# 量子=アフィン対応の K 理論版

池田岳（岡山理科大学）

## 1. Contents

要約: 旗多様体の量子コホモロジー環とアフィン・グラスマン多様体のホモロジー環を適当に局所化すると同型になることが Dale Peterson により示された．その後、戸田格子の Lax 行列が冪零である解がこの同型を与えることが Lam, Shimozono [5] により示されている．この同型の K 理論版を与える．証明には相対論的戸田格子方程式の冪単解を用いる．岩尾慎介氏、前野俊昭氏との共同研究に基づく．

講演の要点：

- $QK(\mathcal{F}\ell_n)_{\mathrm{loc}} \cong K_*(\mathcal{G}r_{SL_n})_{\mathrm{loc}}$
- Relation between Schubert bases (Conjecture)

## 2. 相対論的戸田方程式と量子 $K$ 理論

2.1. **旗多様体の量子 $K$-理論．** Ruijsenaars [7] による相対論的戸田方程式からはじめる．Lax 行列 $L := AB^{-1}$ を

$$(1)\quad A = \begin{pmatrix} z_1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & z_2 & -1 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \ddots & z_{n-1} & -1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & z_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -Q_1 z_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & & -Q_{n-1}z_{n-1} & 1 \end{pmatrix}.$$

により定めるとき，独立変数 $t_1, \ldots, t_{n-1}$ に関する微分方程式

$$\frac{\partial L}{\partial t_i} = [(L^i)_<, L] \quad (1 \le i \le n-1),$$

を相対論的戸田方程式という．ここに $(L^i)_<$ は $L^i$ の狭義下三角部分を表す．$L$ の特性多項式

$$\det(\eta \cdot 1_n - L) = \eta^n + \sum_{i=1}^{n} (-1)^i F_i(z, Q)\eta^{n-i}.$$

*Date*: 表現論シンポジウム 2016.

は運動の保存量である．$F_i(z,Q)$ はある自然なポワソン括弧に関して可換であり，この微分方程式は Liouville の意味で可積分である．$\gamma=(\gamma_1,\ldots,\gamma_n)\in\mathbb{C}^n$ に対して

$$Z_\gamma := \{(Q_1,\ldots,Q_{n-1},z_1,\ldots,z_n)\in\mathbb{C}^{2n-1} \mid F_i(z,Q)=\gamma_i\ (1\le i\le n)\}$$

を等スペクトル多様体と呼ぶ．

特に興味があるのは

$$\gamma_i=\binom{n}{i}\quad (1\le i\le n).$$

の場合である．この条件は $\det(\eta\cdot 1_n - L)=(\eta-1)^n$ と同値なので冪単の場合と呼ぶ．実際，このとき $L$ は principal unipotent つまりジョルダン・ブロックがひとつの冪単行列である．$Z_{\mathrm{unip}}$ によって冪単の場合の 等スペクトル多様体を表す．任意の $L\in Z_{\mathrm{unip}}$ は principal unipotent であることがわかる．

旗多様体 $\mathcal{F}\ell_n$ の量子 $K$-理論 $QK(\mathcal{F}\ell_n)$ は連接層の Grothendirck 群 $K(\mathcal{F}\ell_n)=K_0(\mathcal{C}oh(\mathcal{F}\ell_n))$ をパラメータ $Q_1,\ldots,Q_{n-1}$ で変形した環である．Givental–Lee [1] は $K$-theoretic $J$-function が Etingof の finite $q$-difference Toda operator の固有関数であることを示した．

**予想 1** (Kirillov-Maeno)**.** $\mathcal{L}_i$ を $\mathcal{F}\ell_n$ 上の同語反復直線束とする．同一視 $z_i=1-[\mathcal{L}_i^\vee]$ により同型

$$QK(\mathcal{F}\ell_n)\cong\mathbb{C}[z,Q]/(F_i(z,Q)-\tbinom{n}{i}\mid 1\le i\le n)$$

