

モノドロミー保存変形のワイル群対称性と叢多様体

山川 大亮（東京工業大学大学院理工学研究科）

2015 年度表現論シンポジウム

序

$O_1, O_2, \dots, O_m \subset \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$ を $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ 随伴軌道とする．これらの直積 $\prod_{i=1}^m O_i$ の元 $(A_i)_{i=1}^m$ が安定である事を，全ての A_i で保たれる $\mathbb{C}^n$ の部分空間が $\{0\}, \mathbb{C}^n$ 以外存在しない事として定義し， $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ の対角作用を用いて

$$\mathcal{M}^s = \left\{ (A_i)_{i=1}^m \in \prod_{i=1}^m O_i \left| \sum_{i=1}^m A_i = 0, (A_i) \text{ は安定} \right. \right\} / \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$$

と定めると，これは複素シンプレクティック多様体の構造を持つ．Crawley-Boevey は，[4] にて $\mathcal{M}^s$ がある星型叢に付随する中島叢多様体と同型である事を示し，それを用いて $\mathcal{M}^s$ がいつ空でないかを問う加法的 **Deligne-Simpson 問題** に対する解を与えた．彼の成果は複素領域上の微分方程式を扱う研究者達に次のような理由で注目された． $\mathbb{C}$ 内の相異なる点 $t_1, t_2, \dots, t_m$ を固定し， $\mathcal{M}^s$ の点を代表する $(A_i)_{i=1}^m$ に対し，複素変数の線形常微分方程式

$$\frac{du}{dx} = \sum_{i=1}^m \frac{A_i}{x - t_i} u$$

を考える（ u は $\mathbb{C}^n$ 値関数）．このような形で書かれる線形常微分方程式をフックス系と呼ぶ．条件 $\sum A_i = 0$ は，微分形式 $\sum A_i(x - t_i)^{-1} dx$ が $x = \infty$ で正則である事と同値である．よって $\mathcal{M}^s$ は， $\{t_1, t_2, \dots, t_m\}$ にのみ特異点を持ち，各 t_i における留数の住処が O_i で指定された（安定な）フックス系のモジュライ空間とみなせ，加法的 Deligne-Simpson 問題はある種のフックス系の存在問題と捉える事ができる．

その後，Crawley-Boevey の結果はモノドロミー保存変形の理論にも応用がある事が分かった．上記のようなフックス系が与えられると，基点の近傍上の基本解を $\mathbb{P}^1 \setminus \{t_i\}$ 内

のループに沿って解析接続し、元の基本解とのずれを計る事で、群

$$\pi_1(\mathbb{P}^1 \setminus \{t_i\}) \simeq \langle \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_m \mid \gamma_m \gamma_{m-1} \cdots \gamma_1 = 1 \rangle$$

の複素 n 次元表現が得られる．この表現の同型類が変わらないようなフックス系の変形をモノドロミー保存変形と呼ぶ．モノドロミーを保つという性質から、変形を受ける A_i 達はある非線形微分方程式を満たす事が知られている．これをモノドロミー保存変形方程式（以下 **IMD** 方程式）と呼ぼう．最も基本的な IMD 方程式の例はパンルヴェ第 6 方程式であり、 $n = 2, m = 4$ の場合のモノドロミー保存変形を考える事で得られる．

パンルヴェ第 6 方程式は、独立変数、従属変数に加えて O_i 達を決める 4 つの複素パラメータを持つ．岡本は、[11] にて従属変数及び複素パラメータの空間にアフィンワイル群 $W(D_4^{(1)})$ の作用を与え、この作用によってパンルヴェ第 6 方程式が保たれる事を示した．この対称性はパンルヴェ方程式を考察する上で重要な役割を果たすものであり、一般の IMD 方程式がこのような類いの対称性を持つか考える事は自然であろう．Crawley-Boevey の結果を利用する事でこの問題に対する一つの答を与える事ができる．籠多様体は [9] で導入された鏡映関手と呼ばれる同型によってある意味でワイル群対称性を持つ．Crawley-Boevey の結果を用いてこれを空間 $\mathcal{M}^s$ から別の n, O_i に付随する $\mathcal{M}^s$ への同型とみると、実はこれが（各 O_i の相異なる固有値の差が整数でなければ）IMD 方程式を保つ事を示せる．これによって、一般の generic なフックス系の IMD 方程式が星型籠に付随するワイル群の対称性を持つ事が分かる．

本稿では、線形常微分方程式の係数行列が高位の極を持つ場合にこれらの話を拡張しようという試みを紹介する．

1 空間 $\mathcal{M}^s$

以下正の整数 n を固定する． $G = \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$ とおき、また

$$G[[z]] = \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}[[z]]) = \left\{ g(z) = \sum_{j=0}^{\infty} g_j z^j \mid g_j \in M_n(\mathbb{C}), \det g_0 \neq 0 \right\},$$

$$\mathfrak{g}[[z]] = \mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}[[z]], \quad \mathfrak{g}[[z]]^* = \mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}[z^{-1}] \frac{dz}{z}$$

とおく．無限次元ベクトル空間 $\mathfrak{g}[[z]]$ を $G[[z]]$ のリー環とみなし、双線形形式

$$\mathfrak{g}[[z]] \times \mathfrak{g}[[z]]^* \rightarrow \mathbb{C}; \quad (A, X) \mapsto \operatorname{res}_{z=0} \operatorname{tr}(AX)$$

によって $\mathfrak{g}[[z]]^*$ を $\mathfrak{g}[[z]]$ の双対空間とみなす．このとき $G[[z]]$ の随伴作用から誘導される $\mathfrak{g}[[z]]^*$ への作用（余随伴作用）は

$$G[[z]] \times \mathfrak{g}[[z]]^* \rightarrow \mathfrak{g}[[z]]^*; \quad (g, A) \mapsto g \cdot A := (gAg^{-1})_{<0}$$

