

New Definition of Generalized Root Systems

Hiroyuki Yamane

Department of Mathematics, Faculty of Science, University of Toyama, Gofuku 3190, Toyama-shi, Toyama, 930-8555, Japan,

hiroyuki@sci.u-toyama.ac.jp

Abstract. [4] で generalized root systems の新しい集合論的な定義を与えた。それを解説する。

1 Generalized root systems

$x, y \in \mathbb{R}$ に対して $J_{x,y} := \{n \in \mathbb{Z} | x \leq n \leq y\}$, $J_{x,\infty} := \{n \in \mathbb{Z} | n \geq x\}$, $J_{-\infty,x} := \{n \in \mathbb{Z} | n \leq x\}$ とおく。 $\mathbb{N} = J_{1,\infty}$ である。 $\mathbb{Z}_{\geq 0} := J_{0,\infty}$ とおく。 集合 X の濃度を $|X|$ で表す。

I を空でない有限集合とする。 V を $|I|$ -次元 $\mathbb{R}$ -線形空間とする。 $\emptyset \neq X \subset V$ に対して $\emptyset \neq Y \in \mathbb{R}$, $YX := \{\sum_{k=1}^n y_k x_k \in V | n \in \mathbb{N}, x_k \in X, y_k \in Y (k \in J_{1,n})\}$ とおく。 R を V の $0 \notin R$ かつ $\mathbb{R}R = V$ をみたす空でない部分集合とする。 B を R の部分集合とする。 $R_B^+ := (\mathbb{Z}_{\geq 0}B) \cap R$ とおく。 B が R の *base* であるとは $|B| = |I|$ かつ $R = R_B^+ \cup -R_B^+$ であり、全ての $\alpha \in B$ に対して $\{\alpha, -\alpha\} = \mathbb{R}\alpha \cap R$ を満たすときにいう。 $\tilde{\mathbb{B}}$ を R の全ての *base* のなす集合とする。 $\mathbb{B}$ を $\tilde{\mathbb{B}}$ の空でない部分集合とする。 $(R, \mathbb{B})$ が *generalized root system* であるとは

$$\forall B \in \mathbb{B}, \forall \alpha \in B, \exists \tau_\alpha^B(B) \in \mathbb{B} \quad \text{s.t.} \quad R_{\tau_\alpha^B(B)}^+ \cap (-R_B^+) = \{-\alpha\}.$$

を満たすときにいう。 $(R, \mathbb{B})$ が generalized root system であるならば $(R, \{-B \mid B \in \mathbb{B}\})$ も generalized root system である。

$(R, \mathbb{B})$ を generalized root system とする。 $B \in \mathbb{B}$ とする。 $\alpha \in B$ とする。このとき $N_{\alpha, \beta}^B \in \mathbb{Z}$ ($\beta \in B$) で

$$\tau_{\alpha}^B(B) = \{ \beta + N_{\alpha, \beta}^B \alpha \mid \beta \in B \},$$

となるものが存在する。

$$N_{\alpha, \alpha}^B = -2 \quad \text{かつ} \quad N_{\alpha, \beta}^B \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \quad (\beta \in B \setminus \{\alpha\}).$$

が成り立つ。 $\beta \in B$ に対して $\tau_{\alpha}^B(\beta) := \beta + N_{\alpha, \beta}^B \alpha$ とおく。

$N_{\tau_{\alpha}^B(\alpha), \tau_{\alpha}^B(\beta)}^{\tau_{\alpha}^B(B)} = N_{\alpha, \beta}^B$ かつ $\tau_{-\alpha}^{\tau_{\alpha}^B(B)}(\tau_{\alpha}^B(\beta)) = \beta$ が成り立つ。

いまから generalized root system $(R, \mathbb{B})$ を固定する。generalized root systems の一般論から $B, B' \in \mathbb{B}$ に対して $m := |R_{B'}^+ \cap (-R_B^+)| < \infty$ とすると m はある $B_1 := B, B_u \in \mathbb{B}$ ($u \in J_{2, x-1}$), $\beta_y \in B_y$ ($y \in J_{1, x-1}$), $B_{z+1} = \tau_{\beta_z}^{B_z}(B_z)$ ($z \in J_{1, x-2}$) があって $B' = \tau_{\beta_{x-1}}^{B_{x-1}} \cdots \tau_{\beta_2}^{B_2} \tau_{\beta_1}^{B_1}(B)$ をみたす最小の x に等しい。特に全射 $\hat{\alpha}^B : I \rightarrow B$ ($B \in \mathbb{B}$) で $\tau_{\hat{\alpha}^B(i)}^B(\hat{\alpha}^B(j)) = \hat{\alpha}^{B'}(j)$ ($B \in \mathbb{B}, i, j \in I$), (ここで $B' := \tau_{\hat{\alpha}^B(i)}^B(B)$) となるものがある。