が得られる．

## 3. $K$-homology of affine Grassmannian

$\mathcal{G}r_{SL_n}=SL_n(\mathbb{C}((\xi)))/SL_n(\mathbb{C}[[\xi]])$ をアフィン・グラスマン多様体とする．$K$–ホモロジー $K_*(\mathcal{G}r_{SL_n})$ は基点付きループ空間 $\Omega SU(n)$ の群構造から導かれる Hopf 代数構造を持つ．

対称関数環

$$\Lambda := \mathbb{C}[h_1,h_2,\ldots]$$

を考える．ここに $h_i$ は完全対称関数である．Lam–Schilling–Shimozono [3] は Hopf 代数の同型

$$K_*(\mathcal{G}r_{SL_n})\cong\Lambda_{(n)}:=\mathbb{C}[h_1,\ldots,h_{n-1}],$$

を示した．変数 $h_i$ の幾何学的な意味は後ほど説明する $K$ 理論的 $k$-Schur 多項式と関連して理解される．余積構造だけ記しておく：$\Delta(h_i)=\sum_{j+k=i}h_j\otimes h_k$ with $h_0=1$.

## 4. 相対論的戸田方程式を解く

$\gamma\in\mathbb{C}^n$ に対して

$$\mathcal{O}_\gamma := \mathbb{C}[\eta]/(\eta^n+\sum_{i=1}^n\gamma_i\eta^{n-i})\cong\mathbb{A}^n$$

と定める．環であると同時にアフィン空間ともみなす．

**定理 1** (IIM)**.** 代数多様体の双有理な射 $Z_\gamma \longrightarrow \mathbb{P}(\mathcal{O}_\gamma)$ が存在する.

（証明の概略）単因子の計算から

$$\{\boldsymbol{w} \in (\mathcal{O}_\gamma)^n \mid L\boldsymbol{w} = \eta\boldsymbol{w}\} \cong \mathcal{O}_\gamma$$

が示せる．固有関数 $\boldsymbol{w}_\pm$ であって次の形を持つもの

(2)

$$\boldsymbol{w}_- = \begin{pmatrix} * & * & \cdots & * & * & * \\ * & * & \cdots & * & * & 0 \\ 0 & * & \cdots & * & * & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & * & * & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & * & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \eta \\ \vdots \\ \eta^{n-1} \end{pmatrix}, \boldsymbol{w}_+ = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ * & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ * & * & \cdots & (-1)^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \eta \\ \vdots \\ \eta^{n-1} \end{pmatrix}.$$

を構成できる．$L \in Z_\gamma$ を

$$\boldsymbol{w}_- = \varphi_L \cdot \boldsymbol{w}_+$$

で定まる $\varphi_L$ を用いて $[\varphi_L] \in \mathbb{P}(\mathcal{O}_\gamma)$ に移すことにより写像 $Z_\gamma \to \mathbb{P}(\mathcal{O}_\gamma)$ ができる.

## 5. 冪単解と双対 STABLE GROTHENDIECK 多項式

**5.1. 双対 stable Grothentieck 多項式.** 対称関数環 $\Lambda$ は以下で定まる基底 $\{g_\lambda\}$ を持つ．分割 $\lambda$ に対して dual stable Grothendieck polynomials を以下のように定義する：

$$g_\lambda := \det\left(\sum_{k\geq 0}\binom{j-i}{k} h_{\lambda_i+j-i-k}\right)_{i,j} = s_\lambda + \text{lower degree terms.}$$

Lam–Pylyavskyy [2] は無限次元グラスマン多様体の homology Schubert 基底との同一視ができることを示した．この行列式表示は Shimozono–Zabbrocki による．Stable Grothendieck polynomials $\{G_\lambda\}$ の Hall 内積に関する双対基底である.

**5.2. 冪単解のタウ関数.** 冪単の場合 $\gamma_i = \binom{n}{i}$ を考えて，線型同型

$$\boldsymbol{c} : \mathcal{O}_{\mathrm{unip}} = \mathbb{C}[\eta]/(\eta-1)^n \to \mathbb{C}^n, \quad \varphi \mapsto (c_0, \ldots, c_{n-1})$$

を次のように定める．$c_i$ は $\varphi$ の $\eta = 1$ における $i$ 次のテイラー係数である.