と表される．ただし添字 < 0 は z について負べきの項のみ取り出したものを表す．例えば $g(z) = g_0(1 + uz + \cdots) \in G[[z]]$ ($g_0 \in G, u \in \mathfrak{g}$) の

$$A = \left(\frac{A_1}{z} + A_0 \right) \frac{dz}{z} \in \mathfrak{g}[[z]]^* \quad (A_0, A_1 \in \mathfrak{g})$$

への作用は

$$\begin{aligned} g \cdot A &= g_0 \left[(1 + uz + \cdots) \left(\frac{A_1}{z} + A_0 \right) \frac{dz}{z} (1 + uz + \cdots)^{-1} \right]_{<0} g_0^{-1} \\ &= g_0 \left[\left(\frac{A_1}{z} + A_0 + uA_1 + \cdots \right) \frac{dz}{z} (1 - uz + \cdots) \right]_{<0} g_0^{-1} \\ &= g_0 \left[\left(\frac{A_1}{z} + A_0 + uA_1 - A_1u + \cdots \right) \frac{dz}{z} \right]_{<0} g_0^{-1} \\ &= g_0 \left(\frac{A_1}{z} + A_0 + [u, A_1] \right) g_0^{-1} \frac{dz}{z} \end{aligned}$$

となる．特に $g \cdot A$ は g の 2 次以上の項に依らず，その z^{-1} に関する次数は A と同じく 2 である．一般に任意の $G[[z]]$ 余随伴軌道 O に対し， O の元の z^{-1} に関する次数 $k \in \mathbb{Z}_{>0}$ は O 上一定であり， $G[[z]]$ の正規部分群

$$G[[z]]_{\geq k} := \{ 1 + z^k X(z) \mid X(z) \in \mathfrak{g}[[z]] \}$$

は O に自明に作用する．以後 k を O の位数と呼ぶ事にしよう．位数 k の $G[[z]]$ 余随伴軌道 O は有限次元複素リー群

$$G_k := G[[z]]/G[[z]]_{\geq k}$$

の余随伴軌道と自然に同一視される (G_k のリー環の双対空間は， $\mathfrak{g}[[z]]^*$ の元で z^{-1} に関する次数が k 以下のものからなるベクトル空間と自然に同一視される)．特に O は有限次元の複素シンプレクティック多様体である．

$G[[z]]$ 余随伴軌道 $O_1, O_2, \dots, O_m \subset \mathfrak{g}[[z]]^*$ に対し， G の直積 $\prod_{i=1}^m O_i$ への同時共役作用を考え

$$\mathcal{M} \equiv \mathcal{M}(O_1, \dots, O_m) = \left\{ (A_i)_{i=1}^m \in \prod_{i=1}^m O_i \left| \sum_{i=1}^m \operatorname{res}_{z=0} A_i = 0 \right. \right\} / G$$

とおこう．余随伴軌道からリー環の双対空間への包含写像が余随伴作用に関する運動量写像であるという有名な事実から，写像

$$\mu: \prod_{i=1}^m O_i \rightarrow \mathfrak{g}; \quad (A_i) \mapsto \sum_{i=1}^m \operatorname{res}_{z=0} A_i$$

が（トレースによって $\mathfrak{g}$ を $\mathfrak{g}^*$ と同一視すれば） G 作用に関する運動量写像である事が従う．よって $\mathcal{M}$ は $\prod_{i=1}^m O_i$ の G 作用によるハミルトン簡約である：

$$\mathcal{M} = \mu^{-1}(0)/G = (O_1 \times O_2 \times \cdots \times O_m) // G.$$

Marsden-Weinstein の定理により，考えている群作用が自由（かつ固有）であれば，ハミルトン簡約はシンプレクティック多様体の構造を自然に持つ．今の状況では G の中心 $\mathbb{C}^\times$ が自明に作用しており， $\mathcal{M}$ は剰余群 $G/\mathbb{C}^\times$ の作用に関するハミルトン簡約ともみなす事ができる．しかし一般にはこの作用は自由ではないため， $\prod_{i=1}^m O_i$ の G 不変な開部分集合でそこでは $G/\mathbb{C}^\times$ が自由に作用するようなものを考える．

定義 1.1. $\mathfrak{g}[[z]]^*$ の元の組 $(A_i)_{i=1}^m$ が安定であるとは，

$$A_i = \sum_{j \geq 0} A_{i,j} z^{-j} \frac{dz}{z} \quad (A_{i,j} \in \mathfrak{g})$$

と表したとき，全ての $A_{i,j}$ で保たれる $\mathbb{C}^n$ の部分空間が $\{0\}$ と $\mathbb{C}^n$ 以外に存在しない事をいう．

$\prod_{i=1}^m O_i$ の安定な点全体 U は G 不変な開部分集合であり $G/\mathbb{C}^\times$ は U へ自由かつ固有に作用する事を示す事ができる．よって Marsden-Weinstein の定理から軌道空間

$$\mathcal{M}^s \equiv \mathcal{M}^s(O_1, \dots, O_m) := (\mu|_U)^{-1}(0)/G$$

は複素シンプレクティック多様体の構造を持つ．本稿における主役はこの空間である．

さて $\mathbb{C}$ 内の相異なる m 個の点 $t_1, \dots, t_m$ を固定し， $\mathfrak{g}[[z]]^*$ の元の組 $(A_i)_{i=1}^m$ ， $A_i = \sum A_{i,j} z^{-j-1} dz$ に対し $\mathbb{P}^1$ 上の $\mathfrak{g}$ 値有理型 1 次微分形式 A を

$$A = \sum_{i=1}^m \sum_{j \geq 0} \frac{A_{i,j}}{(x - t_i)^{j+1}} dx$$

と定め，これを用いて自明束 $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}^{\oplus n}$ 上の有理型接続 $\nabla := d - A$ を考える（これは $\mathbb{P}^1$ 上の線形微分方程式 $du = Au$ を考える事と同じである）． A は $x = \infty$ で高々 1 位の極を持

