

CG 映像制作におけるリー理論

落合 啓之 (九州大学)*

この講演では、Computer Graphics(CG)、特に CG を使った映像制作を数学から研究した事例について、いくつかの経験談を交えつつ、お話ししたいと思います。これは、エベレスト登山記のような冒険談ではなく、シンガポール 3 泊 4 日の旅のように、話を聞いた人が自分も行ってみようかなと思えるような話です、そのようにお話しできればと思います。

この研究は、JST CREST(西浦総括)の安生チームとして 2010 年から始めたものです。それまで私は、CG を使った映画などを見たことはあるものの、では、CG というものがどんなものなのか、CG を使って映像を作るとはどんなことなのか、CG の研究とは何なのか、私には何もわかっていませんでした。その辺りから、始めてみましょう。

1. CG とは何か

CG という用語は何となくイメージは湧くと思いますが、実はどういう意味で使われているのかを整理させてください。

1.1.

まず、CG と画像解析と画像処理という用語を比較します [19]。

- CG：入力記述、出力が画像
- 画像解析：入力が画像、出力が記述
- 画像処理：入力も出力も画像

CG と画像処理はこの面では、互いに逆向きです。

1.2.

次に、CG の制作プロセスの一つの段階であるレンダリングと computer vision を比較します [18]。

- CG(レンダリング)：3D から 2D へ。実空間では 撮影 にあたる。
- CV(computer vision)：2D から 3D へ：3 次元再構成 [19]。コンピュータに視覚を持たせる。

これも、互いに逆向きの関係です。

1.3.

実写と、いわゆる CG との違いです。

- 写真、実写映像：実在する対象から画像を得る。
- CG, CGI(computer generated image)：画像生成のアルゴリズムなどの手順から画像を生成する。

本研究は JST CREST, ならびに科研費(課題番号:26610026,15H03613)の助成を受けたものである。

* 〒819-0395 福岡市西区元岡 744 九州大学 マス・フォア・インダストリ研究所/JST CREST

e-mail: ochiai@imi.kyushu-u.ac.jp

web: <http://user.math.kyushu-u.ac.jp/index.php?ochiai>

1.4.

また、画像の動きを表わす用語として、アニメーションとフライトシミュレーションがあります。

- アニメーション：表現意図を効果的に表わす、ものの動きを効果的に見せる
- (フライト) シミュレーション：事象を正確に再現、現実の動きを忠実に再現

1.5.

- セルアニメーション
- CG アニメーション

どちらも、1秒間に24枚(映画), 30枚(テレビ)を表示します。仮現運動(apparent motion)によって、絵が途切れず動いているように見えます。

1.6.

デジタル映像制作に必要な技術は

- 表現技術：伝えたい内容を観客に正しく伝える技術
- 制作技術：必要とする映像を作り出す技術

CGは後者を担います。前者は実写映像のなかで培われて来たものです。

1.7.

可視化はCGの応用のひとつです。

- 可視化 (データ可視化)：CGを利用して対象データを視覚的に観察する。
- Scientific visualization：科学技術データの可視化 (たとえば、オゾンホール、内視鏡)
- $n(>3)$ 次元のデータの可視化

1.8.

3DCGは、分け方にもよりますが、

- モデリング
- マテリアル (質感)
- アニメーション
- レンダリング (シーン構築)

などのたくさんの工程を経て作られます。

2. アニメーションの話題から

キーフレーム法 (あるいは in-between) はアニメーションを作る伝統的な方法のひとつです。いわば、マンガからアニメを作るプロセスです。これに関係するひとつの研究を紹介します。

2.1. ARAP(=As-rigid-as-possible)

3 角形が 2 つ与えられたときにそれを何らかの方法で補間する問題を考えましょう。

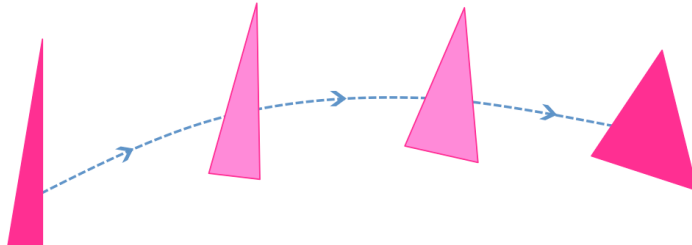


図 1: 2 つの 3 角形をつなぐ変形

もちろん、この問題に対する回答は無限にたくさんあります。そして、どれが良い、という一義的なモノサシはありません。こういう設定の問題は自由度が多すぎて、何からどう考えれば良いのか当初は考えづらく思いました。一つのヒントは現場にありました。CGの現場ではとにかく一つの絵を納期までに作る必要があります、何らかの制約や手法を一つ与えて解を与えます。動きが気に入らなければ、とりあえず作ったものを最悪の場合は、1/24 秒ごとに、一コマ一コマ、手作業で作れば絵はできます。これを、手間、品質など「何らかの意味で」改良できるか、と考えます。

