

Hartogs 領域上の調和解析

伊師英之（名古屋大 多元数理）

序.

エルミート型単純リー群 G のスカラー型正則離散系列表現は、有界対称領域上のベルグマン核の負ベキを重みとしたベルグマン空間に実現される. この重み付きベルグマン空間の再生核は負ベキの指数 α に依存するが、 α の認容範囲を越えたところでも、核函数が何らかのヒルベルト空間の再生核になることがあり、そのヒルベルト空間にもユニタリ表現が実現される (正則離散系列表現の解析接続 [17, 18]). この議論は [8, 9] において有界等質領域の場合に拡張された. 本稿では、有界等質領域上の Hartogs 領域において、類似の現象を考察する.

複素領域 $\mathcal{D}$ 上の正值連続関数 $P : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ に対して、

$$\hat{\mathcal{D}}(m, P) := \{ (z, \zeta) \in \mathcal{D} \times \mathbb{C}^m ; \|\zeta\|^2 < P(z) \}$$

を Hartogs 領域という. とくに $\mathcal{D}$ が有界対称領域で P がベルグマン核の負ベキのとき $\hat{\mathcal{D}}(m, P)$ は Cartan-Hartogs 領域とよばれ、[21] においてベルグマン核の明示公式が得られて以降、様々な具体的な計算が実行できる例として、複素幾何において活発に研究されている ([1, 14, 19]).

我々は $\mathcal{D}$ が有界等質領域で、分裂型可解リー群 B が単純推移的に $\mathcal{D}$ に作用し、関数 P が B の作用に関して相対不変である状況を考える. このとき $\hat{\mathcal{D}}(m, P)$ には直積群 $B \times U(m)$ が自然に作用し、ベルグマン空間 $L^2_{hol}(\hat{\mathcal{D}}(m, P))$ 上に $B \times U(m)$ のユニタリ表現が定義されるが、この表現は重複度無しで分解される. より一般に、 $\mathcal{D}$ 上の B -相対不変な正值関数 Q をとり、 Q から定まる $\hat{\mathcal{D}}(m, P)$ 上の重み函数 $\tilde{Q}_\beta(z, \zeta) := Q(z)(1 - \|\zeta\|^2/P(z))^\beta$ に関するベルグマン空間 $L^2_{hol}(\hat{\mathcal{D}}(m, P), \tilde{Q}_\beta)$ を考えると、その上の $B \times U(m)$ の表現も重複度無しで分解される (定理 4). 一方、 $L^2_{hol}(\hat{\mathcal{D}}(m, P), \tilde{Q}_\beta)$ の再生核は閉じた式 (9) で表され、この式で定義される核函数が、あるヒルベルト空間の再生核となる条件は定理 10 で与えられる. そして、このヒルベルト空間に実現される表現の既約分解も、ベルグマン空間の場合と同様の形式で記述される. これらの結果では、有界等質領域 $\mathcal{D}$ の調和解析 (定理 9) が本質的な役割を果たしている.

§1. 準備.

1.1. 複素領域 $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}^n$ と正值連続関数 $P : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ について L^2 空間 $\{ f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{C} ; \|f\|^2 := \int_{\mathcal{D}} |f(z)|^2 P(z) dV(z) < +\infty \}$ を $L^2(\mathcal{D}, P)$ と書く. ただし

$dV(z)$ は $\mathbb{C}^n$ 上の標準的ルベーグ測度である. 正則函数からなる $L^2(\mathcal{D}, P)$ の部分空間 $L_{hol}^2(\mathcal{D}, P) := \mathcal{O}(\mathcal{D}) \cap L^2(\mathcal{D}, P)$ を重み P のベルグマン空間とよぶ. この $L_{hol}^2(\mathcal{D}, P)$ は $L^2(\mathcal{D}, P)$ の閉部分空間なので, それ自身ヒルベルト空間である (ただし $L_{hol}^2(\mathcal{D}, P) = \{0\}$ もあり得る). 各 $z \in \mathcal{D}$ について線型形式 $L_{hol}^2(\mathcal{D}, P) \ni F \mapsto F(z) \in \mathbb{C}$ は連続なので, Riesz の表現定理により $F(z) = (F|K_z)$ ($\forall F \in L_{hol}^2(\mathcal{D}, P)$) となる $K_z \in L_{hol}^2(\mathcal{D}, P)$ が唯一つ存在する. この K_z を用いて定義される函数

$$K_{\mathcal{D}, P} : \mathcal{D} \times \mathcal{D} \ni (z, w) \mapsto K_w(z) = (K_w|K_z) \in \mathbb{C},$$

すなわち $L_{hol}^2(\mathcal{D}, P)$ の再生核を, 重み P のベルグマン核とよぶ. 任意の $F \in L_{hol}^2(\mathcal{D}, P)$ と $z \in \mathcal{D}$ に対し

$$\begin{aligned} F(z) &= (F|K_z) = \int_{\mathcal{D}} F(w) \overline{K_z(w)} P(w) dV(w) \\ &= \int_{\mathcal{D}} K_{\mathcal{D}, P}(z, w) F(w) P(w) dV(w) \end{aligned}$$

である. 一方 $L_{hol}^2(\mathcal{D}, P)$ の任意の完全正規直交系 $\{\psi_\lambda\}$ について

$$K_{\mathcal{D}, P}(z, w) = (K_w|K_z) = \sum_{\lambda} (K_w|\psi_\lambda) (\psi_\lambda|K_z) = \sum_{\lambda} \psi_\lambda(z) \overline{\psi_\lambda(w)}$$

