

等質錐の基本相対不変式の指数とその応用

九州大学大学院・数理学研究院 中島 秀斗^{*1} (Hideto NAKASHIMA)
Faculty of Mathematics,
Kyushu University

序文

等質錐は実数における正の数という概念を多次元化したものであり、基本相対不変式と呼ばれる既約多項式たちの正值集合として実現される．この相対不変式は等質錐に単純推移的に作用する分裂可解 Lie 群に関して相対不変になっており、対応する有理指標は等質錐の構造情報を用いて決定されるということが昨年講演者により示された (cf. [8])．本稿ではこの結果を用いることにより、Ishi–Nomura [5] の結果の一般化や、等質錐上の相対不変多項式の Laplace 変換が具体的に記述されることを紹介する．またその双対錐の有理指標の情報を合わせて考えることにより、対称錐の特徴付けが得られることも紹介する．

1 等質錐

V を有限次元実ベクトル空間とし、 $\Omega \subset V$ を直線を含まない開凸錐とする． Ω を不変にする $GL(V)$ の部分群 $G(\Omega) = \{g \in GL(V); g(\Omega) = \Omega\}$ は $GL(V)$ の閉部分群となり、したがって線型 Lie 群となる．この $G(\Omega)$ が Ω に推移的に作用するとき、開凸錐 Ω は等質であるという．本稿では Ω は常に等質な開凸錐であると仮定し、以後単に等質錐と呼ぶ．Vinberg [13] にあるように、 $G(\Omega)$ の部分 Lie 群 H で、分裂可解であって Ω に単純推移的に作用するものが存在する． H に対応する Lie 環を $\mathfrak{h}$ とし、 $e_0 \in \Omega$ を一つ取り固定する．このとき軌道写像 $h \mapsto he_0$ を H の単位元において微分することにより、線型同型 $\mathfrak{h} \ni X \mapsto Xe_0 \in V$ を得る．この写像の逆写像を $L: V \ni x \mapsto L_x \in \mathfrak{h}$ で表し、 V に

^{*1} h-nakashima@math.kyushu-u.ac.jp

積 $\triangle$ を

$$x \triangle y := L_x y \quad (x, y \in V)$$

により定義する．すると $(V, \triangle)$ は一般には非可換かつ非結合的な代数となるが，単位元 e_0 を持つ．さらに次の性質を満たす：

$$(VA1) \quad L_x \triangle y - y \triangle x = L_x L_y - L_y L_x \quad (x, y \in V),$$

(VA2) ある V 上の線型写像 s に対して， $\langle x|y \rangle := s(x \triangle y)$ は V の内積を定める，

(VA3) 線型作用素 L_x ($x \in V$) の固有値はすべて実である．

本稿では， $(V, \triangle)$ を Vinberg 代数^{*2}と呼ぶ．また (VA2) を満たす線型写像 s を認容線型形式といい，本稿においては V の内積 $\langle \cdot | \cdot \rangle$ は認容線型形式によって与えられていると仮定する． $\mathfrak{h}$ に対する $[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}]$ の余次元を r とすると， r 個の原始冪等元 $c_1, \dots, c_r$ で $e_0 = c_1 + \dots + c_r$ を満たすものが存在する．この r を等質錐の階数といい，原始冪等元の系 $c_1, \dots, c_r$ を Vinberg 枠と呼ぶ． $V_{jj} := \mathbb{R}c_j$ ($j = 1, \dots, r$) とおき，積 $\triangle$ に関する右乗法作用素 $R_x y = y \triangle x$ ($x, y \in V$) および $y = \sum_{i=1}^r y_i c_i$ を用いて，

$$V_{kj} := \left\{ x \in V; L_y x = \frac{y_j + y_k}{2} x, R_y x = y_j x \right\} \quad (1 \leq j < k \leq r)$$

とすれば， V は以下のように直和分解される：

$$V = \bigoplus_{1 \leq j \leq k \leq r} V_{kj}.$$

この分解を V の正規分解といい，次のような乗法則を満たす：

$$(1.1) \quad \begin{aligned} V_{ji} \triangle V_{lk} &= \{0\} \quad (\text{if } i \neq k, l), \quad V_{kj} \triangle V_{ji} \subset V_{ki}, \\ V_{ji} \triangle V_{ki} &\subset V_{jk} \text{ or } V_{kj} \quad (\text{according to } j \geq k \text{ or } j \leq k). \end{aligned}$$

