

コンパクト Clifford–Klein 形の存在問題について

On the existence problem of compact Clifford–Klein forms

森田陽介 (東京大学)

Yosuke Morita (The University of Tokyo)

ymorita@ms.u-tokyo.ac.jp

2015 年 11 月 18 日

概要

G の離散部分群 Γ が等質空間 G/H に固有不連続かつ自由に作用するとき, 商多様体 $\Gamma \backslash G/H$ のことを Clifford–Klein 形という. どのような G/H に対してコンパクトな Clifford–Klein 形が存在するかという問題は, 様々な手法によって研究されている. 本講演では, Lie 環の相対コホモロジーと de Rham コホモロジーを見比べることで得られる, コンパクト Clifford–Klein 形の存在に対する新たな障害を紹介する.

1 Clifford–Klein 形

G を Lie 群, H をその閉部分群とする. G の離散部分群 Γ で等質空間 G/H を左から割って得られる空間 $\Gamma \backslash G/H$ は, 一般には Hausdorff ではない.

例 1.1. $G = \mathbb{R}^2$, $H = \mathbb{R} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\Gamma = \mathbb{Z} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mathbb{Z} \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$ とすると, $G/H \simeq \mathbb{R}/(\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\sqrt{2})$.

もし Γ の G/H への作用が固有不連続かつ自由ならば, 射影 $\pi : G/H \rightarrow \Gamma \backslash G/H$ は被覆写像になり, $\Gamma \backslash G/H$ は多様体となる. このとき $\Gamma \backslash G/H$ を G/H の Clifford–Klein 形とよぶ.

問題 1.2 (小林 [3]). 与えられた等質空間 G/H に対して, G/H の Clifford–Klein 形で,

コンパクトなものが存在するかどうかを判定せよ.

1960 年代前半までに, G が線型実簡約 Lie 群で H がコンパクトな場合 (例えば, G/H が非コンパクト型 Riemann 対称空間の場合) には常にコンパクト Clifford–Klein 形が存在することが, A. Borel らにより証明された. 一般の等質空間に対しては, コンパクト Clifford–Klein 形が存在することもある. 1980 年代後半に小林俊行氏が系統的な研究を始めて以来, これまでに様々な結果が得られている ([6], [8], [9] などに, これまでの研究が纏められている).

小林俊行・小野薫両氏は, Lie 環の相対コホモロジー $H^\bullet(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}; \mathbb{R})$ と Clifford–Klein 形の de Rham コホモロジー $H^\bullet(\Gamma \backslash G/H; \mathbb{R})$ を上手く見比べることで, コンパクト Clifford–Klein 形が存在するための障害が得られることを発見した ([7]). この手法を発展させる形で, 今までに幾つかの障害が見つかった ([3], Benoist–Labourie [1], 森田 [10]). 今回の講演では, この手法を用いて得られた新しい結果について紹介したい.

謝辞. 本研究は日本学術振興会・特別研究員奨励費 (課題番号: 14J08233) および数物フロンティア・リーディング大学院の助成を受けたものである.

2 準備

本節では, 主定理を述べるために必要な概念を準備する.

定義 2.1. $\mathfrak{g}$ を Lie 環, $\mathfrak{h}$ を $\mathfrak{g}$ の部分 Lie 環とする. $d : (\Lambda^p(\mathfrak{g}/\mathfrak{h})^*)^{\mathfrak{h}} \rightarrow (\Lambda^{p+1}(\mathfrak{g}/\mathfrak{h})^*)^{\mathfrak{h}}$ を, $\alpha \in (\Lambda^p(\mathfrak{g}/\mathfrak{h})^*)^{\mathfrak{h}}$, $X_1, \dots, X_{p+1} \in \mathfrak{g}$ に対し

$$(d\alpha)(X_1, \dots, X_{p+1}) := \sum_{1 \leq i < j \leq p+1} (-1)^{i+j} \alpha([X_i, X_j], X_1, \dots, \widehat{X_i}, \dots, \widehat{X_j}, \dots, X_{p+1})$$

とおくことで定めると, $((\Lambda^\bullet(\mathfrak{g}/\mathfrak{h})^*)^{\mathfrak{h}}, d)$ は differential graded algebra をなす. そのコホモロジーを $H^\bullet(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}; \mathbb{R})$ と書く.

