

Local Theta correspondence of Tempered Representations and Langlands parameters

跡部 発* (京都大学)

1 はじめに

局所テータ対応の理論は約 40 年前に Roger Howe によって創始されて以来, 表現論と保型形式論の両方面で主要なテーマとなっている. 局所テータ対応とは, 局所体上定義された二つの古典群の間に既約表現の対応を与えるものである. 例えば, p -進体 F 上定義されたシンプレクティック群 $G = \mathrm{Sp}(2n)$ と直交群 $H = \mathrm{O}(2m)$ を考える. この時, G の既約 smooth 表現 π に対してテータリフトと呼ばれる H の長さ有限の smooth 表現 $\Theta(\pi)$ が得られる. テータリフト $\Theta(\pi)$ は 0 かもしれないが, もしそれが 0 でなければ, $\Theta(\pi)$ は唯一の既約商 $\theta(\pi)$ を持つことが知られている (Howe duality conjecture). これより, 次の二つの問題が生じる.

問題 A: いつ $\Theta(\pi) \neq 0$ となるか, 決定せよ.

問題 B: $\Theta(\pi) \neq 0$ の時, その既約商 $\theta(\pi)$ を決定せよ.

本稿では, 既約表現のパラメトライズである局所 Langlands 対応を用いて, π が緩増加表現の時に, この二つの問題を解決する. 本稿はシンガポール国立大学の Wee Teck Gan 氏との共同研究に基づく.

2 局所テータ対応

F を p -進体とし, E を F 自身または F の二次拡大とする. E と (G, H) を以下のように設定する.

- $E = F$, $\{G, H\} = \{\mathrm{Sp}(W_n), \mathrm{O}(V_m)\}$. 但し, V_m は m -次元対称形式付きの空間 (m は偶数), W_n は n -次元交代形式付きの空間.
- $E = F$, $\{G, H\} = \{\mathrm{Mp}(W_n), \mathrm{O}(V_m)\}$. 但し, V_m は m -次元対称形式付きの空間 (m は奇数), W_n は n -次元交代形式付きの空間.
- E は F の二次拡大, $\{G, H\} = \{\mathrm{U}(W_n), \mathrm{U}(V_m)\}$. 但し, V_m は m -次元エルミート形式付きの空間, W_n は n -次元歪エルミート形式付きの空間.

ここで, $\mathrm{Mp}(W_n)$ はメタプレクティック群, 即ち, シンプレクティック群 $\mathrm{Sp}(W_n)$ の二重被覆とする.

上のような (G, H) に対して, (幾つかのデータに依存する) splitting $G \times H \rightarrow \mathrm{Mp}(\mathrm{Res}_{E/F}(V_m \otimes_E W_n))$ が構成できる ([16], [12]). この時, $\mathrm{Mp}(\mathrm{Res}_{E/F}(V_m \otimes_E W_n))$ の Weil 表現を引き戻すことにより, $G \times H$ の Weil 表現 ω_{W_n, V_m} が得られる. G の既約 smooth 表現 π に対して, ω_{W_n, V_m} の π -isotypic quotient は

$$\pi \boxtimes \Theta(\pi)$$

*atobe@math.kyoto-u.ac.jp

の形である。ここで $\Theta(\pi)$ は H のある smooth 表現である。 $\Theta(\pi)$ を π の (大きい) テータリフトという。 Kudla [15] は $\Theta(\pi)$ が 0 または長さ有限であることを示した。 次の定理は F の剰余標数が 2 でない時は Waldspurger [27] により、 一般の場合は Gan–Takeda [10], [11] により示された。

定理 2.1 (Howe duality conjecture [13]). もし、 $\Theta(\pi) \neq 0$ ならば、 $\Theta(\pi)$ は唯一の既約商 $\theta(\pi)$ を持つ。

また、 $\Theta(\pi) = 0$ の時は $\theta(\pi) = 0$ とおく。 $\theta(\pi)$ を π の (小さい) テータリフトという。 この時、 次の二つの問題が考えられる。

問題 A: いつ $\Theta(\pi) \neq 0$ となるか、 決定せよ。

問題 B: $\Theta(\pi) \neq 0$ の時、 その既約商 $\theta(\pi)$ を決定せよ。

3 局所 Langlands 対応

上の二つの問題、 特に問題 B の答えを与えるためには、 G や H の既約 smooth 表現の分類が必要となる。 この分類には局所 Langlands 対応を用いる。 我々の考える群において、 局所 Langlands 対応は Arthur [1], Mok [20], Kaletha–Mínguez–Shin–White [14], Gan–Savin [9] により、 ほとんど完全に証明されている。 Arthur [1] は偶数次直交群も扱っていることに注意する。