少し記号を使うことにしましょう。スタートとゴールの 3 頂点の座標値をそれぞれ、 $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$ ならびに $(x'_1, y'_1), (x'_2, y'_2), (x'_3, y'_3)$ とします。もっとも広く使われる近似は線形補間です。すなわち、時刻 t ($0 \leq t \leq 1$) における頂点の座標をそれぞれ、 $((1-t)x_i + tx'_i, (1-t)y_i + y'_i)$ ($i = 1, 2, 3$) とするものです。これがすべてのスタート地点です。動きが微小である場合、精度が必要とならない場合など、これで十分である場合はたくさんあります。おまけにとっても高速です。

ただ、一般には、補間の途中で形が縮む（面積が小さくなる）という不具合に気がつきます。形のゆがみや大きさの変化があまり大きくならないようにという希望を叶える方法の一つとして提唱されたのが、ARAP です [2]. この方法のポイント [9], [3] は、

- 座標値などをそのまま補間するのではなく、線型変換を補間すること。
- 行列の分解を利用すること [15], [1]。
- リー群とリー環の間の指数写像とその逆写像である対数写像を使うこと。

すなわち、次のような事実を利用しています。

Lemma 1 一般線形群 $GL(2, \mathbf{R})$ の 2 次元座標平面 $\mathbf{R}^2$ への自然な作用から誘導される作用によって、 $GL(2, \mathbf{R})$ は「平面上の三角形で重心が原点となるものの全体」に単純推移的に作用する。

Lemma 2 2 次元アフィン変換群 $\text{Aff}(2, \mathbf{R})$ は平面上の三角形全体に単純推移的に作用する。

ただしここでは、三角形の頂点にABCなどと名前をつけて、形が同じでも頂点の名前を入れ替えたものを区別して扱います。モジュライ空間などで、全体構造を簡単にするために、トッピング（ビザやカレーの用語）を乗せるのです。これらの事実によって、三角形全体を群の主等質空間と見なし、群の中での補間の問題と問題を言い換えます。そして、次に極分解を使います。 $\text{Sym}^+(n)$ を正定値対称行列の全体、 $GL^+(n, \mathbf{R})$ を一般線形群の単位元連結性分、すなわち、 $\{A \in M(n, \mathbf{R}) \mid \det(A) > 0\}$ とし、 $SO(n)$ を特殊直交群とすると、

Lemma 3 行列の積が与える写像 $SO(n) \times \text{Sym}^+(n) \rightarrow GL^+(n, \mathbf{R})$ は、解析的多様体としての同型を与える。特に全単射である。

Lemma 4 アフィン変換群は一般線形群と平行移動のなす群 $\mathbf{R}^n$ との半直積である。

これらを使うと ARAP による補間を説明することができます。手順を書きます。

- スタートの三角形をゴールの三角形に写すアフィン変換を $\hat{A}$ とする。
- $\hat{A}$ の一般線形群成分を A とし、平行移動成分を $\mathbf{b}$ とする。
- 極分解で $A = RS$ と分ける。 $R \in O(2), S \in \text{Sym}^+(2, \mathbf{R})$ である。
- スタートとゴールの三角形が裏返られなかったとする。このとき $R \in SO(2)$ であり、ある角度 θ ($-\pi < \theta \leq \pi$) を使って $R = R_\theta$ と回転行列で書ける。
- つまり、 $\boxed{\text{ゴールの三角形}} = R_\theta S \boxed{\text{スタートの三角形}} + \mathbf{b}$ となった。
- (ここまではまだ補間していない。) ここで、 $\theta, S, \mathbf{b}$ を線形補間する。すなわち、 $\boxed{\text{時刻 } t \text{ の三角形}} = R_{t\theta}((1-t)I_2 + tS) \boxed{\text{スタートの三角形}} + t\mathbf{b}$ とする。

以上が、ARAP補間の定義です。

これで何も問題はないのですが、もし外挿しようとする、すなわち、 $0 \leq t \leq 1$ を越えて $t \in \mathbf{R}$ へ延長しようとする、対称行列のところの正值性が崩れて、一