内積 $\langle \cdot | \cdot \rangle$ を通して V の部分集合 Ω^* を

$$\Omega^* := \{x \in V; \langle x|y \rangle > 0 \text{ for all } y \in \overline{\Omega} \setminus \{0\}\}$$

により定義すると Ω^* は開凸錐になる．ここで H の V 上への作用を ρ で表し， V 上の線型変換 ρ^* を以下の等式を満たすものとして定義する：

$$\langle \rho(h)x | \rho^*(h)y \rangle = \langle x|y \rangle \quad (h \in H, x, y \in V).$$

すると ρ^* は H の有理表現となり， ρ の反傾表現と呼ぶ．このとき H は ρ^* により Ω^* に単純推移的に作用する．したがって Ω^* は等質錐となり，これを Ω の双対錐と呼ぶ．

^{*2} Vinberg [13] や Ishi [4] で扱われている clan と同じもの．

2 基本相対不変式

Ishi [4] にあるように, 任意の $h \in H$ は $h_i \in \mathbb{R}^+$ ($i = 1, \dots, r$) と $v_j \in \bigoplus_{k>j} V_{kj}$ ($j = 1, \dots, r-1$) を用いて

$$h = (\exp T_1)(\exp L_{v_1})(\exp T_2) \cdots (\exp L_{v_{r-1}})(\exp T_r), \quad T_i := (2 \log h_i) L_{c_i}$$

と書ける. このとき H の有理指標 $\chi: H \rightarrow \mathbb{R}$ は, ある $\underline{\nu} = (\nu_1, \dots, \nu_r) \in \mathbb{R}^r$ を用いて

$$\chi(h) = \chi_{\underline{\nu}}(h) := (h_1)^{2\nu_1} \cdots (h_r)^{2\nu_r} \quad (h \in H)$$

のように表現される. さて Ω 上の関数 f が H に関して相対不変であるとは, H 上のある有理指標 $\chi_{\underline{\nu}}$ ($\underline{\nu} \in \mathbb{R}^r$) が存在して $f(\rho(h)x) = \chi_{\underline{\nu}}(h)f(x)$ ($h \in H, x \in \Omega$) が成り立つことと定義し, この $\underline{\nu}$ を相対不変関数 f の指数という. 等質錐 Ω 上の H -相対不変な既約多項式は丁度 r 個存在し, 任意の H -相対不変な多項式はそれらのべき積で表される (cf. Ishi [4]). すなわちその既約多項式を $\Delta_1(x), \dots, \Delta_r(x)$ と書けば, 任意の H -相対不変多項式 $p(x)$ は

$$p(x) = (\text{const.}) \Delta_1(x)^{m_1} \cdots \Delta_r(x)^{m_r} \quad (x \in V; m_1, \dots, m_r \in \mathbb{Z}_{\geq 0})$$

と書ける. さらに Ω はそれらの正值集合として表される (cf. [5]):

$$\Omega = \{x \in V; \Delta_1(x) > 0, \dots, \Delta_r(x) > 0\}.$$

この既約多項式 $\Delta_1(x), \dots, \Delta_r(x)$ を等質錐 Ω の基本相対不変式と呼ぶ. $\Delta_j(x)$ の指数を $\underline{\sigma}_j = (\sigma_{j1}, \dots, \sigma_{jr})$ とするとき, それらを並べて得られる r 次の正方行列

$$\sigma = \begin{pmatrix} \underline{\sigma}_1 \\ \vdots \\ \underline{\sigma}_r \end{pmatrix} = (\sigma_{jk})_{1 \leq j, k \leq r}$$