ち、留数は

$$\operatorname{res}_{x=\infty} A = - \sum_{i=1}^m \operatorname{res}_{x=t_i} A = - \sum_{i=1}^m \operatorname{res}_{z=0} A_i$$

で与えられる．よって $(A_i)_{i=1}^m$ が条件 $\sum_{i=1}^m \operatorname{res}_{z=0} A_i = 0$ を満たす事と、接続 ∇ が $x = \infty$ で正則である、すなわち $\{t_i\}$ 内にしか極を持たない事は同値である．

また、各 A_i は微分形式 A の点 t_i におけるローラン展開の主要部を与えているため、条件 $A_i \in O_i$ と、 A の t_i における主要部が局所座標 $x - t_i$ と不定元 z の同一視の下で O_i に属す事は同値である（またこれが満たされるとき O_i の位数は接続の極の位数と一致する）．なお、この条件を有理型接続 ∇ に対する条件とみた場合、これはベクトル束の局所自明化の取り方に依らない．実際、局所自明化を取り替えると、接続 ∇ は

$$g \circ \nabla \circ g^{-1} = d - (gAg^{-1} + dg \cdot g^{-1}), \quad g \in G\{z\} := \operatorname{GL}_n(\mathbb{C}\{z\}) \quad (z = x - t_i)$$

の形に変化するが、 $gAg^{-1} + dg \cdot g^{-1}$ のローラン展開の主要部は $(gAg^{-1})_{<0}$ に等しい ($dg \cdot g^{-1}$ は正則である)．

更に安定性に関して次を示す事ができる．

命題 1.2. $(A_i)_{i=1}^m$ が安定である事と、組 $(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}^{\oplus n}, \nabla)$ がスロープ安定である事は同値である．

ここで $\mathbb{P}^1$ 上の正則ベクトル束 $\mathcal{E}$ とその上の有理型接続 ∇ の組 $(\mathcal{E}, \nabla)$ がスロープ安定であるとは、 ∇ で保たれる $\mathcal{E}$ の任意の 0 でない部分ベクトル束 $\mathcal{F}$ に対し不等式

$$\frac{\deg \mathcal{F}}{\operatorname{rank} \mathcal{F}} \leq \frac{\deg \mathcal{E}}{\operatorname{rank} \mathcal{E}}$$

が成立し、等号が成立するのは $\mathcal{F} = \mathcal{E}$ の時に限る事をいう．

集合 $\mathcal{M}_{\mathrm{dR}}^s$ を

- $\mathbb{P}^1$ 上の階数 n 、次数 0 の正則ベクトル束 $\mathcal{E}$,
- $\{t_i\}$ 内にしか極を持たない $\mathcal{E}$ 上の有理型接続 ∇

からなるスロープ安定な組 $(\mathcal{E}, \nabla)$ で、各点 t_i の周りで局所的に $\nabla = d - A$ と表したとき、 A のローラン展開の主要部が（局所座標 $x - t_i$ と不定元 z の同一視の下で） O_i に属するようなものの同型類全体としよう．するとこれまでの議論から、 $\mathcal{M}^s$ は $\mathcal{M}_{\mathrm{dR}}^s$ の中で $\mathcal{E}$ が自明束であるようなものからなる部分集合と同一視される事が分かる．また、有理型接続と同様、

- $\mathbb{P}^1$ 上の正則ベクトル束 $\mathcal{E}$,
- $\{t_i\}$ 内にしか極を持たない $\mathcal{E}nd(\mathcal{E})$ 値有理型 1 次微分形式 A

からなる組 (有理型ヒッグス束) に対してもスロープ安定性が定義され, 集合 $\mathcal{M}_{\text{Dol}}^s$ をスロープ安定な組 $(\mathcal{E}, A)$ で, $\text{rank } \mathcal{E} = n, \deg \mathcal{E} = 0$ かつ各点 t_i における A のローラン展開の主要部が O_i に属するようなものの同型類全体とすると, やはり $\mathcal{M}^s$ は $\mathcal{M}_{\text{Dol}}^s$ の中で $\mathcal{E}$ が自明束であるようなものからなる部分集合と同一視される.

2 籠多様体

以後籠 Q に対し, その頂点集合を Q_0 , 矢の集合を Q_1 で表し, また各 $\alpha \in Q_1$ の始点を $s(\alpha)$, 終点を $t(\alpha)$ で表す事にする. また頂点を添字とする非負整数の族 $\mathbf{v} = (v_i)_{i \in Q_0} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^{Q_0}$ に対し, $V_i = \mathbb{C}^{v_i}$ ($i \in Q_0$) において

$$\text{Rep}_Q(\mathbf{v}) = \bigoplus_{\alpha \in Q_1} \text{Hom}(V_{s(\alpha)}, V_{t(\alpha)}), \quad G_{\mathbf{v}} = \prod_{i \in Q_0} \text{GL}(V_i)$$

と定める. 群 $G_{\mathbf{v}}$ は $\text{Rep}_Q(\mathbf{v})$ へ

$$g = (g_i)_{i \in Q_0} : (Q_{\alpha})_{\alpha \in Q_1} \mapsto (g_{t(\alpha)} Q_{\alpha} g_{s(\alpha)}^{-1})_{\alpha \in Q_1} \quad (g \in G_{\mathbf{v}})$$

によって作用し, 軌道集合 $\text{Rep}_Q(\mathbf{v})/G_{\mathbf{v}}$ は Q の次元ベクトル $\mathbf{v}$ の表現の同型類をパラメータ付ける. $\text{Rep}_Q^{\text{irr}}(\mathbf{v}) \subset \text{Rep}_Q(\mathbf{v})$ を既約表現のなす $G_{\mathbf{v}}$ 不変開部分集合とする.

