

標準的な五つ組と contragredient Lie 代数 について (Standard pentads and contragredient Lie algebras)

佐々野詠淑¹
(九州大学 マス・フォア・インダストリ研究所)

1 はじめに

1.1 本稿の概要と目的

本稿の主目的は次の2つである:

- 標準的な五つ組の理論の枠内で contragredient Lie 代数論のアナロジーを考え (Theorem 3.7),
- それを応用して, 任意の有限次元簡約可能 Lie 代数およびその有限次元完全可約表現を reduced contragredient Lie 代数の central extension に埋め込む (Theorem 4.1).

1.2 約束

本稿では特に断りのない限り, 基礎体は常に複素数体 \mathbb{C} として扱う.

また, 本稿では, Lie 代数 \mathfrak{l} の U への表現は線形写像

$$\mathfrak{l} \otimes U \rightarrow U$$

であって, 等式

$$\rho([a, b] \otimes u) = \rho(a \otimes \rho(b \otimes u)) - \rho(b \otimes \rho(a \otimes u))$$

が任意の $a, b \in \mathfrak{l}$, $u \in U$ について成り立つものをいう.

2 標準的な五つ組と次数付き Lie 代数の構成

まず, 表題にもある**標準的な五つ組 (standard pentad)** という概念を準備しよう. 本節の内容の詳細については [4], [6] を参照されたい.

¹n-sasano@math.kyushu-u.ac.jp

2.1 標準的な五つ組とは？

標準的な五つ組を次のように定義する.

Definition 2.1 (標準的な五つ組). \mathfrak{g} を (有限または無限次元の) Lie 代数, (ρ, V) を \mathfrak{g} の (有限または無限次元) 表現, \mathcal{V} を $\text{Hom}(V, \mathbb{C})$ の部分 \mathfrak{g} -加群, B を \mathfrak{g} 上の非退化不変双一次形式²とする. また, V と $\text{Hom}(V, \mathbb{C})$ の間の自然な双一次形式を $\langle \cdot, \cdot \rangle$ で表す. これらの数学的対象から成る五つ組 $(\mathfrak{g}, \rho, V, \mathcal{V}, B)$ が**標準的な五つ組 (standard pentad)** であるとは, 次の 2 条件を満たすことを言う:

1. $\langle \cdot, \cdot \rangle$ の $V \times \mathcal{V}$ への制限が非退化である
2. 任意の $a \in \mathfrak{g}, v \in V, \phi \in \mathcal{V}$ に対し, 次の等式を満たす写像 $\Phi_\rho : V \otimes \mathcal{V} \rightarrow \mathfrak{g}$ が存在する:

$$B(a, \Phi_\rho(v \otimes \phi)) = \langle \rho(a \otimes v), \phi \rangle$$

このような写像 Φ_ρ を Φ -写像と呼ぶ.

一般に (標準的とは限らない) 五つ組は Φ -写像を持つとは限らない. 一方, もし五つ組 $(\mathfrak{g}, \rho, V, \mathcal{V}, B)$ が Φ -写像 Φ_ρ を持つとするとそれはただ一つに定まり, Φ_ρ は $V \otimes \mathcal{V}$ から \mathfrak{g} への \mathfrak{g} -加群の準同型となっている.

標準的な五つ組の定義においては, 各対象 $\mathfrak{g}, V, \mathcal{V}$ が無限次元になる場合も許容する. ただし, \mathfrak{g} が無限次元であれば Φ -写像が存在するとは限らないし, V が無限次元であれば $\mathcal{V} = \text{Hom}(V, \mathbb{C})$ とは限らない. 他方, \mathfrak{g} も V も有限次元であれば, $(\mathfrak{g}, \rho, V, \text{Hom}(V, \mathbb{C}), B)$ は常に標準的な五つ組になる.

2.2 いくつかの例

Example 2.2 (有限次元簡約可能 Lie 代数とその表現). \mathfrak{g} を有限次元簡約可能 Lie 代数とし, (ρ, V) をその (有限または無限次元の) 表現とする. \mathfrak{g} は非退化対称不変双一次形式を持つことが知られており (例えば [1, p.68, §6, no.4, 命題 5] 参照), そのうちのひとつをとって B とおくと, $(\mathfrak{g}, \rho, V, \text{Hom}(V, \mathbb{C}), B)$ は標準的な五つ組である.