いまからある $\delta \in R$ と $\mathbb{Z}R$ の有限部分集合 X で $R \subset X + \mathbb{Z}\delta$ となるものが存在すると仮定する。

もし $|R| = \infty$ かつ $\mathbb{B} \neq \tilde{\mathbb{B}}$ であるならば $(R, \mathbb{B})$ を *affine generalized root system* とよぶ。

V^* を V の双対空間とする。

Lemma 1.1. $\{\gamma_t \mid t \in J_{1, |I|}\}$ を $\mathbb{Z}R$ の $\mathbb{Z}$ -基で $\delta \in \mathbb{Z}\gamma_{|I|}$ をみたすものとする。このときある $g \in V^*$ で $0 < g(\gamma_1) < \min\{|g(\beta)| \mid \beta \in R \setminus \{\pm\gamma_1\}\}$ をみたすものが存在する。

Proof. $k \in J_{2,\infty}$ を

$$R \subset \left\{ \sum_{t=1}^{|I|} x_t \gamma_t \mid x_s \in J_{-k,k} (s \in J_{1,|I|-1}), x_{|I|} \in \mathbb{Z} \right\}$$

をみたすものとする。 $g \in V^*$ を $g(\gamma_t) := (2k)^{t-1}$ ($t \in J_{1,|I|}$) により定義する。 $g(\gamma_1) = 1 > 0$ である。

$\beta = \sum_{t=1}^{|I|} x_t \gamma_t \in R \setminus \{\pm \gamma_1\}$ ($x_t \in \mathbb{Z}$) とおく。 $p := \max\{t \in J_{1,|I|} \mid x_t \neq 0\}$ とおく。このとき次の等式を得る。

$$\begin{aligned} |g(\beta)| &= \left| \sum_{t=1}^p x_t (2k)^{t-1} \right| \\ &\geq |x_p (2k)^{p-1}| - \left| \sum_{t=1}^{p-1} x_t (2k)^{t-1} \right| \\ &\geq |x_p| (2k)^{p-1} - \sum_{t=1}^{p-1} k (2k)^{t-1} \\ &= |x_p| (2k)^{p-1} - k \cdot \frac{(2k)^{p-1} - 1}{2k-1} \\ &= \frac{(2k)^{p-1} (|x_p| (2k-1) - k) + k}{2k-1}. \end{aligned}$$

$p = 1$ のとき、 $|x_p| \geq 2$ より $|g(\beta)| \geq \frac{(2(2k-1)-k)+k}{2k-1} = 2 > 1 = g(\gamma_1)$ が成り立つ。 $p \geq 2$ のとき、 $|x_p| \geq 1$ より $|g(\beta)| \geq \frac{2k((2k-1)-k)+k}{2k-1} = k > 1 = g(\gamma_1)$ が成り立つ。
□

$g \in V^*$ に対して $R^{+,g} := \{\alpha \in R \mid g(\alpha) > 0\}$ とおく。

Lemma 1.2. (1) $g \in V^*$ を $0 \notin g(R)$ となるものとする。このときある $B \in \mathbb{B}$ で R_B^+ または $-R_B^+$ が $\{\alpha \in R \mid g(\alpha) > 0\}$ に等しいものが存在する。

(2) $|R| < \infty$ ならば $\mathbb{B} = \tilde{\mathbb{B}}$ である。 $B \in \mathbb{B}$ に対して、もし $|R| = \infty$, $\mathbb{B} \neq \tilde{\mathbb{B}}$ および $\delta \in R_B^+$ であるならば $\mathbb{B} = \{B' \in \tilde{\mathbb{B}} \mid |R_B^+ \cap (-R_{B'}^+)| < \infty\} = \{B' \in \tilde{\mathbb{B}} \mid \delta \in R_{B'}^+\}$,

$$(1.1) \quad \tilde{\mathbb{B}} = \mathbb{B} \cup (-\mathbb{B})$$

および $\mathbb{B} \cap (-\mathbb{B}) = \emptyset$ が成り立つ; ここで $-\mathbb{B} = \{-B' \mid B' \in \mathbb{B}\}$ である。

