

Equivariant Littlewood-Richardson rule of isotropic Grassmannians

Takeshi Ikeda, Okayama University of Science

概要

Let V be a $(2n + 2)$ -dimensional complex vector space equipped with a non-degenerate symmetric bilinear form. Let $OG(n)$ denote the Grassmannian of maximal isotropic subspaces of V . $OG(n)$ can be realized as a homogeneous space $SO_{2n+2}(\mathbb{C})/P$, where P is a maximal parabolic subgroup of $SO_{2n+2}(\mathbb{C})$ corresponding to one of the nodes in the “fork” of the Dynkin diagram of type D_{n+1} . Let T be a maximal torus of $SO_{2n+2}(\mathbb{C})$. The equivariant cohomology $H_T^*(OG(n), \mathbb{Z})$ has a distinguished basis over $H_T^*(pt)$ consisting of the equivariant Schubert classes. Such classes σ_λ are parametrized by a strict partition, i.e., a sequence of positive integers $\lambda = (\lambda_1 > \cdots > \lambda_r > 0)$ with $\lambda_1 \leq n$.

We would like to determine the multiplicative structure constants $c_{\lambda, \mu}^\nu \in H_T^*(pt)$ defined by

$$\sigma_\lambda \sigma_\mu = \sum_{\nu} c_{\lambda, \mu}^\nu \sigma_\nu. \quad (0.1)$$

In [4], [5], it was shown that σ_λ can be identified with a certain special polynomial called the factorial P -function $P_\lambda(x|t)$, which is a symmetric polynomial in $x = (x_1, \dots, x_n)$ with coefficients in $\mathbb{Z}[t_1, \dots, t_{n+1}] \cong H_T^*(pt)$. The aim of this talk is to give an explicit description of $c_{\lambda, \mu}^\nu(t)$ defined by

$$P_\lambda(x|t) P_\mu(x|t) = \sum_{\nu} c_{\lambda, \mu}^\nu(t) P_\nu(x|t). \quad (0.2)$$

We obtained an expression of $c_{\lambda, \mu}^\nu(t)$ as a $\mathbb{Z}$ -linear combination of explicitly defined products of some roots of type D . Each term is associated to a combinatorial object called a *barred ℓ -rim strip*. We conjecture that the expression leads to a formula which involves only positive terms.

1 序

ラグランジアン・グラスマン多様体のトーラス同変コホモロジーについて 2005 年の表現論シンポジウムにおいて発表 [3] した．Factorial Q -Schur 関数という多項式と同変シューベルト類が同一視できるという結果 [4] である．その後，極大直交型グラスマン多様体に対して類似の結果 [5] 得られており，そこでは factorial P -関数が現れる．

Schur 関数の積構造定数の記述，いわゆる Littlewood-Richardson 規則と類似する結果を factorial Q - または P -関数に対して与えることを目標にする．それは同変シューベルト・カルキュラスの基本問題でもある．今回，factorial P -関数に対する積構造定数の決定に，ある程度までは迫る結果が得られたので報告する．

議論の原型は J. Stembridge による “A concise proof of the Littlewood-Richardson rule” [8] という，たった 4 ページの論文にある．Schur 関数に関するこの議論を P -関数に拡張することが S. Cho [1] によりなされた．また，factorial Schur 関数に対して同様の成果が V. Kreiman [7] によって得られている．それならば，この 2 つの手法を合わせて factorial P -関数を扱うことができそうである．実際には時間がかかったが，ようやく形が見えてきた．Stembridge の議論の鍵は対合を構成して不要な項のキャンセルを示すことなのだが，それに対応する部分はまだ完成していない．

謝辞：この研究は S. Upadhyay 氏からのメールをきっかけに開始しました．彼女との対話がなければこの結果は得られませんでした．ここに格別の感謝を表わす次第です．また，S. Cho 氏には [1] に関する質問に丁寧に答えてもらいました．中筋麻貴さんには，まだ形にならない私のアイデアを辛抱強く聞いていただきました．また，本研究と関連する別課題のために中筋さんに作成していただいた Sage プログラムが本研究においても大いに役に立ちました．また，成瀬弘さん，松村朝雄さんには有益な助言をいただきました．みなさま，どうもありがとうございます．