$\varphi \in \mathcal{O}_{\mathrm{unip}}$ に対して

$$\boldsymbol{a}_i = \boldsymbol{c}(\eta^i), \quad \boldsymbol{b}_i = \boldsymbol{c}(\varphi\eta^i) \quad (1 \leq i \leq n)$$

とおき，さらに

$$\tau_i = |\boldsymbol{b}_0, \cdots, \boldsymbol{b}_{i-1}, \boldsymbol{a}_{i-1}, \cdots, \boldsymbol{a}_{n-2}|c_0^{-i}, \quad \sigma_i = |\boldsymbol{b}_0, \cdots, \boldsymbol{b}_{i-1}, \boldsymbol{a}_i, \cdots, \boldsymbol{a}_{n-1}|c_0^{-i}.$$

と定義する．これらは $\mathbb{P}(\mathcal{O}_{\mathrm{unip}})$ 上の有理関数である.

$1 \le i \le n-1$ に対して縦が $i$ 横が $n-i$ の長方形

$$R_i = (n-i)^i$$

の分割 (ヤング図形) が以下で重要[1] である．

**補題 1.** 同一視 $c_i/c_0 = (-1)^i h_i$ により次が成り立つ：

$$\tau_i = g_{R_i}, \quad \sigma_i = \sum_{\mu \subset R_i} g_\mu.$$

$\tau_i$ および $\sigma_i$ が $\Lambda_{(n)} = \mathbb{C}[h_1, \ldots, h_{n-1}] \cong K_*(\mathcal{G}r_{SL_n})$ の元と見なせることに注意する．$\mathbb{C}[h_1, \ldots, h_{n-1}]$ は $\mathbb{P}(\mathcal{O}_{\mathrm{unip}})$ の $c_0 \neq 0$ で定まるアフィン開集合の座標環とも見なせる．

## 6. $K$-Peterson 同型

ここで

$$Y^\circ_{\mathrm{unip}} = \{[\varphi] \in \mathbb{P}(\mathcal{O}_{\mathrm{unip}}) \mid c_0(\varphi) \neq 0,\ \tau_i(\varphi) \neq 0,\ \sigma_i(\varphi) \neq 0\ (1 \le i \le n-1)\}$$

と定義する．また

$$Z^\circ_{\mathrm{unip}} = \{(z, Q) \in Z_{\mathrm{unip}} \mid Q_i \neq 0\ (1 \le i \le n-1)\}$$

とする．Kirillov-Maeno の予想を思い出しておこう：

$$\text{“}QK(\mathcal{F}\ell_n)\text{”} := \mathbb{C}[z, Q]/(F_i(z, Q) - \tbinom{n}{i} \mid 1 \le i \le n).$$

$K$-Peterson 同型を述べるために局所化を次のように定義する：

$$\begin{aligned} \text{“}QK(\mathcal{F}\ell_n)\text{”}_{\mathrm{loc}} &:= \mathbb{C}[Z^\circ_{\mathrm{unip}}] \cong \text{“}QK(\mathcal{F}\ell_n)\text{”}[Q_i^{-1}\ (1 \le i \le n-1)], \\ K_*(\mathcal{G}r_{SL_n})_{\mathrm{loc}} &:= \mathbb{C}[Y^\circ_{\mathrm{unip}}] \cong K_*(\mathcal{G}r_{SL_n})[\sigma_i^{-1}, \tau_i^{-1}\ (1 \le i \le n-1)]. \end{aligned}$$

**定理 2** (IIM)**.** 環同型

$$\Phi_n : \text{“}QK(\mathcal{F}\ell_n)\text{”}_{\mathrm{loc}} \to K_*(\mathcal{G}r_{SL_n})_{\mathrm{loc}}$$

が次で与えられる：

$$\Phi_n(z_i) = \frac{\sigma_{i-1}\tau_i}{\sigma_i\tau_{i-1}}\ (1 \le i \le n), \quad \Phi_n(Q_i) = \frac{\tau_{i-1}\tau_{i+1}}{\tau_i^2}\ (1 \le i \le n-1),$$

