいが、$\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}',K'}(V_K, (V_\pi)_{K'})$ は非可算次元になることがあり扱いづらいことがある。以下で、同等な情報をもつ $\mathcal{U}(\mathfrak{g})^{G'}$-加群を定める。

V を $(\mathfrak{g}, K)$-加群、W を K'-admissible $(\mathfrak{g}', K')$-加群とする。このとき、 $W^\vee \otimes_{\mathcal{U}(\mathfrak{g}')} V$ は V の $\mathfrak{g}$-加群の構造から定まる $\mathcal{U}(\mathfrak{g})^{G'}$-加群の構造を持つ。また、$\mathcal{U}(\mathfrak{g})^{G'}$-加群の自然な同型

$$(W^\vee \otimes_{\mathcal{U}(\mathfrak{g}')} V)^* \simeq \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}'}(V, W)$$

が存在する。(注意: 本稿では、K' は連結と仮定している。)

以下では、W は既約 $(\mathfrak{g}', K')$-加群とする。自然な $(\mathfrak{g}', K')$-加群の準同型 $\iota : V \to W \otimes W^\vee \otimes_{\mathcal{U}(\mathfrak{g}')} V$ が存在して以下の普遍性を満たす。

- $(\mathfrak{g}', K')$-加群の準同型 $\varphi : V \to W^{\oplus n}$ $(n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\})$ に対して、$\tilde{\varphi} : W \otimes W^\vee \otimes_{\mathcal{U}(\mathfrak{g}')} V \to W^{\oplus n}$ が一意に存在して、$\varphi = \tilde{\varphi} \circ \iota$ を満たす。
- φ が $\mathcal{U}(\mathfrak{g})^{G'}$-準同型ならば $\tilde{\varphi}$ も $\mathcal{U}(\mathfrak{g})^{G'}$-準同型になる。

直積分分解と $(\mathfrak{g}, K)$-加群の準同型との関係について、以下の命題が成り立つ。

命題 3.2. V を $G_{\mathbb{R}}$ の既約ユニタリ表現とする。$V|_{G'_{\mathbb{R}}}$ の既約分解を

$$V|_{G'_{\mathbb{R}}} \simeq \int^{\oplus}_{\widehat{G'_{\mathbb{R}}}} m(\pi) V_\pi d\mu(\pi)$$

とする。このとき、ほとんどすべての $\pi \in \widehat{G'_{\mathbb{R}}}$ に対して、$(\mathfrak{g}', K')$-加群の全射準同型

$$\varphi_\pi : V_K \to \mathbb{C}^{m(\pi)} \otimes (V_\pi)_{K'}$$

が存在する。さらに、φ_π が $\mathcal{U}(\mathfrak{g})^{G'}$-加群の準同型になるような、$\mathbb{C}^{m(\pi)}$ 上の $\mathcal{U}(\mathfrak{g})^{G'}$-加群の構造が存在する。また、$\{\varphi_\pi\}$ は次の意味で $V|_{G'_{\mathbb{R}}}$ の既約分解と compatible である。

- $v \in V_K$ とし、上の既約分解の下で v を定める切断の一つを $\pi \mapsto v_\pi$ とする。このとき、$v_\pi = \varphi_\pi(v)$ がほとんどすべての $\pi \in \widehat{G'_{\mathbb{R}}}$ に対して成り立つ。

Outline of the proof. 直積分分解とリー環の作用に関する R. Goodman の結果 [3] と、直積分分解と閉作用素の分解に関する A. E. Nussbaum [22] の結果と V_K が加算次元であることを用いると主張が従う。 □

この命題から、$\mathbb{C}^{m(\pi)}$ への $\mathcal{U}(\mathfrak{g})^{G'}$-加群の構造がわかれば、ユニタリ表現に対する重複度のおおまかな振る舞いが $\mathcal{U}(\mathfrak{g})^{G'}$ を用いて記述できる。$(V_\pi)^\vee_{K'} \otimes_{\mathcal{U}(\mathfrak{g}')} V_K \to \mathbb{C}^{m(\pi)}$ という $\mathcal{U}(\mathfrak{g})^{G'}$-加群の全射準同型があるので、 $\mathbb{C}^{m(\pi)}$ ではなく $(V_\pi)^\vee_{K'} \otimes_{\mathcal{U}(\mathfrak{g}')} V_K$ を調べることで重複度の上限を捉える。