ただし, $(\mathfrak{g}, \rho, V, \text{Hom}(V, \mathbb{C}), B)$ が Φ -写像をもつことは抽象的には簡単に証明できるが, その Φ -写像 Φ_ρ の具体形を明示することは簡単ではない.

Example 2.3. 今度は逆に, 無限次元 Lie 代数の有限次元表現を含む五つ組で標準的に ならない 例を紹介しよう. $\mathfrak{g} = \mathbb{C}[t, t^{-1}] \otimes \mathfrak{sl}_2$ を \mathfrak{sl}_2 のループ代数とする. \mathfrak{g} の \mathfrak{sl}_2 への表現 ρ を

$$\rho((t^n \otimes \xi) \otimes v) = [\xi, v] \quad (n \in \mathbb{Z}, t^n \otimes \xi \in \mathfrak{g}, v \in \mathfrak{sl}_2)$$

で定義する. また, \mathfrak{sl}_2 の Killing 形式 $K_{\mathfrak{sl}_2}$ を使って \mathfrak{g} 上の双一次形式 B を

$$B(t^n \otimes \xi, t^m \otimes \eta) = \delta(n + m, 0) K_{\mathfrak{sl}_2}(\xi, \eta)$$

²Lie 代数 \mathfrak{g} 上の双一次形式 B が不変であるとは, $B([z, x], y) = -B(x, [z, y])$ が任意の $x, y, z \in \mathfrak{g}$ について成立することを言う.

で定義すると ($\delta(\cdot, \cdot)$ は Kronecker のデルタ), B は非退化対称不変双一次形式になる. 非退化双一次形式 $K_{\mathfrak{sl}_2} : \mathfrak{sl}_2 \times \mathfrak{sl}_2 \rightarrow \mathbb{C}$ を通じて $\text{Hom}(\mathfrak{sl}_2, \mathbb{C})$ と \mathfrak{sl}_2 を同一視すると, 五つ組 $(\mathfrak{g}, \rho, \mathfrak{sl}_2 \mathfrak{sl}_2, B)$ を得る. この五つ組は Φ -写像を持たず, 従って標準的な五つ組にならない. 実際, もしこの五つ組が Φ -写像 Φ_ρ を持つと仮定すると,

$$\Phi_\rho \left(\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right) \right) = \cdots + t^{-1} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + t^0 \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + t^1 \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \cdots$$

という無限和が発生してしまう. これはループ代数 $\mathbb{C}[t, t^{-1}] \otimes \mathfrak{sl}_2$ の元ではない.

標準的な五つ組に含まれる Lie 代数は, 前提条件として, 非退化不変双一次形式を持っていないければならない. これはかなり強い条件であり, そもそもそのような双一次形式を持つ Lie 代数を見つけることが難しく, 標準的な五つ組のクラスは限定された対象のように思える. しかし, 群 (群環) を使えば機械的に沢山の標準的な五つ組を発見することができる.

Example 2.4 (群環と標準的な五つ組). 任意の (有限または無限) 群 G とその群環 $\mathbb{C}G$ を考える. 群環 $\mathfrak{g} = \mathbb{C}G$ に自然に Lie 代数の構造を導入し, その上の双一次形式 B_e を次で定義する:

$$B_e(1.g, 1.h) = \delta(e, gh) = \begin{cases} 1 & (g = h^{-1}) \\ 0 & (g \neq h^{-1}) \end{cases}, \quad (g, h \in G, e \text{ は } G \text{ の単位元}).$$

この双一次形式 B_e は非退化対称不変である. 実際, 任意の $g, h, k \in G$ に対して

$$\begin{aligned} B_e([1.k, 1.g], 1.h) &= B_e(1.(kg) - 1.(gk), 1.h) = \delta(e, kgh) - \delta(e, gkh) \\ &= \delta(e, ghk) - \delta(e, gkh) = -B_e(1.g, 1.(kh)) + B_e(1.g, 1.(hk)) = -B_e(1.g, [1.k, 1.h]). \end{aligned}$$