2 $P_\lambda(x|t)$ の定義

正の整数 n を固定する．*Strict partition* とは減少する正整数の列 $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_\ell)$ であって $\ell \leq n$ をみたすもののこととする． ℓ を λ の *length* と呼び $\ell(\lambda)$ で表す． x を変数として *Generalized factorial* $(x|t)^k$ を

$$(x|t)^k = (x - t_1) \cdots (x - t_k) \quad (k \geq 1),$$

と定義する．ここに $t = (t_1, t_2, \dots)$ は無限個の不定元である． $x_1, \dots, x_n$ を変数として各 strict partition λ に対して factorial P -関数を

$$P_\lambda(x|t) = \frac{1}{(n - \ell(\lambda))!} \sum_{w \in S_n} w \left(\prod_{i=1}^{\ell(\lambda)} (x_i|t)^{\lambda_i} \prod_{i=1}^{\ell(\lambda)} \prod_{j=i+1}^n \frac{x_i + x_j}{x_i - x_j} \right)$$

と定義する (Ivanov [6] による)．ここで n 次対称群 S_n の元 w は変数 $x_1, \dots, x_n$ を置換する．この関数は $x_1, \dots, x_n$ に関しては対称である $x_1, \dots, x_n, t_1, t_2, \dots$ に関する多項式であることが示せる． $|\lambda| = \sum_{i=1}^{\ell(\lambda)} \lambda_i$ とおくととき, $P_\lambda(x|t)$ は $|\lambda|$ 次の斉次式^{*1}である．

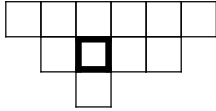
同変シューベルト・カルキュラスにおける $P_\lambda(x|t)$ の役割については [4], [5] を参照されたい．

3 RMST(λ) による表示

Strict partition $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_\ell)$ に対してそのシフトされた diagram $S(\lambda)$ とは

$$S(\lambda) = \{(i, j) \in \mathbb{Z}^2 \mid 1 \leq i \leq \ell, i \leq j \leq \lambda_i + i - 1\} \quad (3.3)$$

のことを言う．行列のように (i, j) の i を行の添え字 j を列の添え字と呼ぶ． $\lambda = (6, 4, 1)$ のシフトされた diagram は


(3.4)

であり, 太い線で示した箱は $(i, j) = (2, 3)$ という座標を持つ．

アルファベット $\mathbb{P}'$ として $\{1, 1', \dots, n, n'\}$ を用いる．順序を

$$1 < 1' < 2 < 2' < \dots < n < n' \quad (3.5)$$

と定める． $1', 2', \dots$ はプライム付きの文字と呼ぶ． $a \in \mathbb{P}'$ に対してプライムを除いた文字を $|a|$ で表す．

λ を strict partition とする． λ を台とする *Reverse marked shifted tableau* (RMST) R とは $S(\lambda)$ の各箱に $\mathbb{P}'$ の元を一つずつ入れて得られるもので

- (1) 行に関して左から右に, 列に関して上から下に弱い意味で減少する．
- (2) 各列は各 k ($1 \leq k \leq n$) を高々 1 個しか含まない．
- (3) 各行は各 k' ($1 \leq k \leq n$) を高々 1 個しか含まない．
- (4) 対角の箱, つまり (i, i) にはプライムのない文字だけが入る．

^{*1} x_i, t_j をすべて 1 次とするとき．

$$\begin{array}{cccccc}
3 & 3 & 2 & 2 & 1' & 1 \\
& 2 & 1' & 1 & 1 & \\
& & 1 & & &
\end{array} \tag{3.6}$$

λ を台とする RMST 全体の集合を $\text{RMST}(\lambda)$ で表す .

RMST R の entry a いうとき , 座標 $(r(a), c(a))$ とアルファベットの情報を込みにして理解する . $r(a)$ は文字 a の行の座標 , $c(a)$ は列の座標を表す . 符号 $\varepsilon(a) \in \{\pm 1\}$ を a が対角にないときは , a がプライム付きなら $+1$, プライムが無いならば -1 とし , a が対角にあるとき^{*2}は $(-1)^{|a|+r(a)+n}$ と定める .