簡単のため、 $G = \mathrm{Sp}(W_n)$ または、 $\mathrm{O}(V_m)$ (n, m は偶数) について局所 Langlands 対応を説明する。 V_m の判別式指標を χ_V で表す。 これは、 判別式 $\mathrm{disc}(V_m) = (-1)^{m/2} \det(V_m) \in F^\times / F^{\times 2}$ により与えられる $F^\times$ の二次指標である。 F の Weil–Deligne 群を $WD_F = W_F \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ で表す。 局所類体論より、 $WD_F^{\mathrm{ab}} \cong F^\times$ が成り立つ。 $\Phi(G)$ を次のように定める。

$$\begin{aligned}\Phi(\mathrm{Sp}(W_n)) &= \{\phi: WD_F \rightarrow \mathrm{SO}(n+1, \mathbb{C})\} / \cong, \\ \Phi(\mathrm{O}(V_m)) &= \{\phi': WD_F \rightarrow \mathrm{O}(m, \mathbb{C}) \mid \det(\phi') = \chi_V\} / \cong.\end{aligned}$$

$\phi \in \Phi(\mathrm{Sp}(W_n))$ と $\phi' \in \Phi(\mathrm{O}(V_m))$ に対して、 その component groups を

$$\begin{cases} A_\phi^+ = \pi_0(\mathrm{Cent}(\mathrm{Im}(\phi), \mathrm{SO}(n+1, \mathbb{C}))), \\ A_{\phi'} = \pi_0(\mathrm{Cent}(\mathrm{Im}(\phi'), \mathrm{O}(m, \mathbb{C}))) \end{cases}$$

と定義する。 これらは次のように表示することができる ([6] 参照)。

$\phi \in \Phi(\mathrm{Sp}(W_n))$ とする。 次のように ϕ は直和分解される。

$$\phi = m_1 \phi_1 \oplus \cdots \oplus m_r \phi_r \oplus \phi_0 \oplus \phi_0^\vee.$$

但し、 $\phi_i: WD_F \rightarrow \mathrm{O}(n_i, \mathbb{C})$ は既約直交表現、 $i \neq j$ なら $\phi_i \not\cong \phi_j$ 、 m_i は ϕ_i の ϕ における重複度、 ϕ_0 は直交表現でない既約表現の直和である。 この時、

$$A_\phi = \pi_0(\mathrm{Cent}(\mathrm{Im}(\phi), \mathrm{O}(n+1, \mathbb{C})))$$

は $\{\phi_1, \dots, \phi_r\}$ に対応する自然な基底 $\{a_1, \dots, a_r\}$ を持つ $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -ベクトル空間となる。 即ち、

$$A_\phi = \bigoplus_{i=1}^r (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) a_i.$$

行列式 $\det: \mathrm{O}(n+1, \mathbb{C}) \rightarrow \{\pm 1\}$ は準同型

$$\det: A_\phi \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \quad a_i \mapsto \dim(\phi_i) \bmod 2$$

を導く。 Component group A_ϕ^+ はこの準同型の核である。 即ち、 $A_\phi^+ = \ker(\det: A_\phi \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ が成り立つ。 $a = a_{i_1} + \cdots + a_{i_s} \in A_\phi^+$ ($1 \leq i_1 < \cdots < i_s \leq r$) に対して、

$$\phi^a = \phi_{i_1} \oplus \cdots \oplus \phi_{i_r}$$

とおく. また,

$$z_\phi = \sum_{i=1}^r m_i a_i \in A_\phi$$

を A_ϕ の中心元という. これは $-1_{n+1} \in \text{Cent}(\text{Im}(\phi), \text{O}(n+1, \mathbb{C}))$ の像である.

同様に, $\phi' \in \Phi(\text{O}(V_m))$ とすると, 次のように ϕ' は直和分解する.

$$\phi' = m'_1 \phi'_1 \oplus \cdots \oplus m'_{r'} \phi'_{r'} \oplus \phi'_0 \oplus \phi'^{\vee}_0.$$

但し, $\phi'_i: WD_F \rightarrow \text{O}(n'_i, \mathbb{C})$ は既約直交表現, $i \neq j$ なら $\phi'_i \not\cong \phi'_j$, m'_i は ϕ'_i の ϕ' における重複度, ϕ'_0 は直交表現でない既約表現の直和である. この時, $A_{\phi'}$ は $\{\phi'_1, \dots, \phi'_{r'}\}$ に対応する自然な基底 $\{a'_1, \dots, a'_{r'}\}$ を持つ $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -ベクトル空間となる. 即ち,

$$A_{\phi'} = \bigoplus_{i=1}^{r'} (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) a'_i.$$

行列式 $\det: A_{\phi'} \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, $a'_i \mapsto \dim(\phi'_i) \bmod 2$ の核を $A_{\phi'}^+$ で表す. $a' = a'_{i_1} + \cdots + a'_{i_s} \in A_{\phi'} (1 \leq i_1 < \cdots < i_s \leq r')$ に対して,

$$\phi'^{a'} = \phi'_{i_1} \oplus \cdots \oplus \phi'_{i_r}$$

とおく. また,

$$z_{\phi'} = \sum_{i=1}^{r'} m'_i a'_i \in A_{\phi'}$$

を $A_{\phi'}$ の中心元という. これは $-1_m \in \text{Cent}(\text{Im}(\phi'), \text{O}(m, \mathbb{C}))$ の像である.