さて, $\mathbb{C}G$ の $\mathbb{C}G$ 自身への表現 $(\rho, V) = (\rho, \mathbb{C}G)$, $(\varrho, \mathcal{V}) = (\varrho, \mathbb{C}G)$ を

$$\rho(1.g \otimes 1.x) = 1.(gx), \quad \varrho(1.g \otimes 1.y) = -1.(yg) \quad g, x, y \in G$$

で定義し, 非退化双一次形式

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{C}G \times \mathbb{C}G \rightarrow \mathbb{C} \quad (\langle 1.x, 1.y \rangle = \delta(e, xy))$$

を通じて $(\varrho, \mathbb{C}G)$ を $\text{Hom}(V, \mathbb{C}) = \text{Hom}(\mathbb{C}G, \mathbb{C})$ の \mathfrak{g} -部分加群とみなすと, 五つ組 $(\mathfrak{g}, \rho, V, \mathcal{V}, B_e) = (\mathbb{C}G, \rho, \mathbb{C}G, \mathbb{C}G, B_e)$ を得る. これは, Φ -写像を

$$\Phi_\rho : \mathbb{C}G \otimes \mathbb{C}G \rightarrow \mathbb{C}G \quad (\Phi_\rho(1.x \otimes 1.y) = 1.(xy))$$

に持つ標準的な五つ組である. 実際,

$$B_e(1.g, \Phi_\rho(1.x \otimes 1.y)) = B_e(1.g, 1.(xy)) = \delta(e, gxy) = \langle \rho(1.g \otimes 1.x), 1.y \rangle$$

が成り立つ.

2.3 標準的な五つ組と次数付き Lie 代数

標準的な五つ組から次数付き Lie 代数を構成できる.

Theorem 2.5. 任意の標準的な五つ組 $(\mathfrak{g}, \rho, V, \nu, B)$ に対し, 次数付き Lie 代数

$$L(\mathfrak{g}, \rho, V, \nu, B) = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} V_n$$

で, 条件

$$V_{-1} \simeq \nu, \quad V_0 \simeq \mathfrak{g}, \quad V_1 \simeq V, \quad [x, y] = \Phi_\rho(x \otimes y) \quad \text{for all } x \in V_1 \simeq V, y \in V_{-1} \simeq \nu$$

を満たすようなものが存在する. この $L(\mathfrak{g}, \rho, V, \nu, B)$ は次数付き Lie 代数として $V_{-1} \oplus V_0 \oplus V_1 \simeq \nu \oplus \mathfrak{g} \oplus V$ で生成される. $L(\mathfrak{g}, \rho, V, \nu, B)$ の形の Lie 代数を**標準的な五つ組に付随する Lie 代数 (Lie algebra associated with a standard pentad)** と呼ぶ.

すなわち, $\mathfrak{g}, (\rho, V), \nu$ は次数付き Lie 代数 $L(\mathfrak{g}, \rho, V, \nu, B)$ の部分構造 (生成系) とみなすことができる. この意味で, $\mathfrak{g}, (\rho, V), \nu$ は $L(\mathfrak{g}, \rho, V, \nu, B)$ に “埋め込まれる”. 言い換えれば, Lie 代数 \mathfrak{g} とその表現 (ρ, V) が $(\mathfrak{g}, \rho, V, \nu, B)$ が標準的であるような ν, B をもつとき, $\mathfrak{g}, (\rho, V), \nu$ はある次数付き Lie 代数の部分構造とみなすことができる. 一般には, 次数付き Lie 代数 $L(\mathfrak{g}, \rho, V, \nu, B)$ は無限次元になる. では, $L(\mathfrak{g}, \rho, V, \nu, B)$ はどのような構造を持っているのだろうか. 本稿では, \mathfrak{g} が有限次元簡約可能 Lie 代数で, (ρ, V) がその有限次元完全可約表現であるときに限定し, $L(\mathfrak{g}, \rho, V, \nu, B)$ の構造を決定する.

そのために重要な役割を果たすのが次節で紹介する chain rule である.

2.4 chain rule

前節では, 標準的な五つ組に含まれる対象のうち, $\mathfrak{g}, \rho, V, \nu$ が $L(\mathfrak{g}, \rho, V, \nu, B)$ に埋め込めることを説明した. では残り一つの B についてはどうだろうか. これについては以下の事実が成り立つ.