となる. 重み函数 P が定数函数 1 に等しいとき, $L_{hol}^2(\mathcal{D}, 1)$ および $K_{\mathcal{D}, 1}$ をそれぞれ $L_{hol}^2(\mathcal{D})$ と $K_{\mathcal{D}}$ と書き, (重みなしの) ベルグマン空間およびベルグマン核とよぶ. さらに $\varphi_{\mathcal{D}}(z) := K_{\mathcal{D}}(z, z)$ とする. 領域 $\mathcal{D}$ が有界領域と正則同値のとき, 函数 $\log \varphi_{\mathcal{D}}$ をポテンシャルとする $\mathcal{D}$ 上のケーラー計量 $ds_{\mathcal{D}}^2$ をベルグマン計量という. すなわち

$$ds_{\mathcal{D}}^2(v, v')_z := \sum_{i, j=1}^n \frac{\partial^2 \log \varphi_{\mathcal{D}}(z)}{\partial z_i \partial \bar{z}_j} v_i \bar{v}'_j \quad (v, v' \in \mathbb{C}^n \equiv T_z \mathcal{D}, z \in \mathcal{D}).$$

ベルグマン計量 $ds_{\mathcal{D}}^2$ は任意の正則自己同型写像 $\Phi : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}$ に関して不変である.

1.2. 単位開球 $\mathbb{B}_m := \left\{ \zeta \in \mathbb{C}^m; \|\zeta\|^2 := \sum_{j=1}^m |\zeta_j|^2 < 1 \right\}$ 上の函数 $(1 - \|\zeta\|^2)^\beta$ ($\beta > -1$) を重みとするベルグマン空間 $L_{hol}^2(\mathbb{B}_m, (1 - \|\zeta\|^2)^\beta)$ において, 単項式 $\zeta^\alpha = \zeta_1^{\alpha_1} \dots \zeta_m^{\alpha_m}$ ($\alpha \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^m$) は互いに直交し,

$$\|\zeta^\alpha\|^2 = \pi^m \frac{\alpha! \Gamma(\beta + 1)}{\Gamma(|\alpha| + \beta + m + 1)}$$

となる (ただし $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_m$, $\alpha! = \alpha_1! \dots \alpha_m!$). よって $L_{hol}^2(\mathbb{B}_m, (1 - \|\zeta\|^2)^\beta)$ の完全正規直交系として $\left\{ \pi^{-m/2} \sqrt{\frac{\Gamma(|\alpha| + \beta + m + 1)}{\alpha! \Gamma(\beta + 1)}} \zeta^\alpha \right\}_{\alpha \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^m}$ がとれる. 非負整数 $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$

について, $\mathbb{C}^m$ 上の斉次 k 次多項式のなす空間を $L_{hol}^2(\mathbb{B}_m, (1 - \|\zeta\|^2)^\beta)$ の部分空間とみたものを $\text{Pol}_{k,\beta}(\mathbb{B}_m)$ とする. このとき直交直和分解

$$L_{hol}^2(\mathbb{B}_m, (1 - \|\zeta\|^2)^\beta) = \sum_{k \geq 0}^{\oplus} \text{Pol}_{k,\beta}(\mathbb{B}_m)$$

が成り立つ. さて $\left\{ \pi^{-m/2} \sqrt{\frac{\Gamma(|\alpha| + \beta + m + 1)}{\alpha! \Gamma(\beta + 1)}} \zeta^\alpha; \alpha \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^k, |\alpha| = k \right\}$ が $\text{Pol}_{k,\beta}(\mathbb{B}_m)$ の正規直交基底なので, その再生核は

$$\frac{\Gamma(k + \beta + m + 1)}{\pi^m \Gamma(\beta + 1)} \sum_{|\alpha|=k} \frac{\zeta^\alpha (\bar{\zeta}')^\alpha}{\alpha!} = \frac{(\beta + 1)_m (\beta + m + 1)_k}{\pi^m} \frac{(\zeta|\zeta')^k}{k!} \quad (1)$$

で与えられる. ただし, $(a)_m := \Gamma(a + m)/\Gamma(a)$ (Pochhammer の記号). したがって $L_{hol}^2(\mathbb{B}_m, (1 - \|\zeta\|^2)^\beta)$ の再生核, すなわち重み付きベルグマン核 $K_{\mathbb{B}^m, (1 - \|\zeta\|^2)^\beta}$ は

$$\begin{aligned} K_{\mathbb{B}^m, (1 - \|\zeta\|^2)^\beta}(\zeta, \zeta') &= \frac{(\beta + 1)_m}{\pi^m} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\beta + m + 1)_k}{k!} (\zeta|\zeta')^k \\ &= \frac{(\beta + 1)_m}{\pi^m} (1 - (\zeta|\zeta'))^{-(\beta+m+1)} \quad (\zeta, \zeta' \in \mathbb{B}^m) \end{aligned} \quad (2)$$

と計算される.

1.3. 群 G が領域 $\mathcal{D}$ に正則同型写像として作用しているとき, 次の条件 (M1), (M2) をみたす函数 $\mu: G \times \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{C}^\times$ を正則マルチプライヤとよぶ:

(M1) 任意の $g \in G$ について $\mu(g, \cdot)$ は $\mathcal{D}$ 上の正則函数.

(M2) 任意の $g_1, g_2 \in G$ と $z \in \mathcal{D}$ について $\mu(g_1 g_2, z) = \mu(g_1, g_2 \cdot z) \mu(g_2, z)$.