局所 Langlands 対応とは自然な全単射

$$\begin{aligned} \text{Irr}(\text{Sp}(W_n)) &\longleftrightarrow \{(\phi, \eta) \mid \phi \in \Phi(\text{Sp}(W_n)), \eta \in \text{Irr}(A_\phi^+)\}, \\ \text{Irr}(\text{O}(V_m^+)) \sqcup \text{Irr}(\text{O}(V_m^-)) &\longleftrightarrow \{(\phi', \eta') \mid \phi' \in \Phi(\text{O}(V_m)), \eta' \in \text{Irr}(A_{\phi'})\} \end{aligned}$$

が存在することを主張する. 但し, $V_m^\pm$ は, $\dim(V_m^\pm) = m$ と $\text{disc}(V_m^\pm) = \text{disc}(V_m)$ を満たし, かつ, $V_m^\pm$ の Witt invariant が $\pm\chi_V(2)$ であるものとする. さらに, $\sigma \in \text{Irr}(\text{O}(V_m^\bullet))$ と対応する (ϕ', η') に対して,

$$\sigma \in \text{Irr}(\text{O}(V_m^-)) \iff \eta'(z_{\phi'}) = -1$$

が成り立つ.

$\pi \in \text{Irr}(G)$ が (ϕ, η) と対応する時, (ϕ, η) を π の L -parameter と言い, ϕ を π の last name, η を π の first name と言う.

4 問題の再定式化

主定理を述べる前に, 問題 A, B を再定式化する. 簡単のため, reductive dual pair $(\text{Sp}(W_n), \text{O}(V_m))$ を考える (n, m は偶数). $\mathcal{V} = \{V_m\}$ を Witt tower とする. 即ち, $V_{m+2} = V_m \oplus \mathbb{H}$, 但し, $\mathbb{H}$ は双曲平面とする. 次元の偶奇, 判別式, Witt invariant はその空間が属する Witt tower にしか依らないことに注意する. χ_V で V_m の (共通の) 判別式指標を表す. この時, $\pi \in \text{Irr}(\text{Sp}(W_n))$ に対して, $\text{O}(V_m)$ へのテータリフト $\Theta_m(\pi)$ を考えることにより, テータリフトの塔 $\{\Theta_m(\pi)\}$ が得られる.

命題 4.1 (Tower property [15]). $\pi \in \text{Irr}(\text{Sp}(W_n))$ とすると,

$$m_{\mathcal{V}}(\pi) = \min\{m \mid \Theta_m(\pi) \neq 0\}$$

は有限であり, すべての $m \geq m_{\mathcal{V}}(\pi)$ に対して, $\Theta_m(\pi) \neq 0$ となる.

$m_{\mathcal{V}}(\pi)$ を Witt tower $\mathcal{V}$ における π の first occurrence index と言い, 対応するテータリフト $\theta_{m_{\mathcal{V}}(\pi)}(\pi)$ を π の first occurrence と言う. π に対する問題 A は各 Witt tower $\mathcal{V}$ における first occurrence index $m_{\mathcal{V}}(\pi)$ を求めることと同値である.

一方で, 各 Witt tower $\mathcal{V} = \{V_m\}$ に対して, 次元の偶奇と判別式は等しいが, Witt invariant が異なるような Witt tower $\mathcal{V}' = \{V'_m\}$ がある. これら二つの Witt towers を $\mathcal{V}^+ = \{V_m^+\}$, $\mathcal{V}^- = \{V_m^-\}$ と書く. 但し, $V_m^{\pm}$ の Witt invariant は $\pm\chi_V(2)$ とする. $\pi \in \text{Irr}(\text{Sp}(W_n))$ に対して, π の $O(V_m^{\pm})$ への (小さい) テータリフトを $\theta_m^{\pm}(\pi)$ で表す. また, $\mathcal{V}^{\pm}$ における π の first occurrence index を $m^{\pm}(\pi)$ と書く.

命題 4.2 (Conservation relation [17], [26]). 任意の $\pi \in \text{Irr}(\text{Sp}(W_n))$ に対して,

$$m^+(\pi) + m^-(\pi) = 2n + 4$$

が成り立つ.