注意 2.2. G を Lie 環, H をその部分 Lie 環とする. H は連結と仮定する. G, H の Lie 環をそれぞれ $\mathfrak{g}, \mathfrak{h}$ とする. このとき, $H^\bullet(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}; \mathbb{R})$ は次のような幾何学的解釈を持つ: 等質空間 G/H 上の G -不変 p 次微分形式 $\alpha \in \Omega^p(G/H)^G$ を考えよう. 1 点 $x_0 = eH \in G/H$ での α の値を決めれば, G -不変性から他の点での α の値は自動的に決まってしまう. これによって同型

$$\Omega^p(G/H)^G \simeq (\Lambda^p(\mathfrak{g}/\mathfrak{h})^*)^{\mathfrak{h}}$$

が定まる．この同型のもとで、 $d : (\Lambda^p(\mathfrak{g}/\mathfrak{h})^*)^{\mathfrak{h}} \rightarrow (\Lambda^{p+1}(\mathfrak{g}/\mathfrak{h})^*)^{\mathfrak{h}}$ は微分形式の外微分 $d : \Omega^p(G/H)^G \rightarrow \Omega^{p+1}(G/H)^G$ に対応する．従って $H^\bullet(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}; \mathbb{R})$ とは $(\Omega^\bullet(G/H)^G, d)$ のコホモロジーのことである．

定義 2.3. H を連結成分有限個の Lie 群とする． H のコンパクト部分群の中で包含関係に関して極大なものが、共役をのぞいてただ 1 つ存在することが知られている ([2, Chap. XV] 参照)．これを H の極大コンパクト部分群と呼ぶ．

事実 2.4 (Cartan–Malcev–Iwasawa–Mostow; [2, Chap. XV] 参照)． H を連結成分有限個の Lie 群、 K_H をその極大コンパクト部分群とする．このとき H/K_H は $\mathbb{R}^k$ ($k = \dim(H/K_H)$) に微分同相である．

注意 2.5. H が線型実簡約 Lie 群のとき、事実 2.4 は Cartan 分解から直ちに従う．

3 主定理

定理 3.1 ([11, Th. 1.2])． G を Lie 群、 H をその閉部分群とする． H の連結成分は有限個と仮定する． $N = \dim(G/H)$ とおく．

(i) $(\Lambda^N(\mathfrak{g}/\mathfrak{h})^*)^{\mathfrak{h}} \neq 0$ かつ $H^N(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}; \mathbb{R}) = 0$ ならば、 G/H はコンパクト Clifford–Klein 形を持たない．

(ii) H の極大コンパクト部分群 K_H をとる． K_H の Lie 環を $\mathfrak{k}_H$ と書くことにする．包含 $\mathfrak{k}_H \subset \mathfrak{h}$ が誘導する準同型

$$i : H^N(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}; \mathbb{R}) \rightarrow H^N(\mathfrak{g}, \mathfrak{k}_H; \mathbb{R})$$

が単射でないとき、 G/H はコンパクト Clifford–Klein 形を持たない．

注意 3.2. 定理 3.1 (i) の証明のアイディアは、[1] の中で既に implicit に現れている．また、[10] では G/H が簡約型等質空間の場合に 定理 3.1 (ii) を証明した．

定理 3.1 の証明で鍵となるのは、Lie 環の相対コホモロジー $H^\bullet(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}; \mathbb{R})$ を Clifford–Klein 形の de Rham コホモロジー $H^\bullet(\Gamma \backslash G/H; \mathbb{R})$ と結びつける準同型 $\eta : H^\bullet(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}; \mathbb{R}) \rightarrow H^\bullet(\Gamma \backslash G/H; \mathbb{R})$ である．その定義を振り返る：

定義 3.3. G/H を等質空間とする． G の離散部分群 Γ が G/H に固有不連続かつ自由に作用し、したがって $\Gamma \backslash G/H$ が Clifford–Klein 形になるとしよう．このとき、包含写像が

ら自然に定まる準同型を

$$\eta : (\Lambda^\bullet(\mathfrak{g}/\mathfrak{h})^*)^\flat \simeq \Omega^\bullet(G/H)^G \hookrightarrow \Omega^\bullet(G/H)^\Gamma \simeq \Omega^\bullet(\Gamma \backslash G/H)$$

と書く. η がコホモロジーの間に定める準同型も

$$\eta : H^\bullet(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}; \mathbb{R}) \rightarrow H^\bullet(\Gamma \backslash G/H; \mathbb{R})$$

と書くことにする.

補題 3.4. $N := \dim(G/H)$ とおく. $\Gamma \backslash G/H$ を等質空間 G/H のコンパクトな Clifford–Klein 形とする. このとき $\omega \neq 0 \in (\Lambda^N(\mathfrak{g}/\mathfrak{h})^*)^\flat$ に対し $\eta([\omega]) \neq 0 \in H^N(\Gamma \backslash G/H; \mathbb{R})$ である. 特に $\eta : H^N(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}; \mathbb{R}) \rightarrow H^N(\Gamma \backslash G/H; \mathbb{R})$ は単射.

