

質量の数理表現論

—ヒッグス場への 100 年の歩み—

佐野 茂 (Shigeru SANNO)

2016 年 11 月 30 日

はじめに

昨年は群の表現論の離散系列表現の最近 100 年についてまとめて発表した。群の表現論は物理から強い刺激を受けて発展してきたのはよく知られている。元になる物理ではここ 100 年質量が根本的テーマとなっている。質量に関して得られた成果を整理すると、ここには質量の数理表現論と呼ばれるべき内容があることに気付かされる。

歴史的にはアイザックニュートンの万有引力の法則がまずある。二つの天体の距離を r そして重力質量をそれぞれ M, m としたとき引力は

$$F = G \frac{Mm}{r^2} \quad (G \text{ は万有引力定数})$$

となる。また運動している物体に力 F が働いているときの運動の方程式は物体の慣性質量を m とすると

$$F = ma$$

となる。

§ 1. 重力場方程式

慣性質量と重力質量は等しいという実験結果に基づきアインシュタインは重力場方程式を導いている。

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R = \frac{8\pi G}{c^4}T^{\mu\nu}$$

左辺は空間の曲率を表し、右式は物質のエネルギーを表している。この方程式より (1) 重力レンズ、(2) 近日点の移動、(3) 重力波が予想された。

(1) 重力レンズ

アインシュタインはイギリスのエディントンに重力レンズの実証を依頼している。1919

年 5 月 29 日スペイン領ギニアの沖合の島での日食でイギリスのエディントン隊により太陽の裏側にある星が観測された。

(2) 近日点の移動

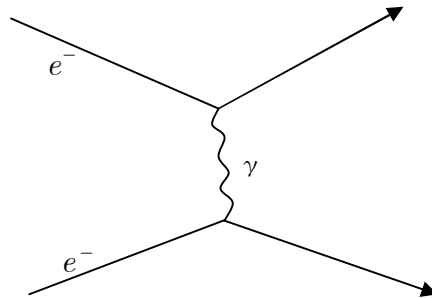
水星の太陽にもっとも近づく近日点が 100 年間観測してずれてくるというのはニュートン力学では説明できない歴史的な問題であった。この重力方程式により理論的に説明できた。

(3) 重力波

ブラックホールの連星が合体するときに生まれた重力波が 2015 年 9 月に観測され実証された。

§ 2. 電磁力

電子 e^- はマイナスの電荷をもっているために互いに反発をするが、これは光子交換 γ による相互作用であることが実証されている。



光子のラグランジアンは

$$\mathcal{L}_\gamma = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \quad (1)$$

ここで

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E^1 & -E^2 & -E^3 \\ E^1 & 0 & -B^3 & B^2 \\ E^2 & B^3 & 0 & -B^1 \\ E^3 & -B^2 & B^1 & 0 \end{pmatrix}$$

である。オイラー・ラグランジュ方程式

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0$$

を満足している。この方程式よりマックスウェルの方程式が導かれる。

マックスウェルの方程式：

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{E} = \rho, & \nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, & \nabla \times \mathbf{B} - \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \mathbf{j} \end{cases}$$

この方程式を量子化することにより量子電気力学(Quantum Electrodynamics, QED)の理論が生まれ高い精度で磁気モーメントなどが求められている。

§ 3. バリオンとメソンの分類

陽子 p や中性子 n は 3 個のクォークからなり、パイ中間子はクォークと反クォークの組からなっている。現在までに知られているクォークは 3 つの階層になっている。

表 1

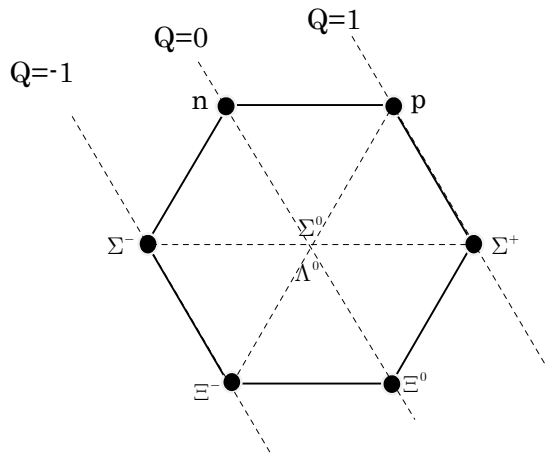
クォーク	スピン	バリオン数 B	レプトン数 L	電荷 Q	質量 MeV
u	1/2	1/3	0	2/3	3
d	1/2	1/3	0	-1/3	6
c	1/2	1/3	0	2/3	1,200
s	1/2	1/3	0	-1/3	120
t	1/2	1/3	0	2/3	174,000
b	1/2	1/3	0	-1/3	4,200