ここで,

$$m^{\text{down}}(\pi) = \min\{m^+(\pi), m^-(\pi)\}, \quad m^{\text{up}}(\pi) = \max\{m^+(\pi), m^-(\pi)\}$$

とおくと, Conservation relation (命題 4.2) により,

$$m^{\text{down}}(\pi) \leq n + 2, \quad m^{\text{up}}(\pi) \geq n + 2$$

が分かる. $m^{\text{down}}(\pi) = m^{\alpha}(\pi)$ となる $\alpha \in \{\pm\}$ を選び, $\mathcal{V}^{\text{down}} := \mathcal{V}^{\alpha}$ を going-down tower, $\mathcal{V}^{\text{up}} := \mathcal{V}^{-\alpha}$ を going-up tower と呼ぶ.

以上の結果のもと, 問題 A, B は次のように再定式化される.

問題 C: 各 $\pi \in \text{Irr}(\text{Sp}(W_n))$ に対して, π の L -parameter (ϕ, η) を用いて,

- (1) $m^{\text{down}}(\pi)$ の値;
- (2) $m^{\text{down}}(\pi)$ は $m^{\pm}(\pi)$ のどちらと等しいか;
- (3) $\theta_m^{\pm}(\pi) \neq 0$ の時, その L -parameter $(\theta_m^{\pm}(\pi), \theta_m^{\pm}(\eta))$

を記述せよ.

5 主定理

ここでは, 主定理を $(G, H) = (\text{Sp}(W_n), O(V_m))$ (n, m は偶数) の場合に説明する. π を $\text{Sp}(W_n)$ の既約緩増加表現とし, (ϕ, η) を π の L -parameter とする. この時,

$$\phi: WD_F \rightarrow \text{SO}(n+1, \mathbb{C})$$

は F の Weil–Deligne 群 $WD_F = W_F \times \text{SL}_2(\mathbb{C})$ の表現であり, η はその component group A_{ϕ}^+ の指標であった. A_{ϕ} は ϕ の既約部分直交表現に対応する基底をもつ $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -ベクトル空間で, A_{ϕ}^+ は A_{ϕ} の指数 2 の部分群であったことに注意する.

ここで, $\text{SL}_2(\mathbb{C})$ の唯一の k -次元既約表現を S_k で表す. 次元 k が奇数の時, S_k は WD_F の既約直交表現と見なせることに注意する. 最初の主定理は, 問題 C (1), (2) の答えを π が緩増加表現の時に与える.

定理 5.1. π を $\text{Sp}(W_n)$ の既約緩増加表現とし, (ϕ, η) をその L -parameter とする. $\mathcal{V}^{\pm} = \{V_m^{\pm}\}$ を二つの Witt tower とし, χ_V を (共通の) 判別式 $\text{disc}(V_m^{\pm})$ が定める $F^{\times} \cong WD_F^{\text{ab}}$ の二次指標とする.

- (1) $\mathcal{T}$ を -1 と次を満たす奇数 $l > 0$ からなる集合とする.

- (chain condition) 奇数 $k = 1, 3, \dots, l$ に対して, ϕ は $\chi_V \otimes S_k$ を含む.
- (odd-nesscondition) 奇数 $k = 1, 3, \dots, l-2$ に対して, $\chi_V \otimes S_k$ の ϕ における重複度は奇数である.
- (alternating condition) 奇数 $k = 1, 3, \dots, l-2$ に対して, $\eta(e_k + e_{k+2}) = -1$ が成り立つ.

但し, e_k は A_ϕ の $\chi_V \otimes S_k$ に対応する元とする. ここで,

$$l(\pi) = \max \mathcal{T}$$

とおく. この時,

$$m^{\text{down}}(\pi) = n + 1 - l(\pi), \quad m^{\text{up}}(\pi) = n + 3 + l(\pi)$$

が成り立つ.

(2) $l(\pi) = -1$ の時は $m^{\text{down}}(\pi) = m^{\text{up}}(\pi) = n + 2$ である. $l(\pi) > -1$ の時は ϕ は χ_V を含んでおり, $m^{\text{down}}(\pi) = m^\alpha(\pi)$ となる $\alpha \in \{\pm 1\}$ の必要十分条件は $\alpha = \eta(e_1 + z_\phi)$ である.

次に問題 C (3) を既約緩増加表現 π に対して考える. 偶数 k と Weil–Deligne 群 WD_F の直交表現 ϕ に対して, root number

$$\varepsilon\left(\frac{1}{2}, \phi \otimes S_k, \psi\right)$$

は, $\{\pm 1\}$ に属し, その値は F の非自明な指標 ψ に依らないことが知られている. その値を $\varepsilon(\phi \otimes S_k)$ と書く.

第二の主定理は, 問題 C (3) の答えを going-down tower へのリフトの時に与える.