証明. ω は G/H 上の G -不変な体積形式である. η の定義より, $\eta(\omega) \in \Omega^N(\Gamma \backslash G/H)$ は $\Gamma \backslash G/H$ 上の体積形式となる. コンパクトな多様体上の体積形式のコホモロジー類は 0 になりえないので, $\eta([\omega]) \neq 0 \in H^N(\Gamma \backslash G/H; \mathbb{R})$. $\square$

準備ができたので, [11] に沿って定理 3.1 の証明を与える.

定理 3.1 の証明. まず, H が連結のときに定理を証明すれば十分であることに注意する. なぜならば, $\Gamma \backslash G/H$ が G/H のコンパクト Clifford–Klein 形するとき, $\Gamma \backslash G/H_0$ が G/H_0 のコンパクト Clifford–Klein 形になるからである ($H_0 : H$ の単位元成分). 以下常に H は連結であると仮定して議論する.

(i) の証明: コンパクトな Clifford–Klein 形 $\Gamma \backslash G/H$ が存在したと仮定して矛盾を導く. $\omega \neq 0 \in (\Lambda^N(\mathfrak{g}/\mathfrak{h})^*)^\flat$ をとる. $H^N(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}; \mathbb{R}) = 0$ と仮定したので, 特に $[\omega] = 0$ である. 一方補題 3.4 より, $\eta([\omega]) \neq 0 \in H^N(\Gamma \backslash G/H)$. これは不可能である.

(ii) の証明: コンパクトな Clifford–Klein 形 $\Gamma \backslash G/H$ が存在したと仮定して矛盾を導く. $\Gamma \backslash G/H$ が G/H の Clifford–Klein 形するとき, $\Gamma \backslash G/K_H$ は G/K_H の Clifford–Klein 形であり, $\pi : \Gamma \backslash G/K_H \rightarrow \Gamma \backslash G/H$ は H/K_H をファイバーとするファイバー束になる. H/K_H は可縮 (事実 2.4) なので, π はコホモロジーの同型

$$\pi^* : H^\bullet(\Gamma \backslash G/H; \mathbb{R}) \xrightarrow{\cong} H^\bullet(\Gamma \backslash G/K_H; \mathbb{R})$$

を誘導する. 可換図式

$$\begin{array}{ccc} H^N(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}; \mathbb{R}) & \xrightarrow{i} & H^N(\mathfrak{g}, \mathfrak{k}_H; \mathbb{R}) \\ \eta \downarrow & & \eta \downarrow \\ H^N(\Gamma \backslash G/H; \mathbb{R}) & \xrightarrow{\pi^*} & H^N(\Gamma \backslash G/K_H; \mathbb{R}). \end{array}$$

を見ると, π^* は同型, 左側の η は補題 3.4 より単射である. 図式の可換性から i は単射でなくてはならないが, それは仮定に反する. $\square$

4 応用

この節では, 定理 3.1 によってコンパクト Clifford–Klein 形を持たないことが判明した等質空間の例をいくつか紹介する. 証明および他の例については, [11] を参照されたい.

例 4.1. G を線型実簡約 Lie 群, $P = MAN$ を G の放物型部分群とする. このとき G/N がコンパクト Clifford–Klein 形を持つことは, $N = \{1\}$ (言い換えれば, $P = G$) と同値である.

例 4.2. Lie 群 G の $\mathfrak{g}^*$ への余随伴作用を考える. $F \in \mathfrak{g}^*$ に対し, G における F の固定部分群を $\text{Stab}(F) := \{g \in G : g.F = F\}$ とすると, $F \in \mathfrak{g}^*$ を通る軌道は G の等質空間として $G/\text{Stab}(F)$ と書ける. $G/\text{Stab}(F)$ 上には Kirillov–Kostant–Souriau 形式と呼ばれる G -不変なシンプレクティック形式が定まることがよく知られている. これを利用すると, いつ $G/\text{Stab}(F)$ に対して定理 3.1 が適用できるのかを多くの場合に決定することができる. 例えば:

(1) G を線型な実半単純代数群, $F \in \mathfrak{g}^*$ とする. Killing form によって $\mathfrak{g}$ と $\mathfrak{g}^*$ を同一視する. もし $G/\text{Stab}(F)$ がコンパクト Clifford–Klein 形を持つならば, F は $\mathfrak{g}$ の元として楕円的である.

(2) G を線型な実可解代数群, $F \in \mathfrak{g}^*$ とする. このとき $G/\text{Stab}(X)$ がコンパクト Clifford–Klein 形を持つことは, $G/\text{Stab}(X)$ が 0 次元なことと同値である.