Proposition 2.6. 標準的な五つ組 $(\mathfrak{g}, \rho, V, \nu, B)$ の双一次形式 B が対称な双一次形式であるとき, 次数付き Lie 代数 $L(\mathfrak{g}, \rho, V, \nu, B)$ は非退化対称不変双一次形式 \tilde{B} でその $V_0 \simeq \mathfrak{g}$ への制限が B に等しいものを持つ. この意味で, B が対称であるとき, B は $L(\mathfrak{g}, \rho, V, \nu, B)$ に埋め込まれる.

上記 Proposition 2.6 で得られた \tilde{B} を使うと, $L(\mathfrak{g}, \rho, V, \nu, B)$ の表現をさらに大きな次数付き Lie 代数に埋め込むことができる.

Theorem 2.7 (chain rule). 二つの五つ組 $(\mathfrak{g}, \rho, V, \nu, B)$ と $(\mathfrak{g}, \pi, U, \mathcal{U}, B)$ が標準的であり, B が対称であるとする (\mathfrak{g} と B は共通). $L(\mathfrak{g}, \rho, V, \nu, B) = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} V_n$ とし, $\tilde{U}^+ = \bigoplus_{n \geq 0} U_n$ (resp. $\tilde{U}^- = \bigoplus_{n \leq 0} U_n$) を $U_0 = U$ と $V_0 \oplus V_1$ (resp. $U_0 = \mathcal{U}$ と $V_{-1} \oplus V_0$) で生成される $L(\mathfrak{g}, \rho, V, \nu, B)$ 上の加群とすると, $(L(\mathfrak{g}, \rho, V, \nu, B), \tilde{\pi}^+, \tilde{U}^+, \tilde{U}^-, \tilde{B})$ もまた標準的な五つ組である. さらに, 以下に示す Lie 代数の同型を得る:

$$L(L(\mathfrak{g}, \rho, V, \nu, B), \tilde{\pi}^+, \tilde{U}^+, \tilde{U}^-, \tilde{B}) \simeq L(\mathfrak{g}, \rho \oplus \pi, V \oplus U, \nu \oplus \mathcal{U}, B) \quad (\text{up to grading}).$$

上記 Theorem 2.7 を使うと, “大きい Lie 代数 $L(\mathfrak{g}, \rho, V, \nu, B)$ の表現” によって得られる Lie 代数の構造 (左辺) を, その生成系となる “小さい Lie 代数 \mathfrak{g} の表現” から得られる Lie 代数 (右辺) によって記述できる. では, 連鎖の根本にある “最も小さい Lie 代数とその表現” とは何になるのだろうか. 本稿では $L(\mathfrak{g}, \rho, V, \nu, B)$ が有限次元簡約可能 Lie 代数である場合を考えるが, その場合, 生成系となる “最も小さい Lie 代数とその表現” として “Cartan 部分代数とルートの基本系” を考えるのが適当だろう. 次節では, 標準的な五つ組の枠内で Cartan 部分代数のアナロジーを考察する.

3 Cartan 型の五つ組

本節の内容の詳細は [7], [8] を参照されたい.

3.1 Cartan 型の五つ組の定義とその周辺

Lie 代数の Cartan 部分代数とは

- (i) Lie 代数の可換な部分 Lie 代数であって
- (ii) adjoint 表現が対角化可能であるもの

のうち極大なものであった. 上記 2 条件 (i), (ii) に対応する五つ組を考えてみよう.

Definition 3.1 (Cartan 型の五つ組). r, n を自然数とし, 行列 $A \in M(r, r; \mathbb{C}), D = (d_{ij}) \in M(r, n; \mathbb{C}), \Gamma = \text{diag}(\gamma_1, \dots, \gamma_n) \in M(n, n; \mathbb{C})$ をとる. ただし, A, Γ は正則行列で, さらに Γ は対角行列であるとす. このとき, データ $(r, n; A, D, \Gamma)$ から五つ組 $(\mathfrak{h}^r, \square_D^r, \mathbb{C}_D^\Gamma, \mathbb{C}_{-D}^\Gamma, B_A)$ を次のように定める.