籠 Q のダブル, すなわち Q に元々持っている矢を逆向きにしたものを全て付け加えて得られる籠を $\bar{Q}$ で表す. 定義より $\bar{Q}_0 = Q_0$ であり,

$$\text{Rep}_{\bar{Q}}(\mathbf{v}) = \bigoplus_{\alpha \in Q_1} (\text{Hom}(V_{s(\alpha)}, V_{t(\alpha)}) \oplus \text{Hom}(V_{t(\alpha)}, V_{s(\alpha)})) \quad (\mathbf{v} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^{Q_0})$$

となるから, $\text{Rep}_{\bar{Q}}(\mathbf{v})$ の元は

$$\begin{aligned} Q &= (Q_{\alpha})_{\alpha \in Q_1}, & Q_{\alpha} &: V_{s(\alpha)} \rightarrow V_{t(\alpha)}, \\ P &= (P_{\alpha})_{\alpha \in Q_1}, & P_{\alpha} &: V_{t(\alpha)} \rightarrow V_{s(\alpha)} \end{aligned}$$

からなる組 (Q, P) で表される. Q_{α} が住むベクトル空間と P_{α} が住むベクトル空間はトレースによって双対の関係にあるため, $\text{Rep}_{\bar{Q}}(\mathbf{v})$ は $\text{Rep}_Q(\mathbf{v})$ の余接束と同一視する事ができ, 特に $\text{Rep}_{\bar{Q}}(\mathbf{v})$ 上の複素シンプレクティック形式が定まる:

$$\omega := \sum_{\alpha \in Q_1} \text{tr } dQ_{\alpha} \wedge dP_{\alpha}.$$

更にトレースによる同一視 $(\mathrm{Lie} G_{\mathbf{v}})^* \simeq \mathrm{Lie} G_{\mathbf{v}} = \bigoplus_{i \in Q_0} \mathrm{End}(V_i)$ の下で、写像

$$\mu = (\mu_i)_{i \in Q_0} : \mathrm{Rep}_{\overline{Q}}(\mathbf{v}) \rightarrow \mathrm{Lie} G_{\mathbf{v}}; \quad \mu_i(Q, P) := \sum_{\substack{\alpha \in Q_1 \\ t(\alpha)=i}} Q_{\alpha} P_{\alpha} - \sum_{\substack{\alpha \in Q_1 \\ s(\alpha)=i}} P_{\alpha} Q_{\alpha}$$

は $G_{\mathbf{v}}$ 作用に関する運動量写像を与える．複素数の族 $\zeta = (\zeta_i)_{i \in Q_0} \in \mathbb{C}^{Q_0}$ に対し， $(\mathrm{Lie} G_{\mathbf{v}})^{G_{\mathbf{v}}}$ の元 $(\zeta_i 1_{V_i})_{i \in Q_0}$ を同じ記号 ζ で表す事にし， $\mathrm{Rep}_{\overline{Q}}(\mathbf{v})$ の ζ におけるハミルトン簡約を考えよう：

$$\mathrm{Rep}_Q(\mathbf{v}) //_{\zeta} G_{\mathbf{v}} := \mu^{-1}(\zeta) / G_{\mathbf{v}}.$$

まず $\zeta \cdot \mathbf{v} := \sum \zeta_i v_i$ の値が 0 でなければこれは空集合である事に注意しよう．実際，任意の $(Q, P) \in \mathrm{Rep}_{\overline{Q}}(\mathbf{v})$ に対し

$$\sum_{i \in Q_0} \mathrm{tr} \mu_i(Q, P) = \sum_{\alpha \in Q_1} \mathrm{tr} Q_{\alpha} P_{\alpha} - \sum_{\alpha \in Q_1} \mathrm{tr} P_{\alpha} Q_{\alpha} = 0$$

が成立するため， μ の像は

$$\left\{ (X_i)_{i \in Q_0} \in \mathrm{Lie} G_{\mathbf{v}} \left| \sum_{i \in Q_0} \mathrm{tr} X_i = 0 \right. \right\} \simeq (\mathrm{Lie}(G_{\mathbf{v}}/\mathbb{C}^{\times}))^*$$

に含まれる（ここで $\mathbb{C}^{\times} \subset G_{\mathbf{v}}$ は $(c 1_{V_i})$ ($c \in \mathbb{C}^{\times}$) の形の元からなる部分群である）．特に $\mu^{-1}(\zeta) \neq \emptyset$ ならば $\zeta \cdot \mathbf{v} = 0$ となる． $G_{\mathbf{v}}$ の部分群 $\mathbb{C}^{\times}$ は $\mathrm{Rep}_{\overline{Q}}(\mathbf{v})$ へ自明に作用しており，条件 $\zeta \cdot \mathbf{v} = 0$ が満たされているとき，上のハミルトン簡約は剰余群 $G_{\mathbf{v}}/\mathbb{C}^{\times}$ の作用に関するハミルトン簡約にもなっている．この作用は一般に自由ではないが，作用を $\mathrm{Rep}_{\overline{Q}}^{\mathrm{irr}}(\mathbf{v})$ に制限すれば自由（かつ固有）になる事を示す事ができる．

定義 2.1. 複素数の族 $\zeta = (\zeta_i)_{i \in Q_0} \in \mathbb{C}^{Q_0}$ に対し複素シンプレクティック多様体

$$\mathfrak{M}_Q^s(\mathbf{v}, \zeta) := \left(\mathrm{Rep}_{\overline{Q}}^{\mathrm{irr}}(\mathbf{v}) \cap \mu^{-1}(\zeta) \right) / G_{\mathbf{v}}$$