定理 5.2. π を $\text{Sp}(W_n)$ の既約緩増加表現とし, (ϕ, η) をその L -parameter とする. V_m を going-down tower $\mathcal{V}^{\text{down}}$ に属する空間 ($m \geq m^{\text{down}}(\pi)$) とする. $\theta_m(\pi) \in \text{Irr}(\text{O}(V_m))$ の L -parameter を $(\theta_m(\phi), \theta_m(\eta))$ で表す.

(1) $m^{\text{down}}(\pi) \leq m < n + 2$ の時, $l = n - m + 1$ に対して, ϕ は $\chi_V \otimes S_l$ を含んでおり,

$$\theta_m(\phi) = (\phi \otimes \chi_V^{-1}) - S_l$$

が成り立つ. 特に, $\theta_m(\phi)$ の既約部分直交表現 ϕ'_i に対応する $A_{\theta_m(\phi)}$ の元 a'_i を, ϕ の既約部分直交表現 $\phi_i = \phi'_i \otimes \chi_V$ に対応する A_ϕ の元 a_i に移すことにより, 埋め込み

$$A_{\theta_m(\phi)} \hookrightarrow A_\phi, \quad A_{\theta_m(\phi)}^+ \hookrightarrow A_\phi^+, \quad a' \mapsto a$$

が得られる. さらに, $a' \in A_{\theta_m(\phi)}^+ \subset A_\phi^+$ に対して,

$$\frac{\theta_m(\eta)(a')}{\eta(a)} = \varepsilon(\phi^a \otimes \chi_V^{-1} \otimes S_{l-1}) \cdot \det(\phi^a)(-1)^{\frac{l-1}{2}}$$

が成り立つ. 特に, $m = n$ の時, $\theta_n(\eta)|_{A_{\theta_n(\phi)}^+} = \eta|_{A_{\theta_n(\phi)}^+}$ が成り立つ.

(2) $m = n + 2$ の時,

$$\theta_{n+2}(\phi) = (\phi \otimes \chi_V^{-1}) \oplus \mathbf{1}$$

が成り立つ. 特に, ϕ の既約部分直交表現 ϕ_i に対応する A_ϕ の元 a_i を, $\theta_{n+2}(\phi)$ の既約部分直交表現 $\phi'_i = \phi_i \otimes \chi_V^{-1}$ に対応する $A_{\theta_{n+2}(\phi)}$ の元 a'_i に移すことにより, 埋め込み

$$A_\phi^+ \subset A_\phi \hookrightarrow A_{\theta_{n+2}(\phi)}, \quad a \mapsto a'$$

が得られる. さらに, $\theta_{n+2}(\eta)|_{A_\phi^+} = \eta$ が成り立つ.

(3) $m > n + 2$ の時,

$$\theta_m(\phi) = \theta_{n+2}(\phi) \oplus \left(\bigoplus_{i=1}^{(m-n-2)/2} \left(|\cdot|_F^{\frac{m-n}{2}-i} \oplus |\cdot|_F^{-\frac{m-n}{2}+i} \right) \right)$$

が成り立つ. 特に, 自然な同一視 $A_{\theta_m(\phi)} = A_{\theta_{n+2}(\phi)}$ がある. さらに, $\theta_m(\eta) = \theta_{n+2}(\eta)$ が成り立つ.

(4) $m \neq n$ の時, $\theta_m(\phi)$ は自明表現 1 を含んでおり,

$$\theta_m(\eta)(e'_1 + z_{\theta_m(\phi)}) = \begin{cases} -1 & \text{if } m < n, \\ 1 & \text{if } m > n \end{cases}$$

が成り立つ. 但し, e'_1 は 1 に対応する $A_{\theta_m(\phi)}$ の元である. $m = n$ の時は, $\theta_n(\phi)$ は $\theta_{n+2}(\phi)$ に含まれており, $\theta_n(\eta)$ は

$$\theta_n(\eta) = \theta_{n+2}(\eta)|_{A_{\theta_n(\phi)}}$$

により決定される.

注意 5.3. 定理 5.2 (2) において, $[A_{\theta_{n+2}(\phi)}^+ : A_\phi^+] \leq 2$ に注意する. 等号成立は, ϕ が χ_V を含んでいないことと同値である. ゆえに, 定理 5.1 より, この時は $m^{\text{down}}(\pi) = m^{\text{up}}(\pi) = n + 2$ となる. また, この時 $A_{\theta_{n+2}(\phi)}^+ \setminus A_\phi^+$ の一つの元として $z_{\theta_{n+2}(\phi)}$ が取れ, $\theta_{n+2}(\eta)(z_{\theta_{n+2}(\phi)})$ は $\mathcal{V}^{\text{down}}$ の選び方で決まる (§3 参照). 従って, 定理 5.2 (1)–(3) は, $\theta_m(\eta)|_{A_{\theta_m(\eta)}^+}$ を決定し, (4) と合わせて, $\theta_m(\eta)$ が完全に分かる.