正則マルチプライヤ μ と正值連続関数 $P: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ について

$$P(g \cdot z) = |\mu(g, z)|^2 P(z) \quad (g \in G, z \in \mathcal{D})$$

が成り立つとき μ は P と整合するといい, このとき重み付きベルグマン空間 $L_{hol}^2(\mathcal{D}, P)$ 上に G のユニタリ表現 T_μ^G が

$$T_\mu^G(g)F(z) := \mu(g^{-1}, z) \det J(g^{-1}, z) F(g^{-1} \cdot z) \quad (g \in G, F \in L_{hol}^2(\mathcal{D}, P), z \in \mathcal{D})$$

によって定義される. ただし $J(g, z)$ は写像 $z \mapsto g \cdot z$ の z におけるヤコビ行列を表す. たとえば, 定数函数 1 は正則マルチプライヤで, G -不変な P と整合しする. このとき対応する $L_{hol}^2(\mathcal{D}, P)$ 上の G の表現 T_1^G を T^G と書く.

一般に, 群 G が $\mathcal{D}$ に推移的に作用するとき $(T_\mu^G, L_{hol}^2(\mathcal{D}, P))$ は既約である ([11]).

§2. Hartogs 領域.

2.1. 序で述べたように, 複素領域 $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}^n$ と正值連続関数 $P : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ について Hartogs 領域 $\hat{\mathcal{D}}(m, P) \subset \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^m$ は $\hat{\mathcal{D}}(m, P) := \{(z, \zeta) \in \mathcal{D} \times \mathbb{C}^m; \|\zeta\|^2 < P(z)\}$ によって定義される. もう一つ $\mathcal{D}$ 上の正值連続関数 $Q : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ をとり, Hartogs 領域上の関数 $\tilde{Q}_\beta : \hat{\mathcal{D}}(m, P) \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ を $\tilde{Q}_\beta(z, \zeta) := Q(z)(1 - \|\zeta\|^2/P(z))^\beta$ ($(z, \zeta) \in \hat{\mathcal{D}}(m, P)$) で定める.

命題 1. Hartogs 領域 $\hat{\mathcal{D}}(m, P)$ の重み $\tilde{Q}_\beta$ のベルグマン空間は次のように直交直和分解される:

$$L_{hol}^2(\hat{\mathcal{D}}(m, P), \tilde{Q}_\beta) = \sum_{k \geq 0}^{\oplus} L_{hol}^2(\mathcal{D}, P^{m+k}Q) \otimes \text{Pol}_{k,\beta}(\mathbb{B}_m).$$

ただし $f \in L_{hol}^2(\mathcal{D}, P^{m+k}Q)$ と $\phi \in \text{Pol}_{k,\beta}(\mathbb{B}_m)$ に対し, $f \otimes \phi(z, \zeta) := f(z)\phi(\zeta)$ ($(z, \zeta) \in \hat{\mathcal{D}}(m, P)$) とおくことによって右辺と左辺を同一視する.

証明. 半径 $r > 0$ の開球 $\{\zeta \in \mathbb{C}^m; \|\zeta\| < r\}$ を $\mathbb{B}_m(r)$ と書くものとする, $F_1, F_2 \in L_{hol}^2(\hat{\mathcal{D}}(m, P), \tilde{Q}_\beta)$ について

$$(F_1|F_2) = \int_{\mathcal{D}} \left\{ \int_{\mathbb{B}_m(\sqrt{P(z)})} F_1(z, \zeta) \overline{F_2(z, \zeta)} (1 - \|\zeta\|^2/P(z))^\beta dV(\zeta) \right\} Q(z) dV(z)$$

である. ここで k 次多項式 ϕ について

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{B}_m(\sqrt{P(z)})} |\phi(\zeta)|^2 (1 - \|\zeta\|^2/P(z))^\beta dV(\zeta) \\ &= P(z)^{k+m} \int_{\mathbb{B}_m} |\phi(\zeta)|^2 (1 - \|\zeta\|^2)^\beta dV(\zeta) = P(z)^{k+m} \|\phi\|_{\text{Pol}_{k,\beta}(\mathbb{B}_m)}^2. \end{aligned}$$

よって $F = f \otimes \phi$ ($f \in L_{hol}^2(\mathcal{D}, P^{m+k}Q)$) について

$$\begin{aligned} \|F\|_{L_{hol}^2(\hat{\mathcal{D}}(m, P), \tilde{Q}_\beta)}^2 &= \int_{\mathcal{D}} |f(z)|^2 \left\{ \int_{\mathbb{B}_m(\sqrt{P(z)})} |\phi(\zeta)|^2 (1 - \|\zeta\|^2/P(z))^\beta dV(\zeta) \right\} Q(z) dV(z) \\ &= \int_{\mathcal{D}} |f(z)|^2 P(z)^{k+m} Q(z) dV(z) \|\phi\|_{\text{Pol}_{k,\beta}(\mathbb{B}_m)}^2 \\ &= \|f\|_{L_{hol}^2(\mathcal{D}, P^{m+k}Q)}^2 \|\phi\|_{\text{Pol}_{k,\beta}(\mathbb{B}_m)}^2. \end{aligned}$$

したがって主張は示された. □

ユニタリ群 $U(m)$ の Hartogs 領域 $\hat{\mathcal{D}}(m, P)$ への自然な作用 $(z, \zeta) \mapsto (z, A\zeta)$ ($A \in U(m)$) から, $U(m)$ の $L^2_{hol}(\hat{\mathcal{D}}(m, P), \tilde{Q}_\beta)$ 上のユニタリ表現 $T^{U(m)}$ が得られる. すなわち

$$\begin{aligned} T^{U(m)}(A)F(z, \zeta) &:= (\det A)^{-1}F(z, A^{-1}\zeta) \\ (A \in U(m), F \in L^2_{hol}(\hat{\mathcal{D}}(m, P), \tilde{Q}_\beta), (z, \zeta) \in \hat{\mathcal{D}}(m, P)) \end{aligned}$$

である. 命題 1 は, この表現の既約分解を与えている.