を籠多様体と呼ぶ．

3 空間 $\mathcal{M}^s$ と籠多様体（対数型の場合）

空間 $\mathcal{M}^s$ と籠多様体の間の関係は， $O_1, O_2, \dots, O_m$ の位数が全て 1 の場合に Crawley-Boevey によって初めて指摘された．ここでその結果を思い出しておく．

まず位数が1の $G[[z]]$ 余随伴軌道はある G 随伴軌道 O を用いて $O dz/z$ と表される事に注意しよう. 上の仮定の下で各 O_i を (dz/z を取り除き) G 随伴軌道と同一視すれば,

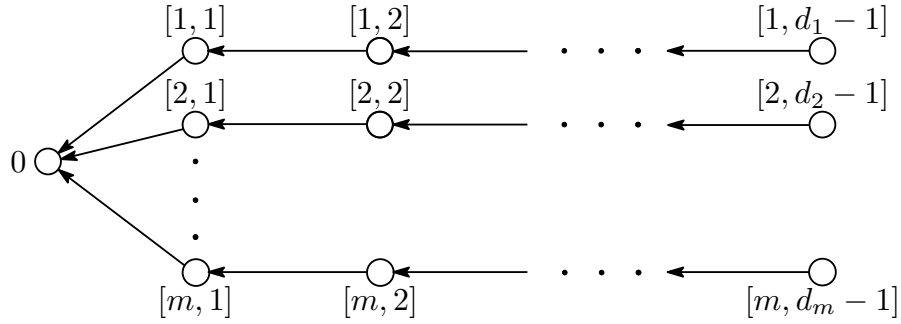
$$\mathcal{M} = \left\{ (L_i) \in \prod_{i=1}^m O_i \mid \sum_{i=1}^m L_i = 0 \right\} / G$$

となる.

定義 3.1. G 随伴軌道 $O \subset \mathfrak{g}$ に対し, 次の条件を満たす複素数の有限列 $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_d)$ を O の零化列と呼ぶ:

$$\prod_{i=1}^d (L - \xi_i 1_{\mathbb{C}^n}) = 0 \quad (L \in O).$$

各 O_i の零化列 $(\xi_{i,1}, \dots, \xi_{i,d_i})$ を取り, 籠 Q を次のように定める.



このような形の籠を星型籠と呼ぶ. Crawley-Boevey は次を示した.

定理 3.2 ([4]). $(\mathbf{v}, \zeta) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^{\mathbf{Q}_0} \times \mathbb{C}^{\mathbf{Q}_0}$ を

$$v_0 = n, \quad v_{[i,j]} = \text{rank} \prod_{l=1}^j (L_i - \xi_{i,l} 1_{\mathbb{C}^n}) \quad (L_i \in O_i),$$

$$\zeta_0 = - \sum_{i=0}^m \xi_{i,1}, \quad \zeta_{[i,j]} = \xi_{i,j} - \xi_{i,j+1}$$

と定めると, 籠多様体 $\mathfrak{M}_{\mathbb{Q}}^s(\mathbf{v}, \zeta)$ は $\mathcal{M}^s(O_1, \dots, O_m)$ と複素シンプレクティック多様体として同型である. 各 $[i, 1]$ から 0 への矢を α_i で表せば, 同型は

$$(Q, P) \mapsto (L_i)_{i=1}^m, \quad L_i = Q_{\alpha_i} P_{\alpha_i} + \xi_i 1_{\mathbb{C}^n}$$

で与えられる.

4 不分岐性と一般化

本稿で紹介する主結果の一つは定理 3.2 の拡張である．これについて述べるため，まず $G[[z]]$ 余随伴軌道に対する「不分岐性」の概念を導入する．

定義 4.1. $\mathfrak{t} \subset \mathfrak{g}$ を対角行列全体とする．

(1) $\mathfrak{t}((z))_- := \mathfrak{t} \otimes z^{-1}\mathbb{C}[z^{-1}]$ の元を不確定型と呼ぶ．

(2) 不確定型 $\Lambda \in \mathfrak{t}((z))_-$ に対し，恒等式 $[\Lambda(z), L] \equiv 0$ を満たす $L \in \mathfrak{g}$ を Λ に関する (形式的) 特性指数行列と呼ぶ．また，このような Λ と L が定める $\mathfrak{g}[[z]]^*$ の元

$$d\Lambda + L \frac{dz}{z} \in \mathfrak{g}[[z]]^*$$

を (不分岐) 標準形と呼ぶ．

(3) 不分岐標準形を含む $G[[z]]$ 余随伴軌道は不分岐であるという．

定理 4.2 ([1, 2, 7]). O_1 は不分岐 $G[[z]]$ 余随伴軌道で $O_2, \dots, O_m$ の位数は 1 であると仮定する．このとき $\mathcal{M}^s(O_1, \dots, O_m)$ はある簾多様体 $\mathfrak{M}_{\mathbb{Q}}^s(\mathbf{v}, \zeta)$ と複素シンプレクティック多様体として同型である．

この定理は初めに [1] で Boalch によって予想され，同時に O_1 の位数が 3 以下の場合に証明が与えられた．その後，[7] で廣恵・山川によって一般の場合が証明された．

定理に現れる $\mathbb{Q}, \mathbf{v}, \zeta$ は具体的に与える事ができる．以下これらの構成法について述べる．

$\mathbb{Q}, \mathbf{v}, \zeta$ の構成

まず O_1 が含む不分岐標準形 $d\Lambda + L dz/z$ を取る．不確定型 Λ は $z^{-1}\mathbb{C}[z^{-1}]$ の元を成分とする対角行列であるから，その対角成分全体の集合を $\Sigma \subset z^{-1}\mathbb{C}[z^{-1}]$ とすれば，直和分解

$$\mathbb{C}^n = \bigoplus_{\lambda \in \Sigma} V_\lambda, \quad V_\lambda = \{v \in \mathbb{C}^n \mid \Lambda(z)v \equiv \lambda(z)v\}$$