Proof. (1) $g(\delta) > 0$ と仮定してよい。ある $m \in \mathbb{N}$ で $R^{+,g} \subset \bigcup_{m'=-m}^{\infty} m'\delta + X$ となるものがある。 $B' \in \mathbb{B}$ とする。 $\delta \in R_{B'}^+$ と仮定する。ある $n \in \mathbb{N}$ で

$$R_{B'}^+ \subset \bigcup_{n'=-n}^{\infty} n'\delta + (-X)$$

となるものがある。このとき $R^{+,g} \cap (-R_{B'}^+) \subseteq \sum_{k=-m}^n (k\delta + X)$ が成り立つ。ゆえに $p := |R^{+,g} \cap (-R_{B'}^+)| < \infty$ が成り立つ。 $p = 0$ ならば $R^{+,g} = R_{B'}^+$ であるので B' がもとめるものである。 $p > 0$ と仮定する。 $\beta \in B'$ で $|R^{+,g} \cap (-R_{\tau_{\beta}^{B'}(B')}^+)| = p - 1$ となるものがある。帰納法より主張を得る。 $-\delta \in R_{B'}^+$ のときも同様である。

(2) (1) と同様。 □

Lemma 1.3. (1) $|R| < \infty$, (*resp.* $|R| = \infty$) であるならば、各 $\alpha \in R$ (*resp.* $\alpha \in R \setminus \mathbb{R}\delta$) に対して $\alpha \in B$ となる $B \in \mathbb{B}$ が存在する。

(2) $|R| = \infty$ のとき、全ての $B \in \tilde{\mathbb{B}}$ は $\delta \notin B$ を満たす。

(3) $\gamma \in \mathbb{Z}R \setminus (\bigcup_{\alpha \in R} \mathbb{Z}\alpha)$ とする。このとき $B \in \mathbb{B}$ で $\gamma \notin \mathbb{Z}_{\geq 0}B \cup (-\mathbb{Z}_{\geq 0}B)$ となるものがある。

2 Lemma 1.3 の応用

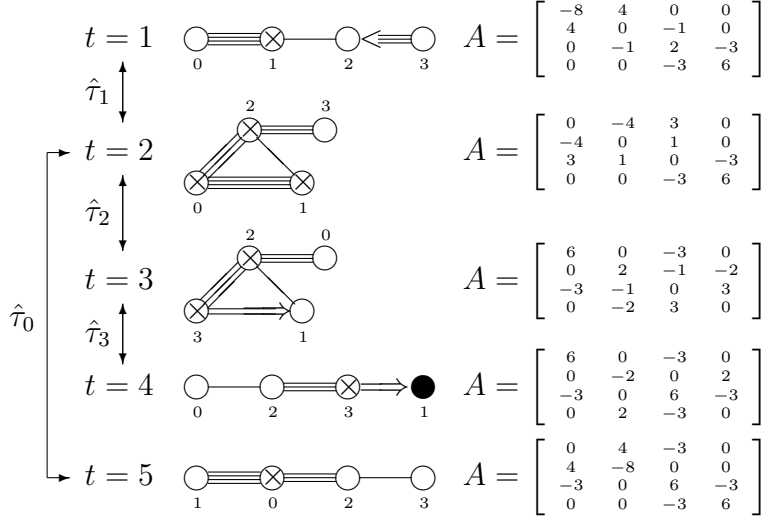


Figure 1. Dynkin diagrams of the affine Lie superalgebras $G^{(1)}(3)$.

$\mathfrak{g}^{(t)}$ ($1 \leq t \leq 5$) を Figure 1 の affine Lie superalgebra とする。

$\hat{R}_{\text{cl}}^{(1),+} := \{\sum_{i=1}^3 x_i \alpha_i | (x_1, x_2, x_3) = (1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 1, 1), (1, 2, 1), (1, 3, 1), (1, 3, 2), (1, 4, 2), (2, 4, 2), (0, 0, 1), (0, 1, 1), (0, 3, 2), (0, 2, 1), (0, 3, 1), (0, 1, 0)\} \subset \mathbb{Z}_{\geq 0} \alpha_1 \oplus \mathbb{Z}_{\geq 0} \alpha_2 \oplus \mathbb{Z}_{\geq 0} \alpha_3$ とおく。 $\hat{R}' := \{y\delta + z\beta | y \in \mathbb{Z}, z \in \{-1, 1\}, \beta \in \hat{R}_{\text{cl}}^{(1),+}\}$, $\hat{R} := \hat{R}' \cup \{r\delta | r \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\} \subset \mathbb{Z}_{\geq 0} \alpha_1 \oplus \mathbb{Z}_{\geq 0} \alpha_2 \oplus \mathbb{Z}_{\geq 0} \alpha_3 \oplus \mathbb{Z}_{\geq 0} \delta$ とおく。

$$(2.1) \quad \hat{R} \cup \{0\} = \{\alpha | \mathfrak{g}_{\alpha}^{(1)} \neq \{0\}\}$$

が成り立つ。 $\hat{R}^{\natural} := (\hat{R}' \setminus \{2\alpha | \alpha \in \hat{R}'\}) \cup \{-\delta, \delta\}$ とおく。 $\mathbb{B}$ を $\delta \in (\hat{R}^{\natural})_B^+$ となる $\hat{R}^{\natural}$ の base の集合とする。