命題 1 と (1) から直ちに次が従う.

命題 2. Hartogs 領域 $\hat{\mathcal{D}}(m, P)$ の重み $\tilde{Q}_\beta$ のベルグマン核 $K_{\hat{\mathcal{D}}(m, P), \tilde{Q}_\beta}$ は以下の級数表示をもつ:

$$\begin{aligned} K_{\hat{\mathcal{D}}(m, P), \tilde{Q}_\beta}((z, \zeta), (z', \zeta')) &= \frac{(\beta + 1)_m}{\pi^m} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\beta + m + 1)_k}{k!} K_{D, P^{k+m}Q}(z, z') (\zeta | \zeta')^k \\ &((z, \zeta), (z', \zeta') \in \hat{\mathcal{D}}(m, P)). \end{aligned}$$

命題 2 は $Q = 1, \beta = 0$ の場合, すなわち $\hat{\mathcal{D}}(m, P)$ の重みなしのベルグマン核 $K_{\hat{\mathcal{D}}(m, P)}$ の場合については Ligočka [12] によって考察された.

2.2. 命題 2 に現れる $P^s Q$ (s は実数) の形の重みのベルグマン核 $K_{D, P^s Q}(z, z')$ が, 多項式 $b(s)$ と核函数 $H : \mathcal{D} \times \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{C}$ および $K : \mathcal{D} \times \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{C}$ を用いて, 十分大きい s に対して

$$K_{D, P^s Q}(z, z') = b(s)H(z, z')K(z, z')^s \quad (z, z' \in \mathcal{D}) \quad (3)$$

と表されることがしばしばある. たとえば (2) から, 固定された $a > 0$ に対して

$$\begin{aligned} \mathcal{D} &= \mathbb{B}_n, \quad P(z) = (1 - \|z\|^2)^a, \quad Q(z) = 1, \quad b(s) = \pi^{-n}(as + 1)_n, \\ H(z, z') &= (1 - (z|z'))^{-n-1}, \quad K(z, z') = (1 - (z|z'))^{-a} \quad (z, z' \in \mathbb{B}_n) \end{aligned} \quad (4)$$

とすると $s > -1/a$ に対して (3) が成り立つ. 他の例として,

$$\begin{aligned} \mathcal{D} &= \mathbb{C}^n, \quad P(z) = e^{-\|z\|^2}, \quad Q(z) = 1, \\ b(s) &= \pi^{-n}s^n, \quad H(z, z') = 1, \quad K(z, z') = e^{(z|z')} \quad (z, z' \in \mathbb{C}^n) \end{aligned} \quad (5)$$

とすると $s > 0$ のとき (3) が成り立つ. 次の定理は山盛厚伺氏のアイディア ([19, 20]) をヒントにした.

定理 3. 関係式 (3) が $s \geq m$ について成り立つとき, $|K(z, z')(\zeta|\zeta')| < 1$ となる $(z, \zeta), (z', \zeta') \in \hat{\mathcal{D}}(m, P)$ について

$$\begin{aligned} K_{\hat{\mathcal{D}}(m, P), \tilde{Q}_\beta}((z, \zeta), (z', \zeta')) &= \frac{(\beta + 1)_m}{\pi^m} H(z, z') K(z, z')^m \\ &\times b\left(t \frac{d}{dt} + m\right) \left[(1 - t)^{-\beta - m - 1} \right]_{t=K(z, z')(\zeta|\zeta')}. \end{aligned} \quad (6)$$

証明. 命題 2 に (3) を代入すると

$$\begin{aligned} K_{\hat{\mathcal{D}}(m, p), \tilde{q}_\beta}((z, \zeta), (z', \zeta')) &= \frac{(\beta + 1)_m}{\pi^m} H(z, z') K(z, z')^m \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\beta + m + 1)_k}{k!} b(k + m) K(z, z')^k (\zeta|\zeta')^k. \end{aligned}$$

一方

$$\begin{aligned} b\left(t \frac{d}{dt} + m\right) \left[(1 - t)^{-\beta - m - 1} \right] &= b\left(t \frac{d}{dt} + m\right) \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\beta + m + 1)_k}{k!} t^k \right] \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\beta + m + 1)_k}{k!} b(k + m) t^k. \end{aligned}$$

これらから主張がしたがう. □

定理 3 を (4) に適用すると, 領域

$$\{(z, \zeta) \in \mathbb{B}_n \times \mathbb{C}^m; \|\zeta\|^2 < (1 - \|z\|^2)^a\} = \{(z, \zeta) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^m; \|z\|^2 + \|\zeta\|^{2/a} < 1\}$$

のベルグマン核が計算できる (cf. [4, 5]).

2.3. 正則マルチプライヤ $\mu : G \times \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{C}^\times$ が $P : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ に整合しているとする (1.3 節参照). このとき直積群 $G \times U(m)$ は Hartogs 領域 $\hat{\mathcal{D}}(m, P)$ に

$$(g, A) \cdot (z, \zeta) := (g \cdot z, \mu(g, z) A \zeta) \quad (g \in G, A \in U(m)) \quad (7)$$

によって作用する. さらに $Q : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ に整合する正則マルチプライヤ $\nu : G \times \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{C}^\times$ が存在するならば, $\tilde{Q}_\beta$ に整合する正則マルチプライヤ $\tilde{\nu} : (G \times U(m)) \times \hat{\mathcal{D}}(m, p) \rightarrow \mathbb{C}^\times$ が

$$\tilde{\nu}((g, A), (z, \zeta)) := \nu(g, z) \quad ((g, A) \in G \times U(m), (z, \zeta) \in \hat{\mathcal{D}}(m, p))$$

によって定義され, よって 1.3 節の議論から $G \times U(m)$ のユニタリ表現 $T_\nu^{G \times U(m)}$ が $L_{hol}^2(\hat{\mathcal{D}}(m, P), \tilde{Q}_\beta)$ 上に定まる.