が定まる． V_λ の次元は λ が Λ の対角成分として現れる回数 (重複度) に等しい．

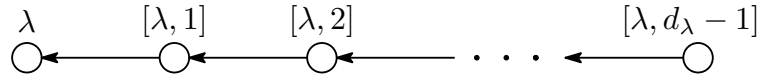
Σ 上の全順序 $<$ を任意に取る． Σ を頂点集合とし，相異なる頂点 $\lambda, \lambda' \in \Sigma$ に対し， $<$ に関し小さい方から大きい方へ $(\deg_{1/z}(\lambda - \lambda') - 1)$ 本の矢を描いてできる簾を $\mathbf{Q}(\Lambda)$ とおく．例えば $n = 2$ で $\Lambda(z) = \text{diag}(0, 1/z)$ の場合， $\deg_{1/z}(1/z) - 1 = 0$ であるから，

$Q(\Lambda)$ は 2 個の頂点からなり矢を一切持たない. また $n = 3$ で $\Lambda(z) = \text{diag}(0, 1/z^2, 2/z^2)$ の場合, $Q(\Lambda)$ の下部グラフ (向きを忘れたもの) は三角形, すなわち $A_2^{(1)}$ 型拡大ディンキン図になる.

L は Λ と可換なため, 上の直和分解を保つ. すなわち

$$L = \bigoplus_{\lambda \in \Sigma} L_\lambda, \quad L_\lambda \in \text{End}(V_\lambda).$$

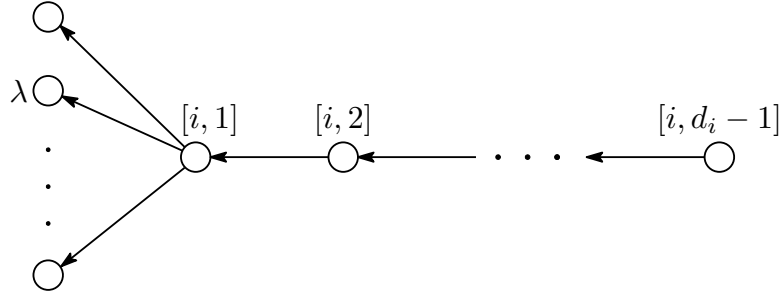
そこで各直和成分 L_λ (の $\text{GL}(V_\lambda)$ 随伴軌道) の零化列 $(\xi_{\lambda,1}, \dots, \xi_{\lambda,d_\lambda})$ を取り, $Q(\Lambda)$ の各頂点 λ に, 簾



(これを $Q^{(\lambda)}$ とおく) の左端点を貼り合わせる. このようにして簾 $Q(\Lambda)$ に「脚」を生やしてできる簾を $Q(\Lambda, L)$ とする. 従って

$$Q(\Lambda, L)_0 = \Sigma \sqcup \bigsqcup_{\lambda \in \Sigma} \{ [\lambda, j] \mid j = 1, \dots, d_\lambda - 1 \}.$$

次に $i \geq 2$ に対し O_i の零化列 $(\xi_{i,1}, \dots, \xi_{i,d_i})$ を取る. 各 $i \geq 2$ に対し, 次のような簾 $Q^{(i)}$ を用意する.



ただし, 左端には $\#\Sigma$ 個の頂点があり, それぞれを Σ の元と同一視している. 前節で定義した簾 $Q(\Lambda, L)$ に, 簾 $Q^{(i)}$, $i = 2, \dots, m$ を Σ において貼り合わせて得られる簾が定理 4.2 に現れる Q である. 定義から

$$Q_0 = Q(\Lambda, L)_0 \sqcup \bigsqcup_{i=2}^m \{ [i, j] \mid j = 1, \dots, d_i - 1 \}.$$

更に各 O_i ($i = 2, \dots, m$) の元 L_i を任意に取る事で, 定理 4.2 に現れる $\mathbf{v}, \zeta$ は以下のよ

うに定義される：

$$v_p = \begin{cases} \dim V_\lambda & (p = \lambda \in \Sigma), \\ \text{rank} \prod_{l=1}^j (L_\lambda - \xi_{\lambda,l} 1_{V_\lambda}) & (p = [\lambda, j] \in Q(\Lambda, L)_0 \setminus \Sigma), \\ \text{rank} \prod_{l=1}^j (L_i - \xi_{i,l} 1_{\mathbb{C}^n}) & (p = [i, j] \in Q_0 \setminus Q(\Lambda, L)_0), \end{cases} \quad (1)$$

$$\zeta_p = \begin{cases} -\xi_{\lambda,1} - \sum_{i=2}^m \xi_{i,1}, & (p = \lambda \in \Sigma), \\ \xi_{\lambda,j} - \xi_{\lambda,j+1} & (p = [\lambda, j] \in Q_0 \setminus \Sigma), \\ \xi_{i,j} - \xi_{i,j+1} & (p = [i, j] \in Q_0 \setminus Q(\Lambda, L)_0). \end{cases}$$

v_p, ζ_p の $p \in Q_0 \setminus \Sigma$ に対する定義が星型簾の場合と基本的に変わらない事が見て取れるであろう．一方，各 $\lambda \in \Sigma$ に対し v_λ は Λ における λ の重複度となっている．特に $\sum_{\lambda \in \Sigma} v_\lambda = n$ である事に注意しよう．