1. \mathfrak{h}^r は r 次元可換 Lie 代数であり, $\{\epsilon_1, \dots, \epsilon_r\}$ を基底に持つ
2. $\mathbb{C}_D^\Gamma, \mathbb{C}_{-D}^\Gamma$ はそれぞれ $\{e_1, \dots, e_n\}, \{f_1, \dots, f_n\}$ を基底に持つ n 次元 \mathbb{C} ベクトル空間である
3. \square_D^r は \mathfrak{h}^r の \mathbb{C}_D^Γ への作用であり, $\square_D^r(\epsilon_i \otimes e_j) = d_{ij}e_j$ が任意の $1 \leq i \leq r, 1 \leq j \leq n$ について成り立つ
4. 双一次形式 $\langle \cdot, \cdot \rangle_D^\Gamma : \mathbb{C}_D^\Gamma \times \mathbb{C}_{-D}^\Gamma \rightarrow \mathbb{C}$ を $\langle e_i, f_j \rangle_D^\Gamma = \gamma_i \delta(i, j)$ で定義し, $\langle \cdot, \cdot \rangle_D^\Gamma$ を通じて \mathbb{C}_{-D}^Γ に \mathbb{C}_D^Γ の \mathfrak{h}^r -双対加群の構造を定める
5. B_A は \mathfrak{h}^r 上の双一次形式で, 次の等式で定義される:

$$B_A(c_1\epsilon_1 + \dots + c_r\epsilon_r, c'_1\epsilon_1 + \dots + c'_r\epsilon_r) = \begin{pmatrix} c_1 & \dots & c_r \end{pmatrix} {}^t A^{-1} \begin{pmatrix} c'_1 \\ \vdots \\ c'_r \end{pmatrix}.$$

こうして得られる五つ組を $P(r, n; A, D, \Gamma)$ と書く. この形の五つ組を **Cartan 型の五つ組 (pentad of Cartan type)** と呼ぶ. また, $P(r, n; A, D, \Gamma)$ に対応する Lie 代数を $L(r, n; A, D, \Gamma)$ と書き, この形の Lie 代数を **PC Lie 代数 (PC Lie algebra)**³ と呼ぶ.

Cartan 型の五つ組を決定するデータのうち, A は双一次形式⁴を定め, D は \mathfrak{h}^r の表現の“固有値”を定める. 特に, D の i 列目が 0-ベクトルであるとき, e_i と f_i は \mathfrak{h}^r -加群 \mathbb{C}_D^+ と \mathbb{C}_{-D}^+ の不変元であり, さらに Lie 代数 $L(r, n; A, D, \Gamma)$ の中心である. 以降, 簡単のため D は列として 0-ベクトルを持たないものとする.

Cartan 型の五つ組は有限次元可換 Lie 代数とその有限次元同時対角化可能表現からなっており, 本節冒頭の 2 条件 (i), (ii) に対応した性質を持っていることに注意されたい. また, Cartan 型の五つ組に含まれる対象はすべて有限次元であり, 自然に標準的な五つ組となる. では, Cartan 型の五つ組の Φ -写像はどのようにして記述すればよいのだろうか.

Proposition 3.2. *Cartan 型の五つ組 $P(r, n; A, D, \Gamma)$ に対し, \mathfrak{h}^r の元 h_1, \dots, h_n を*

$$h_i = \begin{pmatrix} \delta(i, 1) & \cdots & \delta(i, n) \end{pmatrix} \cdot \Gamma \cdot {}^t D \cdot A \cdot \begin{pmatrix} \epsilon_1 \\ \vdots \\ \epsilon_r \end{pmatrix}$$

によって定める. このとき, 等式

$$\Phi_{\square_D^r}(e_i \otimes f_j) = \delta(i, j) h_i \quad (1 \leq i, j \leq n)$$

が成り立つ.

Remark 3.3. h_1, \dots, h_n は線形独立とは限らないし, \mathfrak{h}^r をベクトル空間として生成するとも限らない.

3.2 Cartan 型の五つ組に対応する Lie 代数の構造

本節では $\{h_1, \dots, h_n, e_1, \dots, e_n, f_1, \dots, f_n\}$ を用いて PC Lie 代数 $L(r, n; A, D, \Gamma)$ の構造を考えてみよう. これらの間のかっこ積は以下の行列によって記述できる.