第三の主定理は, 問題 C (3) の答えを going-up tower へのリフトの時に与える.

定理 5.4. π を $\text{Sp}(W_n)$ の既約緩増加表現とし, (ϕ, η) をその L -parameter とする. V_m を going-up tower $\mathcal{V}^{\text{up}}$ に属する空間とし,

$$m \geq m^{\text{up}}(\pi) \geq n + 3$$

と仮定する. 特に $l := l(\pi) = m^{\text{up}}(\pi) - (n + 3) \geq 0$ である. $\theta_m(\pi) \in \text{Irr}(\text{O}(V_m))$ の L -parameter を $(\theta_m(\phi), \theta_m(\eta))$ で表す.

(1) $m = m^{\text{up}}(\pi)$ と仮定する. もし, ϕ における $\chi_V \otimes S_l$ の重複度が奇数なら,

$$\theta_m(\phi) = (\phi \otimes \chi_V^{-1}) \oplus S_{l+2}$$

が成り立つ. 特に, ϕ の既約部分直交表現 ϕ_i に対応する A_ϕ の元 a_i を, $\theta_m(\phi)$ の既約部分直交表現 $\phi'_i = \phi_i \otimes \chi_V^{-1}$ に対応する $A_{\theta_m(\phi)}$ の元 a'_i に移すことにより, 埋め込み

$$A_\phi^+ \subset A_\phi \hookrightarrow A_{\theta_m(\phi)}, \quad a \mapsto a'$$

が得られる. さらに, $a \in A_\phi^+ \subset A_{\theta_m(\phi)}^+$ に対して,

$$\frac{\theta_m(\eta)(a')}{\eta(a)} = \varepsilon(\phi^a \otimes \chi_V^{-1} \otimes S_{l+1}) \cdot \det(\phi^a)(-1)^{\frac{l+1}{2}}$$

が成り立つ.

(2) $m = m^{\text{up}}(\pi)$ と仮定する. もし, ϕ における $\chi_V \otimes S_l$ の重複度が偶数 $2h > 0$ なら,

$$\theta_m(\phi) = (\phi \otimes \chi_V^{-1}) - S_l \oplus \left((|\cdot|_F^{\frac{1}{2}} \oplus |\cdot|_F^{-\frac{1}{2}}) \otimes S_{l+1} \right)$$

が成り立つ. この時, $\text{Sp}(W_{n-2lh})$ の既約緩増加表現 π_0 で, その L -parameter (ϕ_0, η_0) が $\phi_0 = \phi - (\chi_V \otimes S_l)^{2h}$, $\eta_0 = \eta|_{A_{\phi_0}^+}$ で与えられるものに対して, π は誘導表現

$$\text{Ind}_P^{\text{Sp}(W_n)}(\chi_V \text{St}_l \otimes \cdots \otimes \chi_V \text{St}_l \otimes \pi_0)$$

の直和因子となる. ここで, P は $\mathrm{Sp}(W_n)$ の適切な方物型部分群であり, St_l は $\mathrm{GL}_l(F)$ の *Steinberg* 表現である. さらに, $m_0 := m^{\mathrm{up}}(\pi_0) = m - 2lh - 2$ であり, その *first occurrence* $\theta_{m_0}(\pi_0)$ の L -parameter を $(\theta_{m_0}(\phi_0), \theta_{m_0}(\eta_0))$ で表すと,

$$\theta_{m_0}(\phi_0) = (\phi \otimes \chi_V^{-1}) - S_l^{2h-1}$$

が成り立つ. 特に, 自然な同一視 $A_{\theta_m(\phi)} = A_{\theta_{m_0}(\phi_0)}$ があり, $\theta_m(\eta)$ は

$$\theta_m(\eta) = \theta_{m_0}(\eta_0)$$

により決定される.

(3) $m > m_1 := m^{\mathrm{up}}(\pi)$ の時,

$$\theta_m(\phi) = \theta_{m_1}(\phi) \oplus \left(\bigoplus_{i=1}^{(m-m_1)/2} \left(|\cdot|_F^{\frac{m-n}{2}-i} \oplus |\cdot|_F^{-\frac{m-n}{2}+i} \right) \right)$$

が成り立つ. 特に, 自然な同一視 $A_{\theta_m(\phi)} = A_{\theta_{m_1}(\phi)}$ がある. さらに, $\theta_m(\eta) = \theta_{m_1}(\eta)$ が成り立つ.

(4) 各 $m \geq m^{\mathrm{up}}(\pi)$ に対して, $\theta_m(\phi)$ は自明表現 1 を含んでおり,

$$\theta_m(\eta)(e'_1 + z_{\theta_m(\phi)}) = 1$$

が成り立つ. 但し, e'_1 は 1 に対応する $A_{\theta_m(\phi)}$ の元である.