命題 1 (Ivanov [6]). 次が成り立つ :

$$P_\lambda(x|t) = \sum_{R \in \text{RMST}(\lambda)} (x_{|a|} + \varepsilon(a)t_{c(a)-r(a)+1}). \tag{3.7}$$

4 結果

アルファベットは通常の $1, \dots, n$ の他 , プライム付きのもの , 更に後でバー付きのもの (バーとプライムが両方付くものも) も考える .

μ を strict partition とし $1 \leq \ell \leq \ell(\mu)$ とする . κ を $\kappa_i \leq \mu_i$ ($\forall i$) をみたす strict partition とする . $S(\kappa)$ は $S(\lambda)$ の部分集合になる . 集合差 $S(\mu) - S(\kappa)$ 上の 1 から ℓ および $1'$ から ℓ' を entry に持つ RMST (同じように定義する) の全体を $\text{RMST}_\ell(\mu/\kappa)$ で表す . 和集合

$$\text{RS}(\mu, \ell) = \bigsqcup_{\kappa \subset \mu} \text{RMST}(\mu/\kappa) \tag{4.8}$$

を考え , この集合の元を μ を台とする ℓ -rim strip と呼ぶ . 例えば

$$S = \begin{array}{cccccc}
& & & & & 3' & 3 & 2 & 1 \\
& & & & & & 1' & 1 & \\
& & & 3' & 2' & 2 & & & \\
& & 3 & 2 & 2 & 1' & 1 & & \\
& & & 1 & 1 & 1 & & &
\end{array} \tag{4.9}$$

は 3-rim strip である .

例 1. $\mu = (2, 1)$ とするとき $\text{RS}(\mu, 2)$ は以下の元からなる集合である :

$$\begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline & \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline & 2 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|} \hline & 2' \\ \hline & 2 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline & 1 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|} \hline & 1' \\ \hline & 1 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 2 \\ \hline & 1 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 1' \\ \hline & 1 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|} \hline & 2 \\ \hline & 1 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|} \hline & 2' \\ \hline & 1 \\ \hline \end{array}.$$

注意 1. (4.9) の空白部分は $(6, 2)$ の形をしている . 4 を 6 個 , 5 を 2 個を用いて一意的に埋めることができる .

$$\begin{array}{cccccc}
5 & 5 & 4' & 4 & 4 & 4 & 3' & 3 & 2 & 1 \\
& 4 & 4 & 3' & 2' & 2 & 1' & 1 & & \\
& & 3 & 2 & 2 & 1' & 1 & & & \\
& & & 1 & 1 & 1 & & & &
\end{array}$$

^{*2} すなわち $r(a) = c(a)$ が成り立とき .

こうして得られる RMST は [1] の “ ℓ -essential decomposition tableaux” と本質的には同じものである．

ℓ -rim strip S の entry ($\{1, \dots, \ell, 1', \dots, \ell'\}$ の元) のいくつかにバーを付けて得られる対象を考える．例えば次のようなものである：

$$B = \begin{array}{cccccccc} & & & & & 3' & 3 & 2 & 1 \\ & & & & & \bar{3} & 2' & \bar{2} & 1' & 1 \\ & & & & & \bar{3} & 2 & 2 & \bar{1}' & \bar{1} \\ & & & & & \bar{1} & 1 & 1 & & \end{array} \quad (4.10)$$

このような組合せ的对象をバー付き ℓ -rim strip と呼び、これら全体の集合を $\text{BRS}(\mu, \ell)$ で表すことにする． $B \in \text{BRS}(\mu, \ell)$ に対してウェイト $\omega(B)$ を

$$\omega(B) = (\omega_1(B), \dots, \omega_n(B)) \in \mathbb{N}^n,$$

$$\omega_i(B) = \#\{a \in B \mid |a| = i, a \text{ はバー無し}\}$$

と定義する．ただしここで、空白の部分も上記の注意 1 のように ℓ より大きい数字が埋まっていると考えて $\omega_i(B)$ ($\ell + 1 \leq i \leq n$) を決める．上の (4.10) の B に対しては

$$\omega(B) = (5, 4, 3, 6, 2)$$

である．

バー付き ℓ -rim strip B に対して、そのバー付きの entry からなる集合を B^b で表す． $a \in B^b$ に対して $\text{prec}(a)^{*3}$ を 行番号が $r(a)$ 以上、列番号が $c(a)$ 以下であるバーの無い $k := |a|$ または k' の個数を表す．