定理 4. 命題 1 は $G \times U(m)$ の表現の分解

$$T_{\tilde{\nu}}^{G \times U(m)} = \sum_{k \geq 0}^{\oplus} (T_{\nu \mu^{k+m}}^G, L_{hol}^2(\mathcal{D}, P^{m+k}Q)) \otimes (T^{U(m)}, \text{Pol}_{k,\beta}(\mathbb{B}_m))$$

を与えている. 群 G の $\mathcal{D}$ への作用が推移的なとき, この分解は $G \times U(m)$ の分解として無重複である.

集合 $\mathbb{C}^n \times \mathbb{R}$ に群演算

$$(v, t) \cdot (v', t') := (v + v', t + t' + \Im(v|v')) \quad ((v, t), (v', t') \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{R})$$

を定義したものをハイゼンベルグ群とよび Heis_n と表す. 群 Heis_n の $\mathbb{C}^n$ への作用および正則マルチプライヤ $\mu : \text{Heis}_n \times \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$ を

$$(v, t) \cdot z := z + v, \quad \mu((v, t), z) := e^{it - (z|v) - \|v\|^2/2} \\ ((v, t) \in \text{Heis}_n, z \in \mathbb{C}^n)$$

と定義すると, μ は (5) で定める P と整合する. よって $G := \text{Heis}_n$, $\nu := 1$ とすることで定理 4 が適用できる. そこに現れる $(T_{\mu^{k+m}}^G, L_{hol}^2(\mathbb{C}^n, e^{-(m+k)\|z\|^2}))$ はハイゼンベルグ群の Fock-Bargmann 表現 ([2]) に他ならない.

§3. 有界等質領域の場合.

3.1. 領域 $\mathcal{D}$ が有界等質領域に正則同値のとき, すなわち $\mathcal{D}$ が有界領域に正則同値で群 G が推移的に正則同型写像として作用しているとき,

$$P(z) := K_D(z, z)^{-1}, \quad \mu(g, z) := \det J(g, z) \quad (z \in \mathcal{D}, g \in G)$$

とすると μ は P と整合する正則マルチプライヤである. さらに $Q = 1$, $\nu = 1$, $\beta = 0$ として定理 4 を適用すると, Hartogs 領域 $\hat{\mathcal{D}}(m, P)$ の (重みなし) ベルグマン空間 $L_{hol}^2(\hat{\mathcal{D}}(m, P))$ の $G \times U(m)$ の表現空間としての無重複分解が分かる. とくに G として $\mathcal{D}$ の正則自己同型群をとると, ユニタリ表現 $(T_{\mu^{k+m}}^G, L^2(G, P^{k+m}))$ は異なる k に対して互いに同値でない ([9]). 一方, この場合に定理 3 を適用して $\hat{\mathcal{D}}(m, P)$ のベルグマン核の閉じた表示を与えることができる ([10]).

3.2. 以後, 我々は G として正則自己同型群の岩沢部分群 (極大連結分裂型可解リ一部分群) B をとり, B の 1 次元表現 $\chi : B \rightarrow \mathbb{C}^\times$ を正則マルチプライヤとみなして第 2 節の議論を適用する. なお, 推移的に作用する群の正則マルチプライヤの一般的な場合の結果の多くは, この B に関する議論に帰着できる ([8]).

領域 $\mathcal{D}$ の点 z_0 を一つ固定する. リー群 B は $\mathcal{D}$ に単純推移的に作用するので ([15]), B のリー代数 $\mathfrak{b}$ と接空間 $T_{z_0}\mathcal{D} \equiv \mathbb{C}^n$ との間の線型同型 $\iota: \mathfrak{b} \ni Y \mapsto Y \cdot z_0 \in T_{z_0}\mathcal{D}$ を得る. 接空間 $T_{z_0}\mathcal{D}$ 上の複素構造とベルグマン計量 $(ds_{\mathcal{D}}^2)_{z_0}$ を ι で引き戻したものをそれぞれ $j: \mathfrak{b} \rightarrow \mathfrak{b}$ と $(\cdot|\cdot)_{\mathfrak{b}}$ で表す. 内積 $(\cdot|\cdot)_{\mathfrak{b}}$ に関する $[\mathfrak{b}, \mathfrak{b}] \subset \mathfrak{b}$ の直交補空間を $\mathfrak{a}$ とすると $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{b}$ は可換なカルタン部分代数である. 組 $(\mathfrak{b}, j)$ はいわゆる正規 j 代数であり, 次のようなルート空間分解をもつ ([15, 16]).

定理 5 (Piatetskii-Shapiro). 双対ベクトル空間 $\mathfrak{a}^*$ の基底 $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ を次が成り立つようにとることができる: $\mathfrak{b} = \mathfrak{b}(1) \oplus \mathfrak{b}(1/2) \oplus \mathfrak{b}(0)$,

$$\begin{aligned} \mathfrak{b}(0) &= \mathfrak{a} \oplus \sum_{1 \leq \ell < \ell' \leq r}^{\oplus} \mathfrak{b}_{(\alpha_{\ell'} - \alpha_{\ell})/2}, & \mathfrak{b}(1/2) &= \sum_{\ell=1}^r \mathfrak{b}_{\alpha_{\ell}/2}, \\ \mathfrak{b}(1) &= \sum_{\ell=1}^r \mathfrak{b}_{\alpha_{\ell}} \oplus \sum_{1 \leq \ell < \ell' \leq r}^{\oplus} \mathfrak{b}_{(\alpha_{\ell'} + \alpha_{\ell})/2}, \end{aligned}$$

ただし一般に $\alpha \in \mathfrak{a}^*$ について $\mathfrak{b}_{\alpha} := \{Y \in \mathfrak{b}; [C, Y] = \alpha(C)Y \ (\forall C \in \mathfrak{a})\}$ とする.