注意 5.5. 定理 5.4 (1) において, $[A_{\theta_m(\phi)}^+ : A_\phi^+] \leq 2$ に注意する. 等号成立の時, $A_{\theta_m(\phi)}^+ \setminus A_\phi^+$ の一つの元として $e'_l + e'_{l+2}$ が取れる. 但し, e'_l, e'_{l+2} はそれぞれ S_l, S_{l+2} に対応する $A_{\theta_m(\phi)}$ の元である. この時, $\theta_m(\pi)$ に対して定理 5.1 のアナロジーを使うことにより,

$$\theta_m(\eta)(e'_l + e'_{l+2}) = -1$$

が分かる. この等式と定理 5.4 (1), (4) により, $\theta_m(\eta)$ が完全に分かる.

注意 5.6. (1) §2 で挙げたすべての *reductive dual pair* に対して局所 *Langlands* 対応はほぼ完全に証明されており, また, *Tower property* (命題 4.1) や *Conservation relation* (命題 4.2) も成り立つことが知られている. ゆえにこれらの場合も同様に問題を再定式化することができる. 主定理 (定理 5.1, 5.2, 5.4) と同様の結果はこれらのすべての場合において証明された.

(2) 問題 A, B は少なくとも $\{G, H\} = \{\mathrm{Sp}(W_n), \mathrm{O}(V_m)\}$ (m, n は偶数) の時には *Muić* ([21]–[24]) や *Mœglin* ([18], [19]) により一般的に調べられてきた. その研究には, *Mœglin–Tadić classification* が用いられている.

(3) 今回の主定理の定式化やその証明は, *Muić* や *Mœglin* の結果よりもよく整理されていると言える. その理由として,

- 問題 A, B の答えを与える上で, 局所 *Langlands* 対応の方が *Mœglin–Tadić classification* よりも効果的であること,
- *Muić* の研究当時よりも現在の方が多くの事実, 例えば *Conservation relation* (命題 4.2) などが知られていること,
- *Muić* は主に *Jacquet* 加群の計算と *Kudla's filtration* を使っていたのに対して, 我々は以下で挙げるような多くの道具を使っていること

が挙げられる.

主定理 (定理 5.1, 5.2, 5.4) の証明には多くの道具を用いる. その道具について紹介する.

Kudla's filtration [15] これは Weil 表現の Jacquet 加群の有限 filtration を与える. 誘導表現とテータリフトとの関係性が得られる.

Standard gamma factor 特に gamma 因子とテータリフトとの関係性 ([7, Theorem 11.2]) を使う.

Plancherel 測度 特に Plancherel 測度とテータリフトとの関係性 ([7, Theorem 12.1]) を使う.

Gross-Prasad 予想 [6] 表現の分岐則に関する予想であり, 直交群の場合, シンプレクティック群とメタプレクティック群の場合, エルミートユニタリー群の場合, 歪エルミートユニタリー群の場合の4つから成る. これらはそれぞれ Waldspurger [28]–[31], 著者自身 [2], Beuzart-Plessis [3]–[5], Gan-市野 [8] により証明された.

D. Prasad の予想 [25] 本研究におけるランクがほぼ等しい場合はすでに知られている. $(\mathrm{Mp}(W_n), \mathrm{O}(V_{n+1}))$ (n は偶数) の場合は Gan-Savin [9] の結果である. その他のランクがほぼ等しい場合は D. Prasad により予想され, $(\mathrm{U}(W_n), \mathrm{U}(V_m))$ ($|n - m| \leq 1$) の場合は Gan-市野 [8] により, $(\mathrm{Sp}(W_n), \mathrm{O}(V_m))$ (m, n は偶数, $|n - m + 1| = 1$) の場合は著者自身 [2] により証明された.

参考文献

- [1] J. Arthur, *The endoscopic classification of representations. Orthogonal and symplectic groups.* American Mathematical Society Colloquium Publications, **61**.
- [2] H. Atobe, The local theta correspondence and the local Gan-Gross-Prasad conjecture for the symplectic-metaplectic case, arXiv:1502.03528v1.
- [3] R. Beuzart-Plessis, *La conjecture locale de Gross-Prasad pour les représentations tempérées des groupes unitaires*, arXiv:1205.2987v2.
- [4] R. Beuzart-Plessis, *Expression d'un facteur epsilon de paire par une formule intégrale*, arXiv:1212.1082v1.
- [5] R. Beuzart-Plessis, *Endoscopie et conjecture raffinée de Gan-Gross-Prasad pour les groupes unitaires*, arXiv:1212.0951v2.
- [6] W. T. Gan, B. H. Gross and D. Prasad, *Symplectic local root numbers, central critical L-values, and restriction problems in the representation theory of classical groups.* Sur les conjectures de Gross et Prasad. I. *Astérisque*. No. **346** (2012), 1–109.
- [7] W. T. Gan and A. Ichino, *Formal degrees and local theta correspondence.* *Invent. Math.* **195** (2014), no. 3, 509–672.
- [8] W. T. Gan and A. Ichino, *The Gross-Prasad conjecture and local theta correspondence*, arXiv:1409.6824v1.
- [9] W. T. Gan and G. Savin, *Representations of metaplectic groups I: epsilon dichotomy and local Langlands correspondence*, *Compos. Math.* **148** (2012), 1655–1694.