を等質錐 Ω の指数行列と呼ぶ. Ishi [4] で与えられている基本相対不変式の構成法に従って基本相対不変式の順番を決めることにすれば, σ は下三角行列でその対角成分はすべて 1 となる. 以後 Ω の基本相対不変式はこの順番で並んでいるとする. 指数行列は以下のアルゴリズムによって計算される (cf. [8]). 簡単のため $d_{kj} := \dim \mathcal{V}_{kj}$ ($1 \leq j < k \leq r$) とおき, $i = 1, \dots, r-1$ に対して, $d_i := {}^t(0, \dots, 0, d_{i+1,i}, \dots, d_{ri})$ とする. このとき, 各

i 列ごとに $l_i^{(j)} = {}^t(l_{1i}^{(j)}, \dots, l_{ri}^{(j)})$ ($j = i, \dots, r$) を帰納的に次のように定義する:

$$\begin{cases} l_i^{(i)} &= d_i, \\ l_i^{(k+1)} &= \begin{cases} l_i^{(k)} - d_{k+1} & (l_{ki}^{(k)} > 0), \\ l_i^{(k)} & (l_{ki}^{(k)} = 0). \end{cases} \end{cases}$$

さらに, $\varepsilon^{[i]} = {}^t(\varepsilon_{i+1,i}, \dots, \varepsilon_{ri}) \in \{0, 1\}^{r-i}$ を

$$\varepsilon_{ji} = \begin{cases} 1 & (\text{if } l_{ji}^{(j)} > 0), \\ 0 & (\text{if } l_{ji}^{(j)} = 0) \end{cases} \quad (j = i+1, \dots, r)$$

により定義すると, 指数行列 σ は

$$(2.1) \quad \sigma = \mathcal{E}_{r-1} \mathcal{E}_{r-2} \cdots \mathcal{E}_1, \quad \mathcal{E}_i = \begin{pmatrix} I_{i-1} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \varepsilon^{[i]} & I_{r-i} \end{pmatrix} \quad (i = 1, \dots, r-1)$$

で与えられる. 特に $\sigma^{-1} = (\sigma^{jk})$ のように表せば, $\sigma^{ji} = -\varepsilon_{ji}$ ($i < j$) である.

双対錐 Ω^* 上の関数 f^* については, 作用が反傾的であることを踏まえて, f^* が H -相対不変であるということを H のある有理表現 χ_μ ($\mu \in \mathbb{R}^r$) が存在して任意の $h \in H$ に対して $f^*(\rho^*(h)y) = \chi_\mu^{-1}(h)f^*(y)$ ($y \in \Omega^*$) を満たすことと定義し, この μ を Ω^* の相対不変関数 f^* の指数と呼ぶ. さて Ω と同様に, Ω^* の基本相対不変式 $\Delta_1^*(y), \dots, \Delta_r^*(y)$ の指数を $\underline{\sigma}^* = (\sigma_{j1}^*, \dots, \sigma_{jr}^*)$ とし, それらを並べ指数行列 $\sigma_* = (\sigma_{jk}^*)_{1 \leq j, k \leq r}$ を構成する. ここで H が反傾的に作用しているので, $\Delta_1^*(y), \dots, \Delta_r^*(y)$ の順番を Vinberg 枠に従って決めることにより, σ_* を上三角行列にすることができる. 以後 $\Delta_1^*(y), \dots, \Delta_r^*(y)$ はこの順番で並んでいるとする.

例 2.1. V を以下のような 5 次元の実ベクトル空間とする:

$$V := \left\{ x = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_4 \\ x_2 & x_3 & 0 \\ x_4 & 0 & x_5 \end{pmatrix}; x_1, \dots, x_5 \in \mathbb{R} \right\}.$$

$x, y \in V$ に対して, $\Delta_i(x)$ および $\Delta_i^*(y)$ ($i = 1, 2, 3$) を

$$(2.2) \quad \begin{aligned} \Delta_1(x) &= x_1, & \Delta_2(x) &= x_1x_3 - x_2^2, & \Delta_3(x) &= x_1x_5 - x_4^2, \\ \Delta_1^*(y) &= y_1y_3y_5 - y_3y_4^2 - y_5y_2^2, & \Delta_2^*(y) &= y_3, & \Delta_3^*(y) &= y_5 \end{aligned}$$

により定義し, さらに $\Omega, \Omega^* \subset V$ を

$$\Omega := \{x \in V; \Delta_i(x) > 0 \ (i = 1, 2, 3)\}, \quad \Omega^* := \{y \in V; \Delta_i^*(y) > 0 \ (i = 1, 2, 3)\}$$