Theorem 2.1. $(\hat{R}^{\natural}, \mathbb{B})$ は *generalized root system* である。

Theorem 2.2. $\mathfrak{g}^{(1)}$ の生成元 H_i, E_i, F_i ($0 \leq i \leq 3$) に対して $\mathfrak{g}^{(1)}$ の定義関係式は以下で与えられる。

(S^(t)1)

$$[H_i, H_j] = 0, [H_i, E_j] = a_{ij}E_j, [H_i, F_j] = -a_{ij}F_j, \\ [E_i, F_j] = \delta_{ij}H_i.$$

(S^(t)2) 以下の (S^(t)2 - 1)-(S^(t)2 - 8)。 $E_{ij} := [E_i, E_j]$ とお
き $E_{i_1 i_2 \dots i_x} := [E_{i_1}, E_{i_2 \dots i_x}]$ とおく。

(S^(t)2 - 1) $E_{i \dots ij} = 0$ (i は $N_{ij}^{(t)} + 1$ -回あらわれる)
($i \neq j$ のとき)

(S^(t)2 - 2) $E_{ii} = 0$ ($a_{ii}^{(t)} = 0$)

(S^(t)2 - 3) $E_{ijik} = 0$ ($i \neq j \neq k \neq i$, $a_{ii}^{(t)} = a_{jk}^{(t)} = 0$,
 $a_{ij}^{(t)} = -a_{ik}^{(t)} \neq 0$ のとき)

(S^(t)2-4) $(-1)^{p_i^{(t)} p_k^{(t)}} a_{ik}^{(t)} E_{ijk} = (-1)^{p_j^{(t)} p_k^{(t)}} a_{jk}^{(t)} E_{jik}$ ($a_{ij}^{(t)} \neq$
 0 , $a_{ik}^{(t)} \neq 0$, $a_{jk}^{(t)} \neq 0$, $a_{ij}^{(t)} + a_{ik}^{(t)} + a_{jk}^{(t)} = 0$, $(-1)^{p_i^{(t)} p_j^{(t)} + p_i^{(t)} p_k^{(t)} + p_j^{(t)} p_k^{(t)}} =$
 -1 のとき)

(S^(t)2 - 5) $E_{21212123} = 0$ ($t = 2$ のとき)

(S^(t)2 - 6) $E_{31132} = E_{13132}$ ($t = 4$ のとき)

(S^(t)2 - 7) $2E_{213210} = 3E_{123210}$ ($t = 1$ のとき)

(S^(t)2 - 8) $E_{020102010201023} = 0$ ($t = 5$ のとき)

(S^(t)3) E_i を F_i で置き換えた (S^(t)2) 同じ等式。

References

- [1] S. Azam, H. Yamane, M. Yousofzadeh, Classification of Finite Dimensional Irreducible Representations of Generalized Quantum Groups via Weyl Groupoids. *Publ. Res. Inst. Math. Sci.* **51** (2015), no. 1, 59–130.
- [2] M. Cuntz and I. Heckenberger, Weyl groupoids with at most three objects, *J. Pure Appl. Algebra* 213 (2009), no. 6, 1112–1128.
- [3] I. Heckenberger and H. Yamane, A generalization of Coxeter groups, root systems, and Matsumoto’s theorem. *Math. Z.* 259 (2008), 255–276.
- [4] H. Yamane, Generalized root systems and the affine Lie superalgebra $G^{(1)}(3)$, *Sao Paulo Journal of Mathematical Sciences*, (September 2015) DOI 10.1007/s40863-015-0021-5
- [5] V.G. Kac, Lie superalgebras, *Advances in Math.* **26** (1977), no. 1, 8–96.
- [6] ———, *Infinite-dimensional Lie Algebras*, 3rd ed., Cambridge University Press, 1990.
- [7] H. Yamane, Universal R -matrices for quantum groups associated to simple Lie superalgebras, *Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci.* **67** (1991), no. 4, 108–112.
- [8] ———, Quantized enveloping algebras associated with simple Lie superalgebras and their universal R -matrices, *Publ. Res. Inst. Math. Sci.* **30** (1994), no. 3, 15–87.
- [9] ———, A Serre type theorem for affine Lie superalgebras and their quantized enveloping superalgebras, *Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci.* **70** (1994), no. 1, 31–36.
- [10] ———, On defining relations of affine Lie superalgebras and affine quantized universal enveloping superalgebras, *Publ. RIMS Kyoto Univ.* 35 (1999), no. 3, 321–390.
- [11] ———, Errata to: “On defining relations of affine Lie superalgebras and affine quantized universal enveloping superalgebras”, *Publ. Res. Inst. Math. Sci.* **37** (2001), no. 4, 615–619.