以上のことから以下の命題が従う。

命題 3.3. $G_\mathbb{R}$ の既約ユニタリ表現 (τ, V) に対して、

$$\mathcal{M}^{PI}_{G'_\mathbb{R}}(V) \leq \mathcal{M}^{an}_{G'_\mathbb{R}}(V) \leq \mathcal{M}^{alg}_{G'_\mathbb{R}}(V)$$

が成り立つ。また、 $L(V) := \sup\left\{\mathrm{length}((V_\pi)^\vee_{K'} \otimes_{\mathcal{U}(\mathfrak{g}')} V_K) : \pi \in \widehat{G'_{\mathbb{R},adm}}\right\}$ と置いたとき、

$$\mathcal{M}^{alg}_{G'_\mathbb{R}}(V) \leq L(V) \cdot \mathcal{M}^{PI}_{G'_\mathbb{R}}(V)$$

となる。

注意 3.4. V はユニタリ表現としているが、 $L(V), \mathcal{M}^{PI}_{G'_\mathbb{R}}(V), \mathcal{M}^{alg}_{G'_\mathbb{R}}(V)$ の定義には $(\mathfrak{g}, K)$-加群 (あるいはより弱く $\mathfrak{g}$-加群) しか用いていない。実際、命題の二つ目の不等式は任意の既約 $(\mathfrak{g}, K)$-加群 V に対して成り立つ。以下では $(\mathfrak{g}, K)$-加群や $\mathfrak{g}$-加群に対しても同じ記号を用いる。

Proof. $X \subset \widehat{G'_\mathbb{R}}$ と $\{\varphi_\pi\}_{\pi \in X}$ を命題 3.2 の条件を満たすようにとる。直積分との compatibility から

$$\bigcap_{\pi \in X} \mathrm{Ann}_{\mathcal{U}(\mathfrak{g})^{G'}}(\mathbb{C}^{m(\pi)}) = \ker(\tau) \cap \mathcal{U}(\mathfrak{g})^{G'}$$

となる。したがって、$\mathcal{U}(\mathfrak{g})^{G'}$-加群の族 $\left\{\mathbb{C}^{m(\pi)}\right\}_{\pi \in X}$ に対して命題 2.3 を用いて $\mathcal{M}^{PI}_{G'_\mathbb{R}}(V) \leq \mathcal{M}^{an}_{G'_\mathbb{R}}(V)$ を得る。命題 3.2 から $\mathcal{M}^{an}_{G'_\mathbb{R}}(V) \leq \mathcal{M}^{alg}_{G'_\mathbb{R}}(V)$ が従うので、一つ目の不等式が得られた。

命題 2.3 より、任意の既約 $\tau(\mathcal{U}(\mathfrak{g})^{G'})$-加群の次元は $\mathcal{M}^{PI}_{G'_\mathbb{R}}(V)$ 以下である。したがって、

$$\dim_\mathbb{C}((V_\pi)^\vee_{K'} \otimes_{\mathcal{U}(\mathfrak{g}')} V_K) \leq L(V) \cdot \mathcal{M}^{PI}_{G'_\mathbb{R}}(V)$$

となり、 sup を取れば二つ目の不等式が得られる。 □

この命題より、重複度の有界性を示すためには、 $L(V)$ と $\mathcal{M}^{PI}_{G'_\mathbb{R}}(V)$ が有限であることを示せばよいことがわかる。任意の既約ユニタリ表現 V に対して $L(V)$ は有限であると予想される。

予想 3.5. 命題 3.3 において、$L(V) < \infty$ である。

いくつか具体的な場合に対する $\mathrm{length}((V_\pi)^\vee_{K'} \otimes_{\mathcal{U}(\mathfrak{g}')} V_K)$ と $L(V)$ の値の例を挙げる。

例 3.6. $G'_\mathbb{R}$ がコンパクトであるとき、$L(V) = 1$ となる。これは、$\mathrm{Hom}_{G'_\mathbb{R}}(V_\pi, V_K)$ が 既約 $\mathcal{U}(\mathfrak{g})^{G'}$-加群になる、という古典的な結果に他ならない。命題 3.3 から、$\mathcal{M}^{PI}_{G'_\mathbb{R}}(V) = \mathcal{M}^{an}_{G'_\mathbb{R}}(V)$ となる。この結果は I. Penkov と V. Serganova によって示されている [23, Theorem 4.3]。

例 3.7. $G_\mathbb{R}$ がエルミート型単純リー群、$G'_\mathbb{R}$ が $G_\mathbb{R}$ の連結な簡約部分群であり、$\mathfrak{k}' \supset \mathfrak{c}(\mathfrak{k})$ を満たすとする。V が $G_\mathbb{R}$ の正則離散系列表現であるとき、 $L(V) = 1$ となる。したがって、命題 3.3 から $\mathcal{M}^{PI}_{G'_\mathbb{R}}(V) = \mathcal{M}^{an}_{G'_\mathbb{R}}(V)$ となる。

$(G_{\mathbb{R}}, G'_{\mathbb{R}})$ が対称対の場合の $\mathcal{M}^{an}_{G'_{\mathbb{R}}}(V)$ の有限性は小林俊行氏によって示されている [11, Theorem B]。

例 3.8. $G_{\mathbb{R}}$ がエルミート型単純リー群、 $(G_{\mathbb{R}}, G'_{\mathbb{R}})$ が反正則型の対称対であるとする。(つまり、 $G'_{\mathbb{R}}/K'_{\mathbb{R}} \subset G_{\mathbb{R}}/K_{\mathbb{R}}$ は総実部分多様体となる。) このとき、$G_{\mathbb{R}}$ の正則離散系列表現 V と「一般の」既約 $(\mathfrak{g}', K')$-加群 W に対して $\mathrm{length}(W^{\vee} \otimes_{\mathcal{U}(\mathfrak{g}')} V_K) = 1$ となる。$L(V)$ の値はわからないが、この結果から $\mathcal{M}^{PI}_{G'_{\mathbb{R}}}(V) = \mathcal{M}^{an}_{G'_{\mathbb{R}}}(V)$ となることを示すことができる。

本稿では、具体的な重複度や $\mathcal{M}^{an}_{G'_{\mathbb{R}}}(V)$ の値について詳しく扱わない。例 3.7 における分岐則については [7] や [14]、例 3.8 における分岐則については [5] で記述されている。例 3.7, 3.8 で、 $(G_{\mathbb{R}}, G'_{\mathbb{R}})$ が対称対になるような場合に対しては、 $\mathcal{M}^{an}_{G'_{\mathbb{R}}}(V) = 1$ となるための十分条件が与えられており [13, Theorem 18, Theorem 34], [14, Theorem A]、例 3.7 の場合は必要条件にもなっている [10]。

$\mathcal{M}^{PI}_{G'_{\mathbb{R}}}(V) = \mathcal{M}^{an}_{G'_{\mathbb{R}}}(V)$ となる例を挙げたが、等号が成り立たない例も存在する。

例 3.9. $(G_{\mathbb{R}}, G'_{\mathbb{R}}) = (\mathrm{Sp}(2n, \mathbb{R}), \mathrm{Sp}(n, \mathbb{R}))$ とし、 V を $\mathrm{Sp}(2n, \mathbb{R})$ の (二重被覆の) Weil 表現とする。$\mathrm{Sp}(n, \mathbb{R})$ は $\mathrm{Sp}(2n, \mathbb{R})$ の対称部分群 $\mathrm{Sp}(n, \mathbb{R}) \times \mathrm{Sp}(n, \mathbb{R})$ に対角に埋め込まれているものを考える。このとき、 $\mathcal{M}^{PI}_{G'_{\mathbb{R}}}(V) = 1, \mathcal{M}^{an}_{G'_{\mathbb{R}}}(V) = 2$ となる。また、$L(V) = 2$ である。これは、 dual pair の理論の特別な場合である [9]。

4 $\mathcal{U}(\mathfrak{g})^{G'}$-加群と $(\mathfrak{g}' \oplus \mathfrak{g}, \Delta(G'))$-加群

$\mathcal{U}(\mathfrak{g})^{G'}$-加群の長さを評価する方針について述べる。ここでは、 $\mathcal{U}(\mathfrak{g})^{G'}$-加群を、$(\mathfrak{g}' \oplus \mathfrak{g}, \Delta(G'))$-加群の $\Delta(G')$-不変な元の空間として捉えることによって調べる。