により定義する．このとき Ω は等質錐となり， Ω^* はその双対錐となる．これらは非対称な等質錐としては最低次元のものであり，特に Ω は Vinberg 錐と呼ばれる．各 $\Delta_i(x)$ は Ω の基本相対不変式となり，また $\Delta_i^*(y)$ は Ω^* の基本相対不変式となるので， Ω および Ω^* の指数行列 σ, σ_* はそれぞれ以下ようになる：

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3 指数行列の応用

$\Omega \subset V$ を等質錐とし，前節までの記号を踏襲する．[8] において指数行列の計算アルゴリズムが与えられたことにより，相対不変式に関する多くのものが具体的に表せるようになった．本節ではその応用例を挙げる．ここで $m_j := \sum_{k>j} \dim V_{kj}$, $p_k := \sum_{j<k} \dim V_{kj}$ とおき， $\underline{m} = (m_1, \dots, m_r)$ とする．また $\underline{\nu}, \underline{\mu} \in \mathbb{Z}^r$ に対して，

$$\Delta^{\underline{\nu}}(x) := \Delta_1(x)^{\nu_1} \cdots \Delta_r(x)^{\nu_r}, \quad \Delta_*^{\underline{\mu}}(y) := \Delta_1^*(y)^{\mu_1} \cdots \Delta_r^*(y)^{\mu_r} \quad (x \in \Omega, y \in \Omega^*)$$

により定義すると， $\Delta^{\underline{\nu}}(x)$ は Ω 上の， $\Delta_*^{\underline{\mu}}(y)$ は Ω^* 上の H -相対不変関数であり，特に $\underline{\nu}, \underline{\mu} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^r$ ならば多項式となる．

3.1 Basic index. Ω に対応する Vinberg 代数 (V, Δ) の右乗法作用素の行列式 $\text{Det } R_x$ は H -相対不変な多項式となる (cf. Nomura [12, Lemma 2.7]) ので，ある非負整数 $n_1, \dots, n_r$ を用いて

$$\text{Det } R_x = \Delta_1(x)^{n_1} \cdots \Delta_r(x)^{n_r} \quad (x \in V)$$

と表せる．この $\underline{n} := (n_1, \dots, n_r)$ を等質錐 Ω の basic index と呼ぶ (cf. [8])．Ishi–Nomura [5] により $n_j \geq 1$ となることが示されており，また Ω が対称であるときは $\underline{n} = (d, \dots, d, 1)$ となることも Nakashima–Nomura [10] において示されている．ここで $d = \dim V_{kj}$ は非対角成分の共通次元である．一般の等質錐に対しては，basic index $\underline{n}$ は以下のように計算される．

定理 3.1 ([8, Theorem 6.5]). $\underline{1} := (1, \dots, 1) \in \mathbb{R}^r$ とおけば， $\underline{n} = (\underline{1} + \underline{m})\sigma^{-1}$.

証明. 作用する群が分裂可解であるので，対角成分 $x = x_1 c_1 + \cdots + x_r c_r$ についての作用を調べればよい． $y \in V$ を $y = \sum_j y_j c_j + \sum_{j<k} y_{kj}$ と正規分解したとき，乗法則 (1.1)

より

$$R_x y = \sum_{j=1}^r x_j y_j c_j + \sum_{j < k} x_j y_{k_j}$$

であるので ,

$$\text{Det } R_x = \prod_{j=1}^r x_j^{1+\sum_{k>j} \dim V_{k_j}} = \prod_{j=1}^r x_j^{1+m_j}.$$

これより $\text{Det } R_x$ の指数は $\underline{1} + \underline{m}$ であり , よって $\underline{n} = (\underline{1} + \underline{m})\sigma^{-1}$ を得る . $\square$

3.2 Ishi–Nomura の結果の一般化 . W を V の複素化とし , $T_\Omega := \Omega + iV$ を Siegel 右半平面とする . Ω の基本相対不変式 $\Delta_1, \dots, \Delta_r$ を W 上へ複素正則に拡張し , 同じ記号で表す . ここで Ω が対称錐であるならば , Ishi–Nomura [5] において , 任意の $w \in T_\Omega$ に対して

$$\text{Re} \frac{\Delta_j(w)}{\Delta_{j-1}(w)} > 0 \quad (j = 1, \dots, r; \Delta_0(w) := 0)$$

が成り立つことが示されていた . $\underline{e}_j$ を第 j 成分が 1 である基本ベクトルとすれば , これは次のように一般の等質錐の場合へ拡張される .