Definition 3.4 (Cartan 型の五つ組の Cartan 行列). $P(r, n; A, D, \Gamma)$ を Cartan 型の五つ組とする. このとき, 正方行列 $C(A, D, \Gamma) \in M(n, n; \mathbb{C})$ を

$$C(A, D, \Gamma) = \Gamma \cdot {}^t D \cdot A \cdot D$$

で定義する. この正方行列 $C(A, D, \Gamma)$ を $P(r, n; A, D, \Gamma)$ の **Cartan 行列** と呼ぶ.

³Pentad of Cartan type から取って PC Lie 代数.

⁴ B_A を非退化にするため A は可逆である必要がある. 他方, \mathfrak{h}^r は可換 Lie 代数であるため \mathfrak{h}^r 上の任意の双一次形式は不変になる. 従って, B_A を不変にするための A の条件などは特に必要がない.

Proposition 3.5. $P(r, n; A, D, \Gamma)$ を *Cartan* 型の五つ組とし, その *Cartan* 行列を $C = C(A, D, \Gamma) = (C_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ とする. このとき, 任意の $1 \leq i, j \leq n$ に対して次の等式が成り立つ:

$$[e_i, f_j] = \delta(i, j)h_i, \quad [h_i, h_j] = 0, \quad [h_i, e_j] = C_{ij}e_j, \quad [h_i, f_j] = -C_{ij}f_j, \quad B_A(h_i, h_j) = \gamma_j C_{ij}.$$

上記 Proposition 3.5 の等式が **contragredient Lie 代数** の生成系の等式とそっくりなことに注意されたい. ここで, contragredient Lie 代数 (V.Kac, 1968) について復習しよう. 以下 Definition 3.6 では原典 [2] の該当箇所を要約して翻訳する. 記号は可能な限り原典に合わせるが, Definition 3.6 内の記号と本稿の今までの記号との間に連続性はない.

Definition 3.6 ((reduced) contragredient Lie 代数, [2, p.1279–1280, 要約]). $A = (A_{ij})$ $i, j = 1, \dots, n$ を標数 0 の代数閉体 K 上の行列とする. G_{-1}, G_0, G_1 をそれぞれ $\{h_1, \dots, h_n\}, \{e_1, \dots, e_n\}, \{f_1, \dots, f_n\}$ を基底を持つ K 上のベクトル空間とする. このとき, $\hat{G}(A) = G_{-1} \oplus G_0 \oplus G_1$ 上に local Lie 代数の構造を

$$[e_i, f_j] = \delta_{ij}h_i, \quad [h_i, h_j] = 0, \quad [h_i, e_j] = A_{ij}e_j, \quad [h_i, f_j] = -A_{ij}f_j$$

によって定める. この $\hat{G}(A)$ を local part に持つ minimal Lie 代数 ([2, p.1276, Definition 6]) を $G(A) = \bigoplus G_i$ と書き, これを contragredient Lie 代数と呼ぶ. さらに, A をその *Cartan* 行列と呼ぶ.

また, $G(A)$ をその中心 Z で割った Lie 代数 $G'(A) = G(A)/Z = \bigoplus G'_i$ を A を *Cartan* 行列に持つ reduced contragredient Lie 代数と呼ぶ.

PC Lie 代数 $L(r, n; A, D, \Gamma)$ と contragredient Lie 代数を比較すると次の定理が成り立つ.

Theorem 3.7. $P(r, n; A, D, \Gamma)$ を *Cartan* 型の五つ組とし, その *Cartan* 行列を $C = C(A, D, \Gamma) = (C_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ とする. このとき, Lie 代数の同型

$$L(r, n; A, D, \Gamma) \simeq (G'(C) \oplus \mathfrak{z}) \oplus \Delta \tag{1}$$

を得る. ただし, 右辺の Lie 代数の構造は以下のように定められる:

- $\dim \mathfrak{z} = \text{rank } D - \text{rank } C, \dim \Delta = r - \text{rank } D,$
- $G'(C) = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} G'_n, \quad [\mathfrak{z}, L(r, n; A, D, \Gamma)] = \{0\}, \quad [\Delta, \Delta] = \{0\},$
- $[L(r, n; A, D, \Gamma), L(r, n; A, D, \Gamma)] = G'(C) \oplus \mathfrak{z},$
- Δ は各 G'_n に作用し, その作用は対角化可能である.