直和分解 $\mathfrak{b} = \mathfrak{a} \oplus [\mathfrak{b}, \mathfrak{b}]$ を用いて, $\mathfrak{a}$ 上の線型形式 $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ を $\mathfrak{b}$ 上に拡張する. パラメータ $\underline{\sigma} = (\sigma_1, \dots, \sigma_r) \in \mathbb{R}^r$ について 1 次元表現 $\chi_{\underline{\sigma}}: B \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ を $\chi_{\underline{\sigma}}(\exp X) := e^{\sum_{\ell=1}^r \alpha_{\ell}(X)}$ ($X \in \mathfrak{b}$) と定める. 全ての B の実 1 次元表現はこの形に書ける. 領域 $\mathcal{D}$ 上の正值函数 $P_{\underline{\sigma}}: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ を $P_{\underline{\sigma}}(b \cdot z_0) := \chi_{\underline{\sigma}}(b)$ ($b \in B$) によって定義すると, $\chi_{\underline{\sigma}/2}$ は $P_{\underline{\sigma}}$ と整合する正則マルチプライヤである.

補題 6. 任意の $\underline{\sigma} \in \mathbb{R}^r$ に対し, 次の条件を満たす函数 $K_{\underline{\sigma}}: \mathcal{D} \times \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{C}$ が唯一つ存在する:

(K1) $K_{\underline{\sigma}}(z, z')$ は $z \in \mathcal{D}$ について正則で, $z' \in \mathcal{D}$ については反正則.

(K2) $K_{\underline{\sigma}}(z, z) = P_{\underline{\sigma}}(z)$ ($z \in \mathcal{D}$).

定理 5 のルート空間分解から次のように定数 $p_{\ell}, q_{\ell}, b_{\ell}$ ($\ell = 1, \dots, r$) を定める:

$$p_{\ell} := \sum_{i < \ell} \dim \mathfrak{b}_{(\alpha_{\ell} - \alpha_i)/2}, \quad q_{\ell} := \sum_{\ell' > \ell} \dim \mathfrak{b}_{(\alpha_{\ell'} - \alpha_{\ell})/2}, \quad b_{\ell} := (\dim \mathfrak{b}_{\alpha_{\ell}/2})/2.$$

定理 7. (i) 重み $P_{\underline{\sigma}}(z)\varphi_{\mathcal{D}}(z) = P_{\underline{\sigma}}(z)K_{\mathcal{D}}(z, z)$ のベルグマン空間 $L_{hol}^2(\mathcal{D}, P_{\underline{\sigma}}\varphi_{\mathcal{D}})$ が $\{0\}$ でない必要十分条件は

$$\sigma_{\ell} > 1 + p_{\ell} + b_{\ell} + q_{\ell}/2 \quad (\ell = 1, \dots, r).$$

(ii) (i) のもとで重み $P_{\underline{\sigma}}\varphi_{\mathcal{D}}$ のベルグマン核は次のように表される:

$$K_{\mathcal{D}, P_{\underline{\sigma}}\varphi_{\mathcal{D}}}(z, z') = C_{\mathcal{D}} \prod_{\ell=1}^r (\sigma_{\ell} - 1 - p_{\ell} - b_{\ell} - q_{\ell}/2)_{1+p_{\ell}+b_{\ell}} K_{\underline{\sigma}}(z, z') \quad (z, z' \in \mathcal{D}).$$

ただし $C_{\mathcal{D}}$ は $\underline{\sigma}$ に依らず $\mathcal{D}$ のみから定まる定数である.

定理 7 の (i) は Rossi-Vergne [16] の結果であり ([13] も参照), (ii) は [3] の積分計算を [6] で示された諸公式を用いて実行することによって得られる. さて

$$b_{\mathcal{D}}(\underline{\sigma}) := C_{\mathcal{D}} \prod_{\ell=1}^r (\sigma_{\ell} - 1 - p_{\ell} - b_{\ell} - q_{\ell})_{1+p_{\ell}+b_{\ell}}$$

とおくと, これは $\underline{\sigma} \in \mathbb{R}^r$ に関する多項式で, その次数 $\sum_{\ell=1}^r (1 + p_{\ell} + b_{\ell})$ は $\mathcal{D}$ の複素次元 n に等しい.

3.3. パラメータ $\underline{\sigma} \in \mathbb{R}_{>0}^r$ と $\underline{\tau} = (\tau_1, \dots, \tau_r) \in \mathbb{R}^r$ をとり, 2.3 節の議論を $P = P_{\underline{\sigma}}$, $Q = P_{\underline{\tau}} \varphi_{\mathcal{D}}$ の場合に適用する. 正則マルチプライヤ $\det J(b, z)^{-1}$ は $\varphi_{\mathcal{D}}(z) = K_{\mathcal{D}}(z, z)$ に整合するから, $\mu(b, z) := \chi_{\underline{\sigma}/2}(b)$ および $\nu(b, z) := \chi_{\underline{\tau}/2}(b) \det J(b, z)$ が, それぞれ P と Q に整合する. 他方, Hartogs 領域 $\hat{\mathcal{D}}(m, P)$ への $B \times U(m)$ の作用について, $\det J((b, A), (z, \zeta)) = \mu(b, z)^m \det J(b, z) \det A$ だから, 表現 $T_{\tilde{\nu}}^{B \times U(m)}$ は

$$\begin{aligned} T_{\tilde{\nu}}^{B \times U(m)}(b, A) F(z, \zeta) &= \chi_{-(m\underline{\sigma} + \underline{\tau})/2}(b) (\det A)^{-1} F(b^{-1}z, \chi_{-\underline{\sigma}}(b) A^{-1} \zeta) \\ &((b, A) \in B \times U(m), F \in L_{hol}^2(\hat{\mathcal{D}}(m, P), \tilde{Q}_{\beta})) \end{aligned}$$

と表される.