もうひとつ別に strict partition λ を与えるとき $B \in \text{BRS}(\mu, \ell(\lambda))$ に対して

$$c_{\lambda, B}(t) = \prod_{b \in B^b} \left(t_{\lambda_{|a|} + 1 + \text{prec}(a)} + \varepsilon(a) t_{c(a) - r(a) + 1} \right) \quad (4.11)$$

と定義する．

例 2. (4.10) の B に対しては、 n を偶数とするときに

$$c_{\lambda, B}(t) = (t_{\lambda_1+1} - t_1)(t_{\lambda_1+3} + t_4)(t_{\lambda_1+3} - t_5)(t_{\lambda_2+4} - t_5)(t_{\lambda_3+1} + t_1)$$

である．例えば $a = \bar{2}$ (この例では $\bar{2}$ はただひとつしかない) は座標が $(2, 6)$ であって、自分の左下にバーの無い 2 または $2'$ が合計 3 個あるので $\text{prec}(a) = 3$ である．非対角にあってプライムが無いので符号 $\varepsilon(a)$ は -1 である．よってこれには $t_{\lambda_2+4} - t_5$ という因子が対応する．

^{*3} k または k' を entry に持つ箱の集合に任意に全順序を決めて a より「前の (precede)」バーの無い文字の数を $\text{prec}(a)$ としても以下の結果は成り立つ．後で述べる予想をより良い形にするためにはここで選んだ順序とは違うものを選ぶ方が良いかも知れない．

定理 1. 次が成り立つ：

$$P_\lambda(x|t)P_\mu(x|t) = \sum_{B \in \text{BRS}(\mu, \ell(\lambda))} c_{\lambda, B}(t) P_{\lambda+\omega(B)}(x|t). \quad (4.12)$$

右辺の $P_{\lambda+\omega(B)}(x|t)$ は一般に $\lambda + \omega(B)$ が strict partition でないものも含む．ここでは $\alpha \in \mathbb{N}^n$ に対して $P_\alpha(x|t)$ を添え字 α に関して交代的であると理解する．したがって strict partition を添え字とするものだけの線型結合に書き直すことはできる．その結果，キャンセルが起こり，整理した時に具体的にどの項が残るのかわかることが望ましい．

予想 1. $\text{BRS}(\mu, \ell(\lambda))$ の部分集合 $\text{BRS}(\mu)^{\lambda-\text{good}}$ であって以下をみたすものが存在する（具体的に記述できるであろう）．

- $B \in \text{BRS}(\mu)^{\lambda-\text{good}}$ ならば $\lambda + \omega(B)$ は strict partition である．
- $P_\lambda(x|t)P_\mu(x|t) = \sum_{B \in \text{BRS}(\mu)^{\lambda-\text{good}}} c_{\lambda, B}(t) P_{\lambda+\omega(B)}(x|t)$.

この予想が示されれば

$$c_{\lambda, \mu}^\nu(t) = \sum_{B \in \text{BRS}(\mu)_{\nu-\lambda}^{\lambda-\text{good}}} c_{\lambda, B}(t) \quad (4.13)$$

がしたがう．ここに $\text{BRS}(\mu)_{\nu-\lambda}^{\lambda-\text{good}}$ は $\text{BRS}(\mu)^{\lambda-\text{good}}$ の元 B であって $\omega(B) = \nu - \lambda$ をみたすものの全体の集合である．