特に, C が正則行列であるとき, Lie 代数の同型

$$L(r, n; A, D, \Gamma) \simeq \mathfrak{gl}_1^{\text{rank } D - \text{rank } C} \oplus G(C)$$

を得る.

簡単に言うと, $L(r, n; A, D, \Gamma)$ は reduced contragredient Lie 代数の central extension になっている.

Fact 3.8. 任意の有限次元簡約可能 Lie 代数は, 対称な行列 A (対称な双一次形式 B_A) を持つ Cartan 型の五つ組に対応する PC Lie 代数の形で構成できる. このとき, \mathfrak{h}^r はその Cartan 部分代数に対応する⁵.

Example 3.9 (\mathfrak{sl}_2 の構成). 例として \mathfrak{sl}_2 を PC Lie 代数の形で構成してみよう. $r = n = 1$, $A = \begin{pmatrix} 1/8 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 2 \end{pmatrix}$, $\Gamma = \begin{pmatrix} 4 \end{pmatrix}$ とおく. このとき, $P(r, n; A, D, \Gamma)$ の Cartan 行列は

$$C(A, D, \Gamma) = \Gamma \cdot {}^t D \cdot A \cdot D = \begin{pmatrix} 2 \end{pmatrix} = (A_1 \text{ 型の Cartan 行列})$$

であり, $r = \text{rank } D = \text{rank } C = 1$ なので, Lie 代数の同型

$$L(r, n; A, D, \Gamma) \simeq \mathfrak{z} \oplus G'(C) \oplus \Delta \simeq G\left(\begin{pmatrix} 2 \end{pmatrix}\right) \simeq \mathfrak{sl}_2$$

を得る.

4 これまでのまとめ

任意の有限次元簡約可能 Lie 代数は PC Lie 代数の形で書けるが, その有限次元完全可約表現は Cartan 部分代数 \mathfrak{h}^r の 1 次元加群 (最低ウェイトベクトル⁶のスカラー倍からなる 1 次元加群) から生成できる. ここで標準的な五つ組の chain rule (Theorem 2.7) を思い出すと, 有限次元簡約可能 Lie 代数とその有限次元完全可約表現を埋め込む Lie 代数は, PC Lie 代数の形で書けることが分かる. すなわち, 次の定理を得る.

Theorem 4.1. \mathfrak{g} を有限次元簡約可能 Lie 代数とし, (ρ, V) をその有限次元完全可約表現とする. このとき, \mathfrak{g} 上の任意の双一次形式 B に対し, Lie 代数 $L(\mathfrak{g}, \rho, V, \text{Hom}(V, \mathbb{C}), B)$ は PC Lie 代数の形で書ける. すなわち, 任意に与えられた有限次元簡約可能 Lie 代数とその有限次元完全可約表現は Theorem 3.7 中にある (1) の形の Lie 代数に埋め込むことができる.

Example 4.2. 例として \mathfrak{sl}_2 の有限次元完全可約表現を埋め込む Lie 代数を考察してみよう. \mathfrak{sl}_2 の $(n+1)$ -次元既約表現を $(n\Lambda_1, V(n+1))$ と書く. \mathfrak{sl}_2 の Cartan 部分代数を $\mathbb{C}h$ とおくと, $(n\Lambda_1, V(n+1))$ の最低ウェイトは $h \mapsto -n$ で与えられる. すると, chain rule (Theorem 2.7) から Lie 代数の同型

$$L(\mathfrak{sl}_2, n\Lambda_1, V(n+1), \text{Hom}(V(n+1), \mathbb{C}), K_{\mathfrak{sl}_2}) \simeq L\left(1, 2; \begin{pmatrix} 1/8 \end{pmatrix}, \left(2 \mid -n \right), \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}\right)$$

を得る. 右辺の Cartan 行列を計算すると,

$$C = C\left(\begin{pmatrix} 1/8 \end{pmatrix}, \left(2 \mid -n \right), \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2 & -n \\ -n & n^2/2 \end{pmatrix}$$

⁵ D が 0-列ベクトルを持たないという仮定が必要.

⁶通常 Lie 代数論では有限次元表現を最“高”ウェイトで表すが, 標準的な五つ組の理論では最“低”ウェイトを使う.