定理 8. (i) もし実数 s が条件

$$\tau_{\ell} + s\sigma_{\ell} > 1 + p_{\ell} + b_{\ell} + q_{\ell}/2 \quad (\ell = 1, \dots, r)$$

をみたすならば,

$$b(s) := b_{\mathcal{D}}(\underline{\tau} + s\underline{\sigma}), \quad H(z, z') := K_{\underline{\tau}}(z, z'), \quad K(z, z') := K_{\underline{\sigma}}(z, z')$$

とすることで (3) が成り立つ.

(ii) もし $\underline{\tau}$ と $\underline{\sigma}$ が条件

$$\tau_{\ell} + m\sigma_{\ell} > 1 + p_{\ell} + b_{\ell} + q_{\ell}/2 \quad (\ell = 1, \dots, r) \quad (8)$$

をみたすならば, (i) と同じ $b(s)$, $H(z, z')$, $K(z, z')$ と全ての (z, ζ) , $(z', \zeta') \in \hat{\mathcal{D}}(m, P)$ について (6) が成り立つ. すなわち

$$\begin{aligned} K_{\hat{\mathcal{D}}(m, P), \tilde{Q}_{\beta}}((z, \zeta), (z', \zeta')) &= \frac{(\beta + 1)_m}{\pi^m} K_{\underline{\tau} + m\underline{\sigma}}(z, z') \\ &\times b_{\underline{\tau}, \underline{\sigma}} \left(t \frac{d}{dt} + m \right) \left[(1 - t)^{-\beta - m - 1} \right]_{t=K_{\underline{\sigma}}(z, z')(\zeta|\zeta')}, \end{aligned} \quad (9)$$

ただし $b_{\underline{\tau}, \underline{\sigma}}(s) := b_{\mathcal{D}}(\underline{\tau} + s\underline{\sigma})$.

Hartogs 領域 $\hat{\mathcal{D}}(m, P_{\underline{\sigma}})$ を定めるパラメータ $\underline{\sigma} \in \mathbb{R}_{>0}^r$ を固定し, パラメータ $\underline{\tau} \in \mathbb{R}^r$ を動かして, 様々な重み関数 $\tilde{Q}_{\beta}(z, \zeta) = P_{\underline{\tau}}(z)(1 - \|\zeta\|^2/P_{\underline{\sigma}}(z))$ ($(z, \zeta) \in \hat{\mathcal{D}}(m, P_{\underline{\sigma}})$) を考える. 定理 8 により, 重み $\tilde{Q}_{\beta}$ のベルグマン核が (9) なる表示式をもつが, (9) の右辺は (8) を満たさない τ についても意味をもつ. この状況において, 正則離散系列表現の解析接続 ([17, 18]) に相当するものを考えたい. 領域 $\mathcal{D}$ の Gindiki-Wallach 集合 $\mathfrak{X} \subset \mathbb{R}^r$ を次のように定める ([7, 8]): 離散パラメータ $\underline{\varepsilon} := (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r) \in \{0, 1\}^r$ に対し, $q_{\ell}(\underline{\varepsilon}) := \sum_{\ell' > \ell} \varepsilon_{\ell'} \dim \mathfrak{b}_{(\alpha_{\ell'} - \alpha_{\ell})/2}$ ($\ell = 1, \dots, r$) とおき,

$$\mathfrak{X}(\underline{\varepsilon}) := \{ \underline{\tau} \in \mathbb{R}^r ; \tau_{\ell} > q_{\ell}(\underline{\varepsilon})/2 \text{ (if } \varepsilon_{\ell} = 1), \quad \tau_{\ell} = q_{\ell}(\underline{\varepsilon})/2 \text{ (if } \varepsilon_{\ell} = 0) \}$$

かつ $\mathfrak{X} := \bigsqcup_{\underline{\varepsilon} \in \{0,1\}^r} \mathfrak{X}(\underline{\varepsilon})$ とおく.

定理 9 ([7, 8]). 領域 $\mathcal{D}$ 上の核関数 $K_{\underline{\tau}}$ を再生核とするようなヒルベルト空間 $\mathcal{H}_{\underline{\tau}}(\mathcal{D}) \subset \mathcal{O}(\mathcal{D})$ が存在する必要十分条件は $\underline{\tau} \in \mathfrak{X}$ である. この条件のもとで $\mathcal{H}_{\underline{\tau}}(\mathcal{D})$ 上には B の既約ユニタリ表現 $T_{\underline{\tau}}^B$ が

$$T_{\underline{\tau}}^B(b)F(z) := \chi_{-\underline{\tau}/2}(b)F(b^{-1} \cdot z) \quad (b \in B, z \in \mathcal{D})$$

によって定義される.