定理 3.2 ([9]). $w \in T_\Omega$ ならば , 任意の $j = 1, \dots, r$ に対して次が成り立つ:

$$\text{Re} \Delta^{\underline{e}_j \sigma^{-1}}(w) > 0.$$

証明. 基本相対不変式の零点集合を $\mathcal{S} := \{w \in W; \Delta_j(w) = 0 \text{ for some } j\}$ とおく . また $H_{\mathbb{C}}$ を H の複素化とし , $N_{\mathbb{C}}$ をその冪零部分群とする . Ishi–Nomura [5] において ,

- (1) $w \in W \setminus \mathcal{S}$ に対して , ある $n \in N_{\mathbb{C}}$ と $\alpha_1(w), \dots, \alpha_r(w) \in \mathbb{C}^\times$ が唯一つ存在し , $w = n \cdot (\alpha_1(w)c_1 + \dots + \alpha_r(w)c_r)$ を満たす ,
- (2) $w \in T_\Omega$ ならば , $\text{Re} \alpha_j(w) > 0$ ($j = 1, \dots, r$) を満たす ,

ことが示されている . 簡単のため $\alpha^{\underline{s}}(w) := \alpha_1(w)^{s_1} \dots \alpha_r(w)^{s_r}$ ($w \in W \setminus \mathcal{S}$) とおく . 相対不変式は $N_{\mathbb{C}}$ の作用で不変なので , (1) より $\Delta_j(w) = \alpha^{\underline{e}_j}(w)$ ($w \in W \setminus \mathcal{S}$) を満たし ,

$$\Delta^{\underline{\nu}}(w) = \alpha^{\underline{\nu}\sigma}(w) \quad (w \in W \setminus \mathcal{S})$$

が成り立つ . ここで $\underline{\nu} = \underline{e}_j \sigma^{-1}$ とすれば $\alpha_j(w) = \Delta^{\underline{e}_j \sigma^{-1}}(w)$ となるので , (2) より定理を得る . $\square$

3.3 Laplace 変換 等質錐 Ω 上の H -不変測度を $d\mu(x)$ で表し, 指数 $\underline{s} \in \mathbb{R}^r$ を持つ Ω 上の相対不変関数を $\Delta_{\underline{s}}(x)$ ($x \in \Omega$) とする. このとき Ω のガンマ関数

$$\Gamma_{\Omega}(\underline{s}) := \int_{\Omega} e^{-\langle x | e_0 \rangle} \Delta_{\underline{s}}(x) d\mu(x)$$

を用いて, 等質錐の Laplace 変換 $\mathcal{L}$ を

$$(3.1) \quad \mathcal{L}[\Delta_{\underline{s}}](y) := \frac{1}{\Gamma_{\Omega}(\underline{s})} \int_{\Omega} e^{-\langle x | y \rangle} \Delta_{\underline{s}}(x) d\mu(x)$$

により定義する (cf. Gindikin [3]). これらの積分は共に $s_k > p_k/2$ のとき, そしてそのときに限り収束する. [3] にあるように, 積分 (3.1) は

$$(3.2) \quad \mathcal{L}[\Delta_{\underline{s}}](y) = \frac{1}{\Delta_{\underline{s}}^*(y)} \quad (y \in \Omega^*)$$

と計算される. ただし $\Delta_{\underline{s}}^*(y)$ ($y \in \Omega^*$) は指数 $\underline{s}$ を持つ Ω^* の H -相対不変関数である. ここで $\Delta^{\underline{\nu}}(x)$ は指数 $\underline{\nu}\sigma$ を持つ Ω の H -相対不変な有理関数であり, $\Delta_{\mu}^{\underline{\mu}}(y)$ は指数 $\underline{\mu}\sigma_*$ を持つ Ω^* の H -相対不変な有理関数であるので, 式 (3.2) と合わせると次の定理が成り立つ.