- [10] W. T. Gan and S. Takeda, *On the Howe duality conjecture in classical theta correspondence*, arXiv:1405.2626v2.
- [11] W. T. Gan and S. Takeda, *A proof of the Howe duality conjecture*, arXiv:1407.1995v3.
- [12] M. Harris, S. S. Kudla and W. J. Sweet, *Theta dichotomy for unitary groups*, *J. Amer. Math. Soc.* **9** (1996), no. 4, 941–1004.
- [13] R. Howe, *Transcending classical invariant theory*, *J. Amer. Math. Soc.* **2** (1989), no. 3, 535–552.
- [14] T. Kaletha, A. Mínguez, S. W. Shin, and P.-J. White, *Endoscopic classification of representations: inner forms of unitary groups*, arXiv:1409.3731v3.
- [15] S. S. Kudla, *On the local theta correspondence*, *Invent. Math.* **83** (1986), 229–255.
- [16] S. S. Kudla, *Splitting metaplectic covers of dual reductive pairs*, *Israel J. Math.* **87** (1994), no. 1-3, 361–401.
- [17] S. S. Kudla and S. Rallis, *On first occurrence in the local theta correspondence*, *Automorphic representations, L-functions and applications: progress and prospects*, Ohio State Univ. Math. Res. Inst. Publ. **11**, de Gruyter, Berlin, 2005, pp. 273–308.
- [18] C. Mœglin, *Conjecture d’Adams pour la correspondance de Howe et filtration de Kudla*, *Arithmetic geometry and automorphic forms*, *Adv. Lect. Math.* **19**, Int. Press, Somerville, MA, 2011, pp. 445–503.
- [19] C. Mœglin, *Multiplicité 1 dans les paquets d’Arthur aux places p -adiques*, *On certain L-functions*, 333–374, *Clay Math. Proc.*, **13**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2011.
- [20] C. P. Mok, *Endoscopic classification of representations of quasi-split unitary groups*, *Mem. Amer. Math. Soc.* **235** (2015), no. 1108.
- [21] G. Muić, *Howe correspondence for discrete series representations; the case of $(\mathrm{Sp}(n), \mathrm{O}(V))$* , *J. Reine Angew. Math.* **567** (2004), 99–150.
- [22] G. Muić, *On the structure of the full lift for the Howe correspondence of $(\mathrm{Sp}(n), \mathrm{O}(V))$ for rank-one reducibilities*, *Canad. Math. Bull.* **49** (2006), no. 4, 578–591.
- [23] G. Muić, *On the structure of theta lifts of discrete series for dual pairs $(\mathrm{Sp}(n), \mathrm{O}(V))$* , *Israel J. Math.* **164** (2008), 87–124.
- [24] G. Muić, *Golan Theta lifts of tempered representations for dual pairs $(\mathrm{Sp}_{2n}, \mathrm{O}(V))$* , *Canad. J. Math.* **60** (2008), no. 6, 1306–1335.
- [25] D. Prasad, *On the local Howe duality correspondence*, *Internat. Math. Res. Notices* (1993), 279–287.
- [26] B. Sun and C.-B. Zhu, *Conservation relations for local theta correspondence*, arXiv:1204.2969v3.

- [27] J.-L. Waldspurger, *Démonstration d'une conjecture de dualité de Howe dans le cas p -adique, $p \neq 2$, in Festschrift in honor of I. I. Piatetski-Shapiro on the occasion of his sixtieth birthday, part I (Ramat Aviv, 1989), Israel Mathematical Conference Proceedings, vol. 2 (Weizmann, Jerusalem, 1990), 267–324.*
- [28] J.-L. Waldspurger, *Une formule intégrale reliée à la conjecture locale de Gross–Prasad, Compos. Math.* **146** (2010), no. 5, 1180–1290.
- [29] J.-L. Waldspurger, *Une formule intégrale reliée à la conjecture locale de Gross–Prasad, 2e partie: extension aux représentations tempérées, Astérisque.* No. **346** (2012), 171–312.
- [30] J.-L. Waldspurger, *Calcul d'une valeur d'un facteur ε par une formule intégrale, Astérisque.* No. **347** (2012), 1–102.
- [31] J.-L. Waldspurger, *La conjecture locale de Gross–Prasad pour les représentations tempérées des groupes spéciaux orthogonaux, Astérisque.* No. **347** (2012), 103–165.