であり, 任意の n に対して $r = \text{rank } D = \text{rank } C = 1$ を得る. 従って,

$$L(\mathfrak{sl}_2, n\Lambda_1, V(n+1), \text{Hom}(V(n+1), \mathbb{C}), K_{\mathfrak{sl}_2}) \simeq G' \left(\begin{pmatrix} 2 & -n \\ -n & n^2/2 \end{pmatrix} \right).$$

5 概均質ベクトル空間と contragredient Lie 代数

最後に, 標準的な五つ組と概均質ベクトル空間の関係について述べる.

まず, 概均質ベクトル空間について復習しよう. ある代数群の有理表現が与えられたとき, その表現空間が Zariski 位相で稠密な軌道を持つとき, これを概均質ベクトル空間と言う. 特に, 作用する群が簡約可能代数群であるときは, これを簡約可能概均質ベクトル空間という.

例えば, 有限次元半単純 Lie 代数の次数付け $\mathfrak{g} = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \mathfrak{g}_n$ が与えられているとき, 表現 $(\mathfrak{g}_0, \text{ad}, \mathfrak{g}_1)$ は簡約可能概均質ベクトル空間を誘導することが知られている. このようにして得られる簡約可能概均質ベクトル空間を放物型概均質ベクトル空間と呼ぶ (H. Rubenthaler. 例えば [3]などを参照).

簡約可能概均質ベクトル空間は標準的な五つ組の言葉で特徴づけることができる. すなわち, \mathfrak{g} を簡約可能 Lie 代数, (ρ, V) をその表現とすると, $L(\mathfrak{g}, \rho, V, \text{Hom}(V, \mathbb{C}), B) = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} V_n$ が同値な条件

(P1) $[V_0, x_1] = V_1$ を満たす $x_1 \in V_1$ が存在する

または

(P2) 写像 $\text{ad } x_1 : V_{-1} \rightarrow V_0$ が単射であるような $x_1 \in V_1$ が存在する

を満たすとき, (\mathfrak{g}, ρ, V) は簡約可能概均質ベクトル空間を誘導する. 逆に, 任意の簡約可能概均質ベクトル空間は条件 (P1) または (P2) を満たす次数付き Lie 代数から誘導される ([5] 参照).

従って, Theorem 4.1 を踏まえると, 次の主張が成り立つ.

Claim 5.1. 表現が完全可約であるような任意の簡約可能概均質ベクトル空間は, Theorem 3.7 中の (1) に同型な Lie 代数の次数付けであって, 条件 (P1) または (P2) を満たすものから誘導される.

これは, 放物型概均質ベクトル空間理論の拡張と言うこともできる.

次の問題は簡約可能概均質ベクトル空間の分類問題と等価であり, 現在未解決の難問である.

Problem 5.2. Theorem 3.7 中の (1) に同型な Lie 代数の次数付けであって, 条件 (P1) または (P2) を満たすものをすべて分類できるか.

References

- [1] ブルバキ. 数学原論 リー群とリー環. 東京図書. (1968).
- [2] V. G. Kac. Simple irreducible graded Lie algebras of finite growth. Math. USSR-Izvestija vol. 2 (1968), No.6. 1271–1311.

- [3] H. Rubenthaler. Algèbres de Lie et espaces préhomogènes (Travaux en cours). Hermann, Paris, (1992).
- [4] N. Sasano. Lie algebras generated by Lie modules. *Kyushu Journal of Mathematics*. vol. 68, No. 2 (2014), 377–403.
- [5] N. Sasano. Lie algebras associated with a standard quadruplet and prehomogeneous vector spaces. *Tsukuba Journal of Mathematics*. vol. 39, No. 1 (2015), 1–14.
- [6] N. Sasano. Lie algebras constructed with Lie modules and their positively and negatively graded modules. [arXiv:1603.07437v1](https://arxiv.org/abs/1603.07437v1) (2016).
- [7] N. Sasano. Contragredient Lie algebras and Lie algebras associated with a standard pentad. [arXiv:1604.02225v1](https://arxiv.org/abs/1604.02225v1) (2016).
- [8] N. Sasano. Reduced contragredient Lie algebras and PC Lie algebras. [arXiv:1607.07546v2](https://arxiv.org/abs/1607.07546v2) (2016).