定理 3.3. $\underline{\nu} \in \mathbb{Z}^r$ が $(\underline{\nu}\sigma)_k > p_k/2$ を満たしているならば, 次が成り立つ:

$$\mathcal{L}[\Delta^{\underline{\nu}}](y) = \frac{1}{\Delta_{\mu}^{\underline{\nu}\sigma\sigma_*^{-1}}(y)} \quad (y \in \Omega^*).$$

3.4 一般化された b -関数 本小節では, V の内積は認容線型形式 $s_0(x) = \sum_j x_j$ から得られるものと仮定する. Ω 上の H -相対不変式 $f(x) = \Delta^{\underline{\nu}}(x)$ ($\underline{\nu} \in \mathbb{Z}^r$) に対して, Ω^* 上の H -相対不変式 f^* を $f^*(y) := \Delta_{\mu}^{\underline{\nu}\sigma\sigma_*^{-1}}(y)$ により定義すると, f および f^* は同じ指数を持つ. ここで $\underline{\nu}' := \underline{\nu}\sigma\sigma_*^{-1} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^r$ ならば $f^*(y)$ は多項式となり, 以後これを仮定する. また多項式 $p(x)$ に対して, 微分作用素 $p(D_x)$ を $p(D_x)e^{\langle x | y \rangle} = p(y)e^{\langle x | y \rangle}$ を満たすものとして定義すれば, f^* は多項式であるので $f^*(D_x)$ が定義されるが, このとき $f^*(D_x)f(x)^{s+1}$ と $f(x)^s$ は同じ指数を持つ Ω 上の H -相対不変式となる. したがって

$$f^*(D_x)f(x)^{s+1} = b(s)f(x)^s \quad (x \in \Omega)$$

を満たす s の関数 $b(s)$ が存在し, この $b(s)$ を $f(x)$ の一般化された b -関数と呼ぶ. ここで $f^*(y)$ が多項式であるとき, $f(x)$ は一般には多項式にはならないことに注意する.

定理 3.4. $\underline{\gamma} := \underline{\nu}\sigma$ とし, $\tilde{m}_j := 1 + m_j/2$ とおく. このとき,

$$(3.3) \quad b(s) = \prod_{j=1}^r \prod_{k=0}^{\gamma_j-1} (\gamma_j s + \tilde{m}_j + k).$$

証明. Gindikin [3, §3] より, $s\gamma_j < -m_j/2$ のとき

$$b(s) = (-1)^{|\underline{\gamma}|} \frac{\Gamma_{\Omega^*}(-s\underline{\gamma})}{\Gamma_{\Omega^*}(-(s+1)\underline{\gamma})}$$

となる. ここで $\Gamma_{\Omega^*}(\underline{\mu})$ は双対錐 Ω^* のガンマ関数であり,

$$\Gamma_{\Omega^*}(\underline{\mu}) = \frac{\pi^{(\dim V - r)/2}}{2^r} \prod_{j=1}^r \Gamma\left(\mu_j - \frac{m_j}{2}\right)$$

を満たす. ガンマ関数の等式 $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$ を用いると $s\gamma_j < -m_j/2$ における式 (3.3) を得るが, これは整関数であるので, 結局任意の s に対して成立する. $\square$

4 対称錐の特徴付け

前節までの記号をそのまま用いる. 対称錐は, 例えば Riemann 対称空間の典型例を与えているなど数学の多くの分野に現れる. したがって何らかの条件により, 等質錐のクラスにおいて対称錐を特徴付けることは意義深い. Yamasaki [14] において, 基本相対不変式の次数を用いた対称錐の特徴付けが得られている (定理 4.1 の 2 を参照). その特徴付けには等質錐だけではなくその双対錐に情報も合わせて考えており, 等質錐を扱う際には, 同時にその双対錐も扱うことが自然であるということの表れである. 基本相対不変式の次数は, それに対応する指数の成分の和として得られるため, 指数行列を用いた対称錐の特徴付けが得られることが期待される. それは実際, 次のような形で与えられる.

定理 4.1. Ω を既約な等質錐とする. このとき, 以下は同値.