定理 4 と定理 8 および定理 9 を組み合わせて次を得る:

定理 10. Hartogs 領域 $\hat{\mathcal{D}}(m, P_{\underline{\sigma}})$ 上の, (9) の右辺 として定義される核関数 $\tilde{K}_{\underline{\tau}, \underline{\sigma}}((z, \zeta), (z', \zeta'))$ を再生核とするヒルベルト空間 $\mathcal{H}_{\underline{\tau}}(\hat{\mathcal{D}}(m, P_{\underline{\sigma}}))$ が存在する必要十分条件は, 全ての $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対して

$$b_{\mathcal{D}}(\underline{\tau} + (k+m)\underline{\sigma}) = 0,$$

または

$$b_{\mathcal{D}}(\underline{\tau} + (k+m)\underline{\sigma}) > 0 \text{ かつ } \underline{\tau} + (k+m)\underline{\sigma} \in \mathfrak{X}$$

が成り立つことである. この条件のもとで $B \times U(m)$ のユニタリ表現 $T_{\underline{\tau}, \underline{\sigma}}^{B \times U(m)}$ が $\mathcal{H}_{\underline{\tau}}(\hat{\mathcal{D}}(m, P_{\underline{\sigma}}))$ 上で

$$\begin{aligned} T_{\underline{\tau}, \underline{\sigma}}^{B \times U(m)}(b, A) F(z, \zeta) &= \chi_{-(m\underline{\sigma} + \underline{\tau})/2}(b)(\det A)^{-1} F(b^{-1}z, \chi_{-\underline{\sigma}}(b)A^{-1}\zeta) \\ &((b, A) \in B \times U(m), F \in \mathcal{H}_{\underline{\tau}}(\hat{\mathcal{D}}(m, P_{\underline{\sigma}})), \tilde{Q}_{\beta}) \end{aligned}$$

によって定義され, その既約分解は

$$T_{\underline{\tau}, \underline{\sigma}}^{G \times U(m)} = \sum_{k \geq 0, b_{\mathcal{D}}(\underline{\tau} + (k+m)\underline{\sigma}) > 0}^{\oplus} (T_{\underline{\tau} + (k+m)\underline{\sigma}}^B, \mathcal{H}_{\underline{\tau} + (k+m)\underline{\sigma}}(\mathcal{D})) \otimes (T^{U(m)}, \text{Pol}_{k, \beta}(\mathbb{B}_m))$$

で与えられる.

References

- [1] H. Ahn, J. Byun and J.-D. Park, *Automorphisms of the Hartogs type domains over classical symmetric domains*, Internat. J. Math. **23** (2012), no. 9, 1250098, 11 pp.
- [2] B. Bargmann, *On a Hilbert space of analytic functions and an associated integral transform I*, Comm. Pure Appl. Math. **14** (1961), 187–214.
- [3] D. Békollé and A. T. Kagou, *Reproducing properties and L^p -estimates for Bergman projections in Siegel domains of type II*, Studia. Math. **115** (1995), 219–239.
- [4] B. L. Chalmers, *On boundary behavior of the Bergman kernel function and related domain functionals*, Pacific J. Math. **29** (1969), 243–250.
- [5] J. P. D’Angelo, *An explicit computation of the Bergman kernel function*, J. Geom. Anal. **4** (1994), 23–34.
- [6] S. G. Gindikin, *Analysis in homogeneous domains*, Russian Math. Surveys. **19** (1964) 1–89.
- [7] H. Ishi, *Representations of the affine transformation groups acting simply transitively on homogeneous Siegel domains*, J. Funct. Anal. **167** (1999), 425–462.
- [8] —, *Unitary holomorphic multiplier representations over a homogeneous bounded domain*, Adv. Pure Appl. Math. **2** (2011), 405–419.
- [9] —, *The unitary representations parametrized by the Wallach set for a homogeneous bounded domain*, Adv. Pure Appl. Math. **4** (2013), 93–102.
- [10] H. Ishi, J.-D. Park, and A. Yamamori, *Bergman kernel functions for Hartogs domains over bounded homogeneous domains*, submitted.
- [11] S. Kobayashi, *Irreducibility of certain unitary representations*, J. Math. Soc. Japan **20** (1968), 638–642.
- [12] E. Ligocka, *Forelli-Rudin constructions and weighted Bergman projections*, Studia Math. **94** (1989), 257–272.

- [13] A. Loi and R. Mossa, *Berezin quantization of homogeneous bounded domains*, Geom. Dedicata **161** (2012), 119–128.
- [14] A. Loi and M. Zedda, *Balanced metrics on Cartan and Cartan-Hartogs domains*, Math. Z. **270** (2012), 1077–1087.
- [15] I. I. Piatetskii-Shapiro, “Automorphic functions and the geometry of classical domains,” Gordon and Breach, New York, 1969.
- [16] H. Rossi and M. Vergne, *Representations of certain solvable Lie groups on Hilbert spaces of holomorphic functions and the application to the holomorphic discrete series of a semisimple Lie group*, J. Funct. Anal., **13** (1973), 324–389.
- [17] M. Vergne and H. Rossi, *Analytic continuation of the holomorphic discrete series of a semi-simple Lie group*, Acta Math. **136** (1976), 1–59.
- [18] N. R. Wallach, *The analytic continuation of the discrete series I, II*, Trans. Amer. Math. Soc. **251** (1979), 1–17, 19–37.
- [19] A. Yamamori, *A remark on the Bergman kernels of the Cartan-Hartogs domains*, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I **350** (2012), 157–160.
- [20] —, *The Bergman kernel of the Fock-Bargmann-Hartogs domain and the polylogarithm function*, Complex Var. Elliptic Equ. **58** (2013), 783–793.
- [21] W. Yin, K. Lu, and G. Roos, *New classes of domains with explicit Bergman kernel*, Sci. China Ser. A **47** (2004), 352–371.