5 IMD 方程式のワイル群対称性

モノドロミー保存変形の問題は対数型（フックス系）ではない有理型接続に対して一般化されている．しかしこれはフックス系の場合のように，単にモノドロミー表現の同型類を保つ変形を指すものではないので注意が必要である．正確に定義するには不確定特異点におけるストークス係数といったものを導入する必要がある，ここでは述べない（[8, 3] 参照）．よく知られている事実を二つ挙げておこう．

- (1) 一般化されたモノドロミー保存変形もある非線形微分方程式（IMD 方程式）で支配される．
- (2) 有理型接続がある特異点で不分岐な場合，一般化されたモノドロミー保存変形によって不確定型 Λ や形式的特性指数行列 L も変化する．ただし群 $H := \{g \in G \mid g\Lambda(z) \equiv \Lambda(z)g\}$ 及び $L \in \text{Lie } H$ の H 随伴軌道は動かないとして良い．

さて 2 番目の主結果である IMD 方程式のワイル群対称性について述べる前に，まず簾多様体の対称性について思い出しておこう．

Q をループ ($s(\alpha) = t(\alpha)$ となる矢 $\alpha \in Q_1$) を持たない任意の簾とし，格子 $\mathbb{Z}^{Q_0}$ 上の双線形形式を

$$(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = 2 \sum_{i \in Q_0} v_i w_i - \sum_{\alpha \in Q_1} (v_{t(\alpha)} w_{s(\alpha)} + v_{s(\alpha)} w_{t(\alpha)})$$

と定める．($\mathbf{e}_i, i \in Q_0$ を格子 $\mathbb{Z}^{Q_0}$ の標準基底とすれば， $[(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j)]_{i,j \in Q_0}$ が Q に付随する対称一般カルタン行列である．) この双線形形式が定める鏡映を $s_i, i \in Q_0$ とする．すな

わち

$$s_i(\mathbf{v}) = \mathbf{v} - (\mathbf{v}, \mathbf{e}_i)\mathbf{e}_i \quad (i \in Q_0).$$

また $r_i: \mathbb{C}^{Q_0} \rightarrow \mathbb{C}^{Q_0}$ を s_i のスカラー積に関する転置としよう :

$$r_i(\zeta) \cdot \mathbf{v} = \zeta \cdot s_i(\mathbf{v}) \quad (\mathbf{v} \in \mathbb{Z}^{Q_0}, \zeta \in \mathbb{C}^{Q_0}).$$

具体的には次で与えられる :

$$r_i(\zeta) = \zeta - \zeta_i \sum_{j \in Q_0} (\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j)\mathbf{e}_j \quad (\zeta \in \mathbb{C}^{Q_0}).$$

$s_i, i \in Q_0$ によって生成される群が Q に付随するワイル群であり, これが s_i, r_i によって $\mathbb{Z}^{Q_0} \times \mathbb{C}^{Q_0}$ に作用する.

定理 5.1 ([5, 9]). $(\mathbf{v}, \zeta) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^{Q_0} \times \mathbb{C}^{Q_0}$ は条件 $\zeta_i \neq 0$ を満たすとする. このとき $\mathfrak{M}_Q^s(\mathbf{v}, \zeta)$ と $\mathfrak{M}_Q^s(s_i(\mathbf{v}), r_i(\zeta))$ は同型である.

定理の同型を与える写像 $\mathfrak{M}_Q^s(\mathbf{v}, \zeta) \rightarrow \mathfrak{M}_Q^s(s_i(\mathbf{v}), r_i(\zeta))$ は中島によって具体的に構成され, 鏡映関手と呼ばれている ([9, 10] 参照).

では 4 節の状況に戻ろう. $O_1^0, \dots, O_m^0$ を定理 4.2 の条件を満たす $\mathrm{GL}_{n_0}(\mathbb{C}[[z]])$ 余随伴軌道とし, Q をそれらに付随する籐, $\Sigma \subset z^{-1}\mathbb{C}[z^{-1}]$ を O_1^0 の不確定型の対角成分全体とする. $(\mathbf{v}, \zeta) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^{Q_0} \times \mathbb{C}^{Q_0}$ に対し

$$n = \sum_{\lambda \in \Sigma} v_\lambda, \quad \Lambda = \bigoplus_{\lambda \in \Sigma} \lambda 1_{\mathbb{C}^{v_\lambda}}$$

とおき, Λ を不確定型に持つ不分岐 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C}[[z]])$ 余随伴軌道 O_1 及び位数 1 の余随伴軌道 $O_2, \dots, O_m$ で, O_1 の形式的特性指数行列の $\mathfrak{gl}_{v_\lambda}(\mathbb{C})$ 成分の零化列 $(\xi_{\lambda, l})$, 及び $O_i, i \geq 2$ の零化列 $(\xi_{i, l})$ を適当に取れば等式 (1) が成り立つようなものを考える. $\mathbf{v}$ によってはこのようなものが存在しない場合もあるが, 存在すれば条件 $\xi_{i, 1} = 0$ ($i = 2, \dots, m$) の下で一意的に定まる. そこで空間 $\mathcal{M}_{Q, \Sigma}^s(\mathbf{v}, \zeta)$ を, そのような $O_1, O_2, \dots, O_m$ が存在しなければ空集合, 存在すれば条件 $\xi_{i, 1} = 0$ を満たすものを取って $\mathcal{M}^s(O_1, \dots, O_m)$ として定める. このとき定理 4.2 により $\mathcal{M}_{Q, \Sigma}^s(\mathbf{v}, \zeta) \simeq \mathfrak{M}_Q^s(\mathbf{v}, \zeta)$ が成り立つ.