1. Ω は対称である.
2. $\{\deg \Delta_1, \dots, \deg \Delta_r\} = \{\deg \Delta_1^*, \dots, \deg \Delta_r^*\} = \{1, \dots, r\}$.
3. $\sigma^{-1} + \sigma_*^{-1}$ は A 型の Cartan 行列である.
4. 任意の $w \in \Omega + iV$ および $w^* \in \Omega^* + iV$ に対して,

$$\operatorname{Re} \frac{\Delta_j(w)}{\Delta_{j-1}(w)} > 0, \quad \operatorname{Re} \frac{\Delta_{j+1}^*(w^*)}{\Delta_j^*(w^*)} > 0 \quad (j = 1, \dots, r).$$

ただし $\Delta_0(w) = \Delta_{r+1}^*(w^*) = 1$ とおいた.

注意 4.2. 1 と 2 の同値性は Yamasaki [14] による . また 1 と 3,4 の同値性は [9] による .

定理 4.1 にあるように , 対称錐の指数行列には A 型の Cartan 行列が隠れている . 一方で , 対称錐は Hermite 型の単純 Lie 環から導出される Riemann 対称空間であるが , それは A 型の単純 Lie 環を半単純部分に持つ簡約実 Lie 群の開軌道として次のように構成される . $\mathfrak{g}$ を Hermite 型の単純 Lie 環とし , $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ と Cartan 分解する . ここで , $\mathfrak{k}$ の極大コンパクト部分は 1 次元の中心を持つ . $\mathfrak{k}$ の中心の元 z_0 を , $\text{ad}(z_0)$ の固有値が $\sqrt{-1}, 0, -\sqrt{-1}$ となるように選び , $\mathfrak{g}$ の複素化 $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ をその固有空間分解を用いて

$$\mathfrak{g}^{\mathbb{C}} = \mathfrak{p}^+ \oplus \mathfrak{k}^{\mathbb{C}} \oplus \mathfrak{p}^-$$

と分解する . $\mathfrak{h}^{\mathbb{C}}$ を $\mathfrak{k}^{\mathbb{C}}$ の Cartan 部分環とすると , これは同時に $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ の Cartan 部分環となる . $\Delta = \Delta(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}, \mathfrak{h}^{\mathbb{C}}) = \Delta_{\mathfrak{p}^+} \cup \Delta_{\mathfrak{k}^{\mathbb{C}}} \cup \Delta_{\mathfrak{p}^-}$ をそのルート系として , さらに極大強直交ルート系 $\{\gamma_1, \dots, \gamma_r\} \subset \Delta_{\mathfrak{p}^+}$ を適当に取る . $e_j \in \mathfrak{p}_{\gamma_j}^+$ を $[[e_j, e_j^*], e_j] = 2e_j$ を満たすものとし ,

$$e := \sum_{j=1}^r e_j \in \mathfrak{p}^+, \quad h := \sum_{j=1}^r [e_j, e_j^*] \in \mathfrak{h}^{\mathbb{C}}$$

とおけば , $\text{ad}(h)|_{\mathfrak{p}^+}$ の固有値は 2 または 1 である . ここで

$$\mathfrak{p}_t^+ := \{x \in \mathfrak{p}^+; [h, x] = 2x\}, \quad \mathfrak{p}_t^- := (\mathfrak{p}_t^+)^*, \quad \mathfrak{k}_t^{\mathbb{C}} := [\mathfrak{p}_t^+, \mathfrak{p}_t^-]$$

とおき , さらにこれらを用いて

$$\mathfrak{g}_t^{\mathbb{C}} := \mathfrak{p}_t^+ \oplus \mathfrak{k}_t^{\mathbb{C}} \oplus \mathfrak{p}_t^-, \quad \mathfrak{g}_t := \mathfrak{g}_t^{\mathbb{C}} \cap \mathfrak{g}$$

とする . また Cayley 変換 c を用いて $\mathfrak{l} := c(\mathfrak{g}_t) \cap \mathfrak{k}_t^{\mathbb{C}}$ とし , $\mathfrak{l}$ に対応する連結 Lie 群を L で表せば , その開軌道 $\Omega := \text{Ad}(L)e \subset \mathfrak{p}_t^+ \cap c(\mathfrak{g}_t)$ は対称錐をなす .