注意 4.3. 余随伴軌道 $G/\text{Stab}(F)$ に対するコンパクト Clifford–Klein 形の存在問題の研究は, [4], [5] によって始められた. Kirillov–Kostant–Souriau 形式のコホモロジー類を利用するというアイディアは, [1] による.

5 Remarks

注意 5.1. 等質空間 G/H の開集合を G の左作用で貼り合わせて得られる空間のことを, G/H を局所モデルとする多様体と呼ぶ. Clifford–Klein 形は G/H を局所モデルとする多様体の一種である. 議論を適切に拡張することで, 定理 3.1 (1) (2) と同じ仮定のもとで, G/H を局所モデルとするコンパクト多様体の非存在を証明することができる. なお,

G/H を局所モデルとするコンパクト多様体は存在するが, コンパクト Clifford–Klein 形は存在しないような等質空間 G/H は, 今のところ知られていない.

注意 5.2. H が連結と仮定する. 定理 3.1 (1) の仮定に現れる条件 $(\Lambda^N(\mathfrak{g}/\mathfrak{h})^*)^{\mathfrak{h}} \neq 0$ とは, G/H 上に G -不変な体積形式が (定数倍を除いてただ 1 つ) 存在することに他ならなかった. このとき $\Gamma \backslash G/H$ 上の自然な体積形式が (定数倍を除いてただ 1 つ) 決まるので, 「体積有限な Clifford–Klein 形」という概念が well-defined に定まる. 定理 3.1 (1) の仮定のもとでより一般に, 体積有限な Clifford–Klein 形が存在しないことを証明することができる.

証明のアイディア. $H^N(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}; \mathbb{R}) = 0$ という条件は, 簡単な計算により「 G/H 上の G -不変な体積形式は, $\mathfrak{h}$ の normalizer $\mathfrak{n}(\mathfrak{h}) := \{X \in \mathfrak{g} : [X, \mathfrak{h}] \subset \mathfrak{h}\}$ の右からの無限小作用で不変でない」と書き換えられる. $\mathfrak{n}(\mathfrak{h})$ の G/H への右からの無限小作用は, Clifford–Klein 形 $\Gamma \backslash G/H$ への無限小作用を誘導する. 無限小作用は微分同相を生成するのだから, もし $\Gamma \backslash G/H$ の体積が有限ならば, 体積を不変に保たなければならない. これは矛盾である. $\square$

定理 3.1 (2) を体積有限な Clifford–Klein 形に拡張できるかどうかは, 今のところ分かっていない. なお, 体積有限な Clifford–Klein 形は存在するが, コンパクト Clifford–Klein 形は存在しないような等質空間 G/H は, 今のところ知られていない.

参考文献

- [1] Y. Benoist and F. Labourie, Sur les espaces homogènes modèles de variétés compactes, *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* **76** (1992), 99–109.
- [2] G. Hochschild, *The structure of Lie groups*, Holden-Day, Inc., San Francisco-London-Amsterdam, 1965.
- [3] T. Kobayashi, Proper action on a homogeneous space of reductive type, *Math. Ann.* **285** (1989), 249–263.
- [4] T. Kobayashi, Discontinuous groups acting on homogeneous spaces of reductive type, *Representation theory of Lie groups and Lie algebras (Fuji-Kawaguchiko, 1990)*, 59–75, World Sci. Publ., River Edge, NJ (1992).

- [5] T. Kobayashi, A necessary condition for the existence of compact Clifford–Klein forms of homogeneous spaces of reductive type, *Duke Math. J.* **67** (1992), 653–664.
- [6] T. Kobayashi, Discontinuous groups and Clifford-Klein forms of pseudo-Riemannian homogeneous manifolds, *Algebraic and analytic methods in representation theory (Sønderborg, 1994)*, Perspectives in Mathematics, vol. 17, Academic Press, San Diego, CA, 1996, 99–165.
- [7] T. Kobayashi and K. Ono, Note on Hirzebruch’s proportionality principle, *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math.* **37** (1990), 71–87.
- [8] T. Kobayashi and T. Yoshino, Compact Clifford–Klein forms of symmetric spaces — revisited, *Pure Appl. Math. Q.* **1** (2005), 591–663.
- [9] F. Labourie, Quelques résultats récents sur les espaces localement homogènes compacts, *Manifolds and geometry (Pisa, 1993)*, *Sympos. Math.*, XXXVI (1996), 267–283, Cambridge Univ. Press, Cambridge.
- [10] Y. Morita, A topological necessary condition for the existence of compact Clifford–Klein forms, *J. Differential Geom.* **100** (2015), 533–545.
- [11] Y. Morita, Homogeneous spaces of nonreductive type locally modelling no compact manifold, arXiv:1508.04862.