$\mathcal{M}_{Q, \Sigma}^s(\mathbf{v}, \zeta)$ の点を代表する (A_i) が与える有理型接続がモノドロミー保存変形を受けると, 結果は一般に同じ空間に属さない. なぜなら A_1 の不確定型 Λ も変化するからである. そこで Q を定義する際に用意した Σ 上の全順序を用いて

$$\Sigma = \{\lambda_1^0 < \lambda_2^0 < \dots < \lambda_k^0\}$$

と表し, 集合 $\text{Irr}(\Sigma)$ を

$$\text{Irr}(\Sigma) = \left\{ (\lambda_1, \dots, \lambda_k) \in (z^{-1}\mathbb{C}[z^{-1}])^k \left| \begin{array}{l} \deg_{1/z}(\lambda_i) \leq \deg_{1/z}(\lambda_i^0), \\ \deg_{1/z}(\lambda_i - \lambda_j) = \deg_{1/z}(\lambda_i^0 - \lambda_j^0) \end{array} \right. \right\}$$

と定める. また各 $(\lambda_1, \dots, \lambda_k) \in \text{Irr}(\Sigma)$ に対し, $\mathcal{M}_{\mathbf{Q}, \Sigma}^s(\mathbf{v}, \zeta)$ の定義において Λ の対角成分 λ_i^0 を λ_i で置き換える事で $\mathcal{M}_{\mathbf{Q}, \{\lambda_1, \dots, \lambda_k\}}^s(\mathbf{v}, \zeta)$ を定める. すると $\text{Irr}(\Sigma)$ 上のシンプレクティックファイバー束

$$\mathcal{M}_{\mathbf{Q}}^s(\mathbf{v}, \zeta) := \bigcup_{(\lambda_1, \dots, \lambda_k) \in \text{Irr}(\Sigma)} \mathcal{M}_{\mathbf{Q}, \{\lambda_1, \dots, \lambda_k\}}^s(\mathbf{v}, \zeta)$$

はモノドロミー保存変形で閉じた空間になる.

定理 5.2. ζ が次の条件を満たすとする :

$$\begin{aligned} \sum_{l=j}^k \zeta_{[\lambda, l]} &\notin \mathbb{Z} \quad (\lambda \in \Sigma, 1 \leq j \leq k \leq d_\lambda - 1), \\ \sum_{l=j}^k \zeta_{[i, l]} &\notin \mathbb{Z} \quad (i = 2, 3, \dots, m, 1 \leq j \leq k \leq d_i - 1). \end{aligned}$$

このとき $\zeta_p \neq 0$ を満たす任意の頂点 $p \in \mathbf{Q}_0$ に対しシンプレクティックファイバー束の同型

$$S_p: \mathcal{M}_{\mathbf{Q}}^s(\mathbf{v}, \zeta) \rightarrow \mathcal{M}_{\mathbf{Q}}^s(s_p(\mathbf{v}), r_p(\zeta))$$

でモノドロミー保存変形をモノドロミー保存変形に移すものが存在する.

同型 S_p は [6] における廣惠の構成法を正規化条件 $\xi_{i,1} = 0$ が保たれるように少し変えるだけで得られる. 本質的には同じであり, 鍵になるのは加法的中間畳み込みの理論である ([12] 参照). また S_p が定理の仮定の下で IMD 方程式を保つ事は [13, Corollary 3.17] から導かれる^{*1}.

鏡映関手の場合のように, S_p 達がワイル群の生成元の基本関係式を満たす事が期待されるが, これは未解決である (ただし $S_p^2 = \text{Id}$ は簡単に示せる).

^{*1} [13, Remark 3.18 (ii)] でも廣惠の同型について述べているが, 最後の “of $L_0^{(i)}$ ” は誤りで “of $L_a^{(i)}$ for some a ” が正しい.

参考文献

- [1] P. Boalch, *Irregular connections and Kac-Moody root systems*, preprint (2008), arXiv:0806.1050.
- [2] ———, *Simply-laced isomonodromy systems*, Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. **116** (2012), no. 1, 1–68.
- [3] P. P. Boalch, *Geometry and braiding of Stokes data; fission and wild character varieties*, Ann. of Math. (2) **179** (2014), no. 1, 301–365. MR 3126570
- [4] W. Crawley-Boevey, *On matrices in prescribed conjugacy classes with no common invariant subspace and sum zero*, Duke Math. J. **118** (2003), no. 2, 339–352.
- [5] W. Crawley-Boevey and M. P. Holland, *Noncommutative deformations of Kleinian singularities*, Duke Math. J. **92** (1998), no. 3, 605–635.
- [6] K. Hiroe, *Linear differential equations on the Riemann sphere and representations of quivers*, preprint (2013), arXiv:1307.7438.
- [7] K. Hiroe and D. Yamakawa, *Moduli spaces of meromorphic connections and quiver varieties*, Adv. Math. **266** (2014), 120–151.
- [8] M. Jimbo, T. Miwa, and K. Ueno, *Monodromy preserving deformation of linear ordinary differential equations with rational coefficients. I. General theory and τ -function*, Phys. D **2** (1981), no. 2, 306–352. MR 630674 (83k:34010a)
- [9] H. Nakajima, *Instantons on ALE spaces and canonical bases*, Proceeding of Symposium on Representation Theory, Yamagata, 1992 (in Japanese).
- [10] ———, *Reflection functors for quiver varieties and Weyl group actions*, Math. Ann. **327** (2003), no. 4, 671–721.
- [11] K. Okamoto, *Studies on the Painlevé equations. I. Sixth Painlevé equation P_{VI}* , Ann. Mat. Pura Appl. (4) **146** (1987), 337–381. MR 916698 (88m:58062)
- [12] D. Yamakawa, *Middle convolution and Harnad duality*, Math. Ann. **349** (2011), no. 1, 215–262.
- [13] ———, *Fourier-Laplace transform and isomonodromic deformations*, to appear in Funkcial. Ekvac. (2013), arXiv:1306.0444.