例 3. $P_{41}P_{21}$ の展開において P_{421} の係数を求める．つまり $\lambda = (4, 1)$, $\mu = (2, 1)$, $\nu = (4, 2, 1)$ の場合を考える． $B \in \text{BRS}((2, 1), 2)$ のうち $\lambda + \omega(B)$ が ν の置換になるものは以下の通りである． $B, \lambda + \omega(B), c_{\lambda, B}(t)$ の順に記しキャンセルする項を bad としている．

$$\begin{array}{l} \begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline & 2 \\ \hline \end{array}, (4, 1, 0) + (0, 0, 2) = (4, 1, 2), t_2 + t_1; \text{ bad} \\ \begin{array}{|c|c|} \hline & 2' \\ \hline & 2 \\ \hline \end{array}, (4, 1, 0) + (0, 1, 1) = (4, 2, 1), t_2 + t_1; \text{ bad} \\ \begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline & 1 \\ \hline \end{array}, (4, 1, 0) + (0, 0, 2) = (4, 1, 2), t_5 - t_1; \text{ bad} \\ \begin{array}{|c|c|} \hline & 2 \\ \hline & 1 \\ \hline \end{array}, (4, 1, 0) + (0, 1, 1) = (4, 2, 1), t_5 - t_1; \text{ bad} \\ \begin{array}{|c|c|} \hline & 2' \\ \hline & 2 \\ \hline \end{array}, (4, 1, 0) + (0, 1, 1) = (4, 2, 1), t_3 + t_2; \text{ good} \\ \begin{array}{|c|c|} \hline & 2' \\ \hline & 1 \\ \hline \end{array}, (4, 1, 0) + (0, 1, 1) = (4, 2, 1), t_5 - t_1; \text{ good} \end{array}$$

したがって整理した結果は

$$c_{\lambda, \mu}^\nu(t) = t_3 + t_2 + t_5 - t_1$$

である．

5 正值性について

W. Graham による同変の意味での正值性 [2] という概念が有る . $c_{\lambda,B}(t)$ の定義においてすべての因子が

$$t_j \pm t_i \quad (i < j) \quad (5.14)$$

の形であるとき $c_{\lambda,B}(t)$ は正である^{*4}という . 予想 1 において $B \in \text{BRS}(\mu)^{\lambda\text{-good}}$ ならば $c_{\lambda,B}(t)$ が正であるということも期待される . このことは $\text{prec}(a)$ の定義と関わっており , 追究されるべき課題である . $B \in \text{BRS}(\mu)^{\lambda\text{-good}}$ を正しく定式化するために正值性がひとつの指針となるという風にも言える . [7] には関連する議論がある .

参考文献

- [1] CHO, S. A new Littlewood-Richardson rule for Schur P -functions. *Trans. Amer. Math. Soc.* 365, 2 (2013), 939–972.
- [2] GRAHAM, W. Positivity in equivariant Schubert calculus. *Duke Math. J.* 109, 3 (2001), 599–614.
- [3] IKEDA, T. ラグランジアン・グラスマン多様体の 同変コホモロジーと Q -関数 (Equivariant cohomology of the Lagrangian Grassmannian and the factorial Q -functions). 表現論シンポジウム講演集, 1 (2005), 133–142.
- [4] IKEDA, T. Schubert classes in the equivariant cohomology of the Lagrangian Grassmannian. *Adv. Math.* 215, 1 (2007), 1–23.
- [5] IKEDA, T., AND NARUSE, H. Excited Young diagrams and equivariant Schubert calculus. *Trans. Amer. Math. Soc.* 361, 10 (2009), 5193–5221.
- [6] IVANOV, V. N. Interpolation analogues of Schur Q -functions. *Zap. Nauchn. Sem. S.-Peterburg. Otdel. Mat. Inst. Steklov. (POMI)* 307, Teor. Predst. Din. Sist. Komb. i Algoritm. Metody. 10 (2004), 99–119, 281–282.
- [7] KREIMAN, V. Equivariant Littlewood-Richardson skew tableaux. *Trans. Amer. Math. Soc.* 362, 5 (2010), 2589–2617.
- [8] STEMBRIDGE, J. R. A concise proof of the Littlewood-Richardson rule. *Electron. J. Combin.* 9, 1 (2002), Note 5, 4 pp. (electronic).

^{*4} 厳密にはペア (λ, B) に対する概念と考えるべき .