Hermite 型の単純 Lie 環は既に分類されている (cf. Knapp [7, Chapter VII, §9]) . 以下の表に各対称錐に対応する情報を記述している . ここで Σ は単純 Lie 環 $[\mathfrak{l}, \mathfrak{l}]$ のルート系であり , また指数行列 σ および σ_* に対して $C := \sigma^{-1} + \sigma_*^{-1}$ とおいた .

Ω	$\mathfrak{g}$	$\mathfrak{g}_t$	$\mathfrak{l}$	Σ	C
$\text{Sym}(r, \mathbb{R})^+$	$\mathfrak{sp}(r, \mathbb{R})$	$\mathfrak{sp}(r, \mathbb{R})$	$\mathbb{R} \oplus \mathfrak{sl}(r, \mathbb{R})$	A_{r-1}	A_r
$\text{Herm}(r, \mathbb{C})^+$	$\mathfrak{su}(q, r)$	$\mathfrak{su}(r, r)$	$\mathbb{R} \oplus \mathfrak{sl}(r, \mathbb{C})$	A_{r-1}	A_r
$\text{Herm}(r, \mathbb{H})^+$	$\mathfrak{so}^*(4r)$	$\mathfrak{so}^*(4r)$	$\mathbb{R} \oplus \mathfrak{sl}(r, \mathbb{H})$	A_{r-1}	A_r
$\mathbb{R}_+^{1, n-1}$	$\mathfrak{so}(2, n)$	$\mathfrak{so}(2, n)$	$\mathbb{R} \oplus \mathfrak{so}(1, n-1)$	$B_1(\cong A_1)$	A_2
$\mathbb{R}_+^{1, 7}$	$\mathfrak{e}_{6(-14)}$	$\mathfrak{so}(2, 8)$	$\mathbb{R} \oplus \mathfrak{so}(1, 7)$	$B_1(\cong A_1)$	A_2
$\text{Herm}(3, \mathbb{O})^+$	$\mathfrak{e}_{7(-25)}$	$\mathfrak{e}_{7(-25)}$	$\mathbb{R} \oplus \mathfrak{e}_{6(-26)}$	A_2	A_3

参考文献

- [1] P. Etingof, D. Kazhdan and A. Polishchuk, *When is the Fourier transform of an elementary function elementary?*, Sel. math., New ser. **8** (2002), 27–66.
- [2] J. Faraut and A. Korányi, “Analysis on symmetric cones”, Clarendon Press, Oxford, 1994.
- [3] S. G. Gindikin, *Analysis in homogeneous domains*, Russian Math. Surveys **19** (1964), 1–89.
- [4] H. Ishi, *Basic relative invariants associated to homogeneous cones and applications*, J. Lie Theory, **11** (2001), 155–171.
- [5] H. Ishi and T. Nomura, *Tube domain and an orbit of a complex triangular group*, Math. Z., **259** (2008), 697–711.
- [6] T. Kimura, “Introduction to prehomogeneous vector spaces”, Transl. Math. Monogr., Amer. Math. Soc., Providence, RI, **215**, (2002).
- [7] A. W. Knap, “Lie groups beyond an introduction”, 2nd ed., Progress in Math. **140**, Birkhäuser, 2002.
- [8] H. Nakashima, *Basic relative invariants of homogeneous cones*, Journal of Lie Theory **24** (2014), 1013–1032.
- [9] H. Nakashima, *Characterization of symmetric cones by means of the basic relative invariants*, submitted.
- [10] H. Nakashima and T. Nomura, *Clans defined by representations of Euclidean Jordan algebras and the associated basic relative invariants*, Kyushu J. Math. **67** (2013), 163–202.
- [11] R. Nakahama, *Norm computation and analytic continuation of vector-valued holomorphic discrete series representations*, 表現論シンポジウム講演集 (2014), 17–28.
- [12] T. Nomura, *On Penny’s Cayley transform of a homogeneous Siegel domain*, J. Lie Theory **11** (2001), 185–206.
- [13] E. B. Vinberg, *The theory of convex homogeneous cones*, Trans. Moscow Math. Soc., **12** (1963), 340–403.
- [14] T. Yamasaki, *Studies on homogeneous cones and the basic relative invariants through skeleton*, Doctoral thesis admitted to Kyushu university (2014)