基本となる素粒子はクォーク u, d, s で成り立っている。群 $SU(3)$ の 3 次元表現のテンソル積の既約分解は

$$3 \otimes 3 \otimes 3 = 10 \oplus 8 \oplus 8 \oplus 1$$

となる。1965 年の早い時期に南部陽一郎は素粒子がこの分解に従っていくことを論文で予想している([HN])。実際に新しい素粒子が次々に発見されるが、この表現の既約分解は素粒子の分類に大きな指針となっていった。3 種類のクォークしか知られていなかった 1973 年に益川敏英・小林誠はさらに少なくとも 3 種類のクォークがあれば CP 対称性がわずかに破れることを理論的に示した。

◎バリオン 8 重項



◎主なバリオン粒子

表 2

バリオン粒子	構成	質量 MeV	電荷 Q
陽子 p	uud	938	1
中性子 n	udd	940	0
シグマ粒子 Σ^+	uus	1,189	1
シグマ粒子 Σ^0	uds	1,193	0
シグマ粒子 Σ^-	dds	1,197	-1
ラムダ粒子 Λ^0	uds	1,116	0
グザイ粒子 Ξ^0	uss	1,315	0
グザイ粒子 Ξ^-	dss	1,321	-1

(注) Σ^0 の構成の状態は $\{(sd - ds)u + (su - us)d\} / 2$

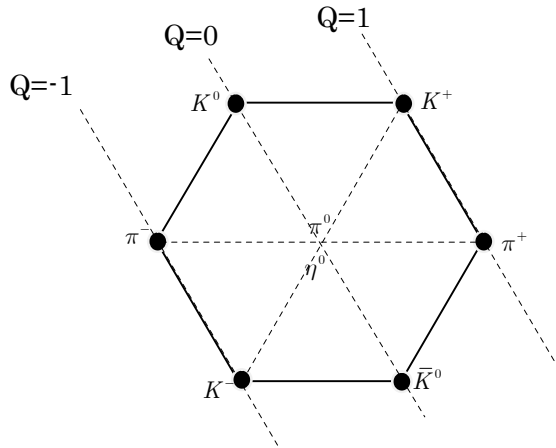
Λ^0 の構成の状態は $\{(sd - ds)u - (su - us)d - 2(du - ud)s\} / \sqrt{12}$

中間子はクォークと反クォークの対となる粒子のメソンとして理解されるようになっていった。クォーク u, d, s と反クォーク $\bar{u}, \bar{d}, \bar{s}$ に対する南部陽一郎による $SU(3)$ の 3 次元表現の既約分解は

$$3 \otimes \bar{3} = 8 \oplus 1$$

となる。

◎メソン 8 重項



◎主なメソン粒子

表 3

メソン粒子	構成	質量 MeV	電荷 Q
パイ中間子 π^+	$u\bar{d}$	140	1
パイ中間子 π^0	$(u\bar{u} - d\bar{d}) / \sqrt{2}$	135	0
パイ中間子 π^-	$d\bar{u}$	140	-1
K 中間子 K^+	$u\bar{s}$	494	1
K 中間子 K^0	$d\bar{s}$	498	0
K 中間子 K^-	$s\bar{u}$	494	-1
K 反中間子 \bar{K}^0	$s\bar{d}$	498	0
イータ中間子 η^0	$(u\bar{u} + d\bar{d} - 2s\bar{s}) / \sqrt{6}$	548	0

反粒子 $\bar{u}, \bar{d}, \bar{s}$ の量子数 B, L, Q は対応する粒子の符号を反転させ、それ以外の性質は同じで

ある。例えば \bar{u} は $B = -1/3, L = 0, Q = -2/3$ である。

§ 4. 強い力

バリオンは 3 個のクォークからなっているが、各クォークのスピンは $1/2$ である。例えば

$$\Lambda^{++} = uuu$$

のスピンは和をとって $3/2$ となる. 3つの同じフェルミオン u で完全に対称な基底状態 uuu とならなければならないが, これはフェルミ統計で禁止されている. この問題は新しい量子数を与えることで解決した. それはカラー荷で, クォークは色の三原色赤(R), 緑(G), 青(B)をもつと考える. そして自然界にある素粒子はすべて色のない白色であると要請する. ラムダ粒子は

$$\Lambda^{++} = u_R u_G u_B$$

となる. 反クォークの色は補色のシアン(\bar{R}), マゼンタ(\bar{G}), 黄(\bar{B})とする. 色のない白色となるのは次の場合である.