ただし $\sigma_0 = \tau_0 = \sigma_n = \tau_n = 1$ とする．

**注意 1.** $\exp(\sum_{i=1}^{n-1} t_i u^i) = \sum_{k=0}^\infty h_k(t) u^k$ により $h_k(t)$ を定義するとき $h_k = h_k(t)$ $(1 \le k \le n-1)$ とすると $\tau_i, \sigma_i$ は $t_1, \ldots, t_{n-1}$ の多項式であって $z_i, Q_i$ は，したがって $Lax$ 行列の成分も， $t_1, \ldots, t_{n-1}$ の有理関数である．その意味で，$L$ は相対論的戸田方程式の解になっている．

---

[1] （コ）ホモロジーの場合について長方形 $R_i$ の役割について解説した記事がある：池田岳 Quantum Schubert vs affine Schubert via nilpotent Toda lattice, 数理解析研究所講究録 1738, pp. 19—23(2011)

注意 **2.** *Peterson の 1997 年の MIT における講義では* $QH^*(G/B)_{\mathrm{loc}} \cong H_*(\mathcal{G}r_G)_{\mathrm{loc}}$ *が述べられた．その後 Lam-Shimozono* [4] *により証明が書かれた．*

## 7. 予想

7.1. **量子 Grothendieck 多項式．** 置換 $w \in S_n$ に対して Lenert–Maeno [6] の quantum Grothendieck 多項式 $\mathfrak{G}^q_w(z,Q)$ はシューベルト類 $[\mathcal{O}_{X^w}] \in QK(\mathcal{F}\ell_n)$ を代表することが予想されている．ただし $X^w = \overline{B_-wB/B}$.

7.2. **$K$ 理論的 $k$-Schur 多項式．** Lam–Schilling–Shimozono [3] は $\Lambda_{(n)}$ の基底 $\{g^{(n-1)}_\lambda\}$ であって $(n-1)$-bounded partitions $\lambda$ つまり $\lambda_1 \leq n-1$ をみたす分割の集合で添え字付けられるものを構成した．$g^{(n-1)}_\lambda$ は $K$-theoretic $k$-Schur functions と呼ばれ Schubert class $\xi_\lambda \in K_*(\mathcal{G}r_{SL_n})$ と同一視された．

- $g^{(n-1)}_\lambda = g_\lambda$ が十分大きいすべての $n$ において成り立つ．
- 長方形 $R_i = (n-i)^i$ に対しては $g^{(n-1)}_{R_i} = g_{R_i}$ が成り立つ．

7.3. **Correspondences between the Schubert classes.**

予想 **2** (IIM)**.** *各 $w \in S_n$ に対して*

$$\Phi_n(\mathfrak{G}^q_w(z,Q)) = \frac{g^{(n-1)}_{\mu(w)}}{\prod_{i:w(i)>w(i+1)} \tau_i}$$

*が成り立つ．ただし $\mu(w)$ はある $(n-1)$-bounded partition で置換 $w \in S_n$ によって（具体的に）決まるものである．*

## References


[1] A. Givental and Y.-P. Lee. Quantum $K$-theory on flag manifolds, finite-difference Toda lattices and quantum groups. *Inv. Math.*, **151** (1), pp.193–219, 2003.

[2] T. Lam and P. Pylyavskyy. Combinatorial hopf algebras and $K$-homology of grassmannians. *Int. Math. Res. Notices*, **2007**, pp.48 pages, 2007.

[3] T. Lam, A. Schilling, and M. Shimozono. $K$-theory Schubert calculus of the affine Grassmannian. *Compos. Math.*, **146** (04), pp.811–852, 2010.

[4] T. Lam and M. Shimozono. Quantum cohomology of $G/P$ and homology of affine Grassmannian. *Acta Math.*, **204** (1), pp.49–90, 2010.

[5] T. Lam and M. Shimozono. From quantum Schubert polynomials to $k$-Schur functions via the Toda lattice. *Math. Res. Lett.*, **19**, pp.8193, 2012.

[6] C. Lenart and T. Maeno. Quantum Grothendieck polynomials. *arXiv:math.CO/0608232*, Aug. 2006.

[7] S. Ruijsenaars. Relativistic Toda systems. *Comm. Math. Phys.*, **133** (2), pp.217–247, 1990.