補題 4.1. V を $(\mathfrak{g}' \oplus \mathfrak{g}, \Delta(G'))$-加群とする。$V^{\Delta(G')}$ を埋め込み $\mathcal{U}(\mathfrak{g})^{G'} \hookrightarrow \mathcal{U}(\mathfrak{g}' \oplus \mathfrak{g})^{\Delta(G')}$ を用いて $\mathcal{U}(\mathfrak{g})^{G'}$-加群と考える。このとき、 $\mathrm{length}(V^{\Delta(G')}) \leq \mathrm{length}(V)$ となる。

Proof. よく知られた結果:

- $(\mathfrak{g}, K)$-加群から $\mathcal{U}(\mathfrak{g})^K$-加群を与える関手 $V \mapsto V^K$ は、完全関手かつ既約加群を既約加群または 0 に移す [24, 3.1]、

と同様にして、 $(\mathfrak{g}' \oplus \mathfrak{g}, \Delta(G'))$-加群から $\mathcal{U}(\mathfrak{g}' \oplus \mathfrak{g})^{\Delta(G')}$-加群を与える関手 $V \mapsto V^{\Delta(G')}$ は、完全関手かつ既約加群を既約加群または 0 に移す、ということが示される。

$\Delta(G')$-不変元への作用を考えているので、$\mathcal{I} := \mathcal{U}(\mathfrak{g}' \oplus \mathfrak{g})^{\Delta(G')} \cap \mathcal{U}(\mathfrak{g}' \oplus \mathfrak{g})\Delta(\mathfrak{g}')$ は $V^{\Delta(G')}$ に自明に作用している。$\mathcal{U}(\mathfrak{g})^{G'} \to \mathcal{U}(\mathfrak{g}' \oplus \mathfrak{g})^{\Delta(G')}/\mathcal{I}$ が同型であることから主張が従う。 □

$(V_\pi)^{\vee}_{K'} \otimes_{\mathcal{U}(\mathfrak{g}')} V_K$ が $\Delta(G')$-不変元全体になるような $(\mathfrak{g}' \oplus \mathfrak{g}, \Delta(G'))$-加群を Bernstein 関手 $\Pi^{\Delta(G')}_{\{e\}}$ を用いて構成する。以下の事実は、 Bernstein 関手の構成から直ちに従う。

事実 4.2. V を $\mathfrak{g}$-加群、W を $\mathfrak{g}'$-加群とする。$\mathcal{U}(\mathfrak{g})^{G'}$-加群としての同型 $\Pi^{\Delta(G')}_{\{e\}}(W \otimes V)^{\Delta(G')} \simeq W \otimes_{\mathcal{U}(\mathfrak{g}')} V$ が成り立つ。

$\Pi^{\Delta(G')}_{\{e\}}(W \otimes V)$ の加群の長さが有限であることをいうために、Beilinson–Bernstein 対応を用いる (例えば、[4, Chapter 11], [8])。X を $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}'$ の full flag variety とする。

補題 4.3. V を $\mathfrak{g}$-加群、W を $\mathfrak{g}'$-加群とする。$V \otimes W$ は無限小指標 χ を持つとする。$V \otimes W$ に対応する X 上の $\mathcal{D}_\lambda$-加群は holonomic であると仮定する。ここで、 $\lambda \in \chi$ を integrally anti-dominant となるように取り、 $\mathcal{D}_\lambda$ は X 上の twisted differential operator の層である。このとき、 $\Pi_{\{e\}}^{\Delta(G')}(W \otimes V)$ は有限長である。したがって、 $\mathcal{U}(\mathfrak{g})^{G'}$-加群 $W \otimes_{\mathcal{U}(\mathfrak{g}')} V$ も有限長となる。

Outline of the proof. translation functor を用いれば χ が regular な場合のみを考えればよいことがわかる。Beilinson–Bernstein 対応より、無限小指標 χ を持つ $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}'$-加群の圏は $\mathcal{D}_\lambda$-加群の圏と圏同値になる。この圏同値において、 Bernstein 関手 $\Pi_{\{e\}}^{\Delta(G')}$ は direct image と inverse image を用いて表すことができる [1]。したがって、 holonomic という性質は保たれ、特に有限長となる。 □

補題 4.3 の holonomic という仮定は、 V が有限長の $(\mathfrak{g}, K)$-加群や BGG Category $\mathcal{O}$ の対象のときは自動的に成り立つ。

定理 4.4. V を既約 $(\mathfrak{g}, K)$-加群とする。$V|_{(\mathfrak{g}', K')}$ は離散分解すると仮定する。(すなわち、任意の $v \in V$ に対して $\mathcal{U}(\mathfrak{g}')v$ は有限長である。) このとき、命題 3.3 の記号において $L(V) < \infty$ となる。

Outline of the proof. $V^\vee|_{(\mathfrak{g}', K')}$ の部分加群 W を動かし、$\Pi_{\{e\}}^{\Delta(G')}(W \otimes V)$ の加群の長さがどのように変化するか考える。特定の条件下で W を translation functor で移しても $\Pi_{\{e\}}^{\Delta(G')}(W \otimes V)$ の加群の長さは不変になっている。したがって、 $V^\vee|_{(\mathfrak{g}', K')}$ の既約部分加群を上記の translation functor で移して、有限個の既約加群の場合に帰着できれば $L(V)$ の有限性が示される。

$V^\vee|_{(\mathfrak{g}', K')}$ は離散分解するという仮定があるので、$V^\vee|_{(\mathfrak{g}', K')}$ の既約部分加群の無限小指標は integral weight の集合 Λ を平行移動したものの部分集合になっている。このことと、ある固定した無限小指標を持つ $(\mathfrak{g}', K')$-加群が有限個であることから、 translation functor を用いて W として有限個の既約部分加群のみを考えればよいことがわかる。したがって、 $L(V) < \infty$ となる。

□

系 4.5. $(V_K)_{(\mathfrak{g}', K')}$ が離散分解するような $G_\mathbb{R}$ の既約ユニタリ表現 V に対して、

$$\begin{aligned} &\mathcal{M}_{G'_\mathbb{R}}^{PI}(V) < \infty \\ \Leftrightarrow\ &\mathcal{M}_{G'_\mathbb{R}}^{an}(V) < \infty \\ \Leftrightarrow\ &\mathcal{M}_{G'_\mathbb{R}}^{alg}(V) < \infty \end{aligned}$$

が成り立つ。

5 最高ウェイト加群の場合

一般の場合に $L(V) < \infty$ となるかは未解決だが、前節で扱ったように離散分解する場合などでは正しい。また、予想が一般に正しくなかったとしても $\mathcal{M}_{G'_\mathbb{R}}^{PI}(V) < \infty$ は $\mathcal{M}_{G'_\mathbb{R}}^{an}(V) < \infty$ となるための必要条件である。ここでは、 $\mathcal{M}_{G'_\mathbb{R}}^{PI}(V)$ の性質を V が最高ウェイト加群の性質に帰着させることで、組合せ論的な状況に持ち込む。

$\mathcal{M}_{G'_\mathbb{R}}^{PI}(V)$ の定義から、 $\mathrm{Ann}_{\mathcal{U}(\mathfrak{g})}(V)$ が等しければ V を取り換えても値は変わらないことがわかる。したがって、 $\mathcal{M}_{G'_\mathbb{R}}^{PI}(V) < \infty$ となるような V を分類する前に $\mathrm{PI.deg}((\mathcal{U}(\mathfrak{g})/I)^{G'}) < \infty$ となる primitive ideal I の分類について考える。

事実 5.1 (M. Duflo [2]). $\mathfrak{g}$ の Borel 部分代数 $\mathfrak{b}$ を固定する。$\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ の任意の primitive ideal I に対して、ある既約な ($\mathfrak{b}$ に関する) 最高ウェイト加群 V が存在して $\mathrm{Ann}(V) = I$ となる。

この事実から $\mathrm{PI.deg}((\mathcal{U}(\mathfrak{g})/I)^{G'}) < \infty$ となる primitive ideal I の分類のためには、 V として最高ウェイト加群を考えればよいことがわかる。定理 4.4 でみたように離散分解する分岐則の場合には $L(V) < \infty$ が保証される。定理 4.4 は $(\mathfrak{g}, K)$-加群に対して述べたが、使っている性質は Category $\mathcal{O}$ に対しても成り立つので、 Category $\mathcal{O}$ の対象に対しても定理の主張は成り立つ。以下でもう少し詳細に述べる。

$\mathfrak{g}$ の Borel 部分代数 $\mathfrak{b}$ を $\mathfrak{b}' := \mathfrak{b} \cap \mathfrak{g}'$ が $\mathfrak{g}'$ の Borel 部分代数になるようにとる。また、Levi decomposition $\mathfrak{b} = \mathfrak{t} \oplus \mathfrak{n}, \mathfrak{b}' = \mathfrak{t}' \oplus \mathfrak{n}'$ も $\mathfrak{t}' = \mathfrak{t} \cap \mathfrak{g}', \mathfrak{n}' := \mathfrak{n} \cap \mathfrak{g}'$ となるようにとる。[15, Proposition 3.5] より、 $(\mathfrak{g}, \mathfrak{b})$ に対する $\mathcal{O}$ の対象は $\mathfrak{g}'$ に制限すると離散的に分解する。

$(\mathfrak{g}, \mathfrak{b})$ に対する Caterogy $\mathcal{O}$ を $\mathcal{O}^{\mathfrak{g}}$ 、$(\mathfrak{g}', \mathfrak{b}')$ に対する Caterogy $\mathcal{O}$ を $\mathcal{O}^{\mathfrak{g}'}$ とする。

定理 5.2. $V \in \mathcal{O}^{\mathfrak{g}}$ に対して、以下の条件は同値である。

(i) $\mathcal{M}^{PI}_{G'_{\mathbb{R}}}(V) < \infty$

(ii) $V^{\mathfrak{n}'}$ は $\mathfrak{t}'$-加群として、一様に有界な重複度を持つ。

(iii) $V|_{\mathfrak{g}'}$ は組成因子の意味で、一様に有界な重複度を持つ。

Outline of the proof. (i) $\Rightarrow$ (ii)

任意の Verma 加群 W に対して、$\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}'}(W, V)$ の $\mathcal{U}(\mathfrak{g})^{G'}$-加群の長さが一様に抑えられることが定理 4.4 と同様に示せるので、そこから従う。

(ii) $\Rightarrow$ (iii)

離散的に分解することから、 V は互いに異なる一般化無限小指標を持つ $\mathfrak{g}'$-加群の直和に分解する。その直和成分の一つを W とする。$W^{\mathfrak{n}'}$ の極大な weight のうちの一つを λ とする。

weight λ を含まないような W 最大の部分加群を W_0 とすると、W_0 の取り方から W/W_0 の既約部分加群は λ を最高ウェイトとする既約最高ウェイト加群となる。したがって、 $(W/W_0)^{\vee}$ は $\dim_{\mathbb{C}}(W^{\mathfrak{n}'}(\lambda))$ 個の Verma 加群の直和の商と同型であることがわかる。Verma 加群の長さの最大値を C とすると、

$$\mathrm{length}(W/W_0) \leq \dim_{\mathbb{C}}(W^{\mathfrak{n}'}(\lambda)) \cdot C$$

となる。

W_0 に対して同様の議論を繰り返せば $\mathrm{length}(W) \leq \dim_{\mathbb{C}}(W^{\mathfrak{n}'}) \cdot C$ を得る。

(iii) $\Rightarrow$ (i)

(ii) $\Rightarrow$ (iii) の証明と同様に一般化無限小指標を持つ場合 W に帰着される。$n = k_1 + k_2$ のとき非可換多項式 s_n は s_{k_1} と s_{k_2} を用いて表されることと、W の加群の長さに関する帰納法を用いれば、 $\mathrm{PI.deg}(\mathrm{End}_{\mathfrak{g}'}(W))$ が $\mathrm{length}(W)$ のみで定まる定数で上から抑えられることがわかる。このことと命題 2.3 から主張が従う。

□

定理 5.2 の (iii) は有限次元表現をテンソル積しても保たれることから、以下の系を得る。

系 5.3. V を既約 $(\mathfrak{g}, K)$-加群とし、 F を有限次元 $(\mathfrak{g}, K)$-加群とする。$V \otimes F$ の任意の部分商 W に対して

$$\mathcal{M}^{PI}_{G'_{\mathbb{R}}}(V) < \infty \Rightarrow \mathcal{M}^{PI}_{G'_{\mathbb{R}}}(W) < \infty$$

が成り立つ。

参考文献

[1] F. V. Bien. *$\mathscr{D}$-modules and spherical representations*, volume 39 of *Mathematical Notes*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1990.

[2] M. Duflo. Sur la classification des idéaux primitifs dans l'algèbre enveloppante d'une algèbre de Lie semi-simple. *Ann. of Math. (2)*, 105(1):107–120, 1977.

[3] R. Goodman. Complex Fourier analysis on a nilpotent Lie group. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 160:373–391, 1971.

[4] R. Hotta, K. Takeuchi, and T. Tanisaki. *D-modules, perverse sheaves, and representation theory*, volume 236 of *Progress in Mathematics*. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 2008. Translated from the 1995 Japanese edition by Takeuchi.

[5] R. Howe. Reciprocity laws in the theory of dual pairs. In *Representation theory of reductive groups (Park City, Utah, 1982)*, volume 40 of *Progr. Math.*, pages 159–175. Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1983.

[6] R. Howe. Remarks on classical invariant theory. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 313(2):539–570, 1989.

[7] H. P. Jakobsen and M. Vergne. Restrictions and expansions of holomorphic representations. *J. Funct. Anal.*, 34(1):29–53, 1979.

[8] M. Kashiwara. Equivariant derived category and representation of real semisimple Lie groups. In *Representation theory and complex analysis*, volume 1931 of *Lecture Notes in Math.*, pages 137–234. Springer, Berlin, 2008.

[9] M. Kashiwara and M. Vergne. On the Segal-Shale-Weil representations and harmonic polynomials. *Invent. Math.*, 44(1):1–47, 1978.

[10] M. Kitagawa. Stability of branching laws for highest weight modules. *Transform. Groups*, 19(4):1027–1050, 2014.

[11] T. Kobayashi. Multiplicity free theorem in branching problems of unitary highest weight modules. *Proceedings of Representation Theory held at Saga, Kyushu, 1997 (K. Mimachi, ed.)*, pages 9–17, 1997.

[12] T. Kobayashi. Geometry of multiplicity-free representations of $\mathrm{GL}(n)$, visible actions on flag varieties, and triunity. *Acta Appl. Math.*, 81(1-3):129–146, 2004.

[13] T. Kobayashi. Multiplicity-free representations and visible actions on complex manifolds. *Publ. Res. Inst. Math. Sci.*, 41(3):497–549, 2005.

[14] T. Kobayashi. Multiplicity-free theorems of the restrictions of unitary highest weight modules with respect to reductive symmetric pairs. In *Representation theory and automorphic forms*, volume 255 of *Progr. Math.*, pages 45–109. Birkhäuser Boston, Boston, MA, 2008.

[15] T. Kobayashi. Restrictions of generalized Verma modules to symmetric pairs. *Transform. Groups*, 17(2):523–546, 2012.

[16] T. Kobayashi. Propagation of the multiplicity-freeness property for holomorphic vector bundles. In *Lie Groups: Structure, Actions, and Representations*, volume 306 of *Progr. Math.* Birkhäuser Basel, 2013.

[17] T. Kobayashi. A program for branching problems in the representation theory of real reductive groups. In *Representations of Reductive Groups: In Honor of the 60th Birthday of David A. Vogan, Jr.*, volume 312 of *Progress in Mathematics*, pages 277–322. Birkhäuser/Springer, Cham, 2015.

[18] T. Kobayashi and B. Ørsted. Analysis on the minimal representation of $\mathrm{O}(p,q)$. II. Branching laws. *Adv. Math.*, 180(2):513–550, 2003.

[19] T. Kobayashi, B. Ørsted, and M. Pevzner. Geometric analysis on small unitary representations of $\mathrm{GL}(N,\mathbb{R})$. *J. Funct. Anal.*, 260(6):1682–1720, 2011.

[20] T. Kobayashi and T. Oshima. Finite multiplicity theorems for induction and restriction. *Adv. Math.*, 248:921–944, 2013.

[21] J. C. McConnell and J. C. Robson. *Noncommutative Noetherian rings*, volume 30 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, revised edition, 2001. With the cooperation of L. W. Small.

[22] A. E. Nussbaum. Reduction theory for unbounded closed operators in Hilbert space. *Duke Math. J.*, 31:33–44, 1964.

[23] I. Penkov and V. Serganova. On bounded generalized Harish-Chandra modules. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 62(2):477–496, 2012.

[24] N. R. Wallach. *Real reductive groups. I*, volume 132 of *Pure and Applied Mathematics*. Academic Press, Inc., Boston, MA, 1988.