- (1) 赤, 緑, 青が等量混ざる. ($R G B$)
- (2) シアン, マゼンタ, 黄が等量混ざる. ($\bar{R} \bar{G} \bar{B}$)
- (3) カラーとその補色が等量混ざる. ($R \bar{R} G \bar{G} B \bar{B}$)

量子色力学 (Quantum Chromodynamics, QCD) のラグランジアン密度は

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^A F^{A\mu\nu} + i\bar{\varphi} \not{D} \varphi \quad (2)$$

である. 正確に書くと

$$\mathcal{L}_{QCD} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^A F^{A\mu\nu} + \sum_q \bar{\varphi}_{q a} (i\gamma^\mu \partial_\mu \delta_{ab} - g_s \gamma^\mu t_{ab}^C \mathcal{A}_\mu^C - m_q \delta_{ab}) \varphi_{q b}$$

$$F_{\mu\nu}^A = \partial_\mu \mathcal{A}_\nu^A - \partial_\nu \mathcal{A}_\mu^A - g_s f_{ABC} \mathcal{A}_\mu^B \mathcal{A}_\nu^C$$

A, B, C は 1 から 8 までをとり, 8 種類のグルーオンに対応する.

カラー荷間の QCD 力を媒介するグルーオンは 8 つの異なるカラーの組み合わせで与えられる. グルーオンはカラー群 $SU(3)$ の 8 重項に属している.

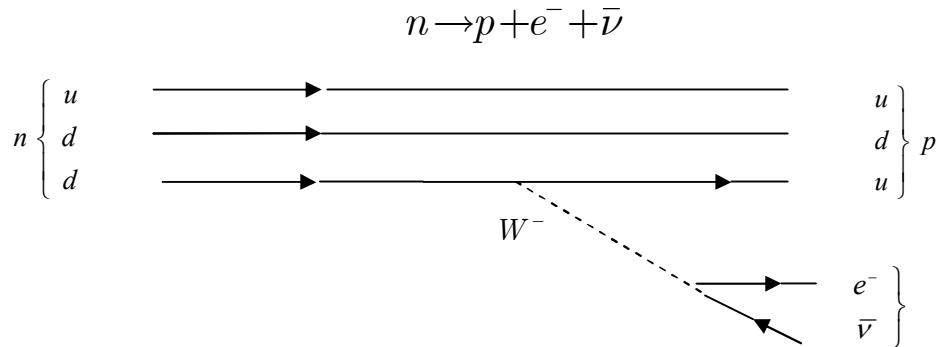
$$g_1 = R\bar{G}, g_2 = R\bar{B}, g_3 = G\bar{R}, g_4 = G\bar{B}, g_5 = B\bar{R}, g_6 = B\bar{G}$$

$$g_7 = (R\bar{R} - G\bar{G}) / \sqrt{2}, g_8 = (R\bar{R} + G\bar{G} - 2B\bar{B}) / \sqrt{6}$$

歴史的には湯川秀樹の論文 ([Yu]) により原子核を維持する力として中間子による相互作用が予想され, 中間子が後に発見され理論の正しさが証明された. その後, グルーオンによる強い力により統一的に説明されるようになっていった.

§ 5. 弱い力

弱い相互作用は荷電ベクトルボソンすなわちウィークボソン W^\pm の放出と吸収により生じる。 β 崩壊



レプトン数には 3 種類あり，記入されていないレプトン数はすべてゼロである．反粒子 $e^+, \bar{\nu}_e, \bar{\mu}, \bar{\nu}_\mu, \bar{\tau}, \bar{\nu}_\tau$ の量子数 B, L, Q は対応する粒子の符号を反転させ，それ以外の性質は同じである．例えば陽電子 e^+ の量子数は $B = 0, L = -1, Q = 1$ である．

光子やグルーオンのようにゲージ粒子は本来質量が 0 であるが，ゲージ粒子のウィークボソン W^\pm, Z^0 が大きな質量をもつことは素粒子論の大きな課題となった．

§ 6. ヒッグス場

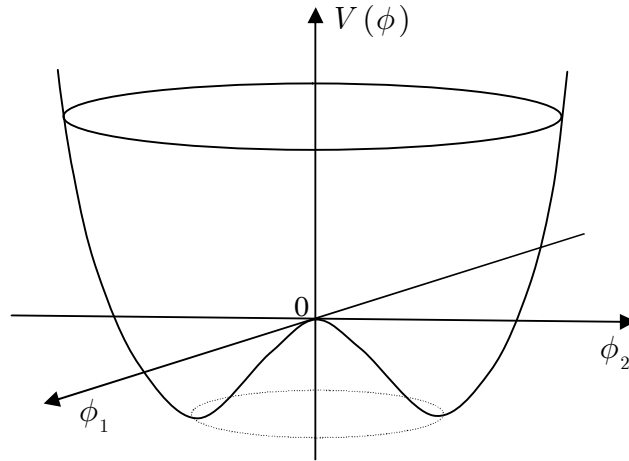
ゲージ粒子 W^\pm と Z^0 に質量を与え，光子 γ の質量は 0 のままであるようにヒッグス場の定式化がなされた．ヒッグス場のラグランジアン

$$\mathcal{L}_\phi = (D^\mu \phi)^* (D_\mu \phi) - V(\phi) \quad (3)$$

を $SU(2) \times U(1)$ ゲージ対称性を満足するように定める．ポテンシャルは

$$V(\phi) = a^2(\phi^* \phi) + |b|(\phi^* \phi)^2$$

ここで ϕ^* は粒子 ϕ のエルミート対称で反粒子を表している． $\phi = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix}$



ヒッグス粒子は局所対称性の自発的破れにより質量をもつゲージ粒子ウィークボソンとして姿を現すと理解されるようになった。そしてワインバーグが予想したように 1983 年には 80GeV と 91GeV 近くでウィークボソン W^\pm, Z^0 がそれぞれ確認された。そこで元になるヒッグス粒子は確実に発見できると世界は確信をもったのである。そして加速器による粒子衝突のエネルギーを上げてヒッグス粒子を発見しようと世界はしのぎを削っている。こうした努力の末にヒッグス粒子は 125GeV で発見され 2013 年の国際会議で認定された。こうして物質の質量はヒッグス場との相互作用により獲得されると理解されるようになったのである。

表 4

ゲージボソン	スピン	質量 GeV	電荷 Q
光子 γ	1	0	0
W^\pm, Z^0	1	$W^\pm : 80, Z^0 : 91$	$\pm 1, 0$
グルーオン g_1, \dots, g_8	1	0	0

§ 7. 今後の課題

質量について整理してきたが、21 世紀も質量は重要なテーマとして研究されていくことだろう。表現論の立場から理論を検証して貢献できる土壌が整ってきた印象である。基本となる問題として挙げられるのは

問題 1. 力の統一では電磁力と弱い力そして強い力がラグランジアンにより統一的に扱うことが可能になった. これに重力を加えて統一場理論を建設せよ.

これはアインシュタインロマンとして多くの物理学者がめざしてきたが, ヒッグス場が実証され実現の可能性が大きくなった.

問題 2. ダークマターは電磁力も強い力も働かない物質だが, 新たな量子数を与えることでダークマターの理論を作れ.

文献

[Di]P.A.M. Dirac, The quantum theory of the electron, Proceedings of the Royal Society Bd.117, 1928, S.610, Bd.118, S.351 (Diracgleichung, spin)

[HM]F.Halzen, A.D.Martin, Quarks & Lepton -An introduction course in modern particle physics-, John Wiley & Sons,1984.

[HN]M.Y. Han, Y. Nambu, Three-Triplet Model with Double SU(3) Symmetry, Physical Review, vol. 139 N.4B(1965).

[P]Particle data group, Particle physics booklet 2016.

[SO]佐野茂, 大野成義

素粒子論と表現論, 表現論シンポジウム講演集 2009

[w]S.Weinberg, Recent Progress in the Gauge Theories of the Weak, Electromagnetic and Strong Interactions. Rev. Mod. Phys. 46, 255 (1974).

[Yu]H.Yukawa, On the interaction of elementary particles. I., Proceedings of Phys.-Math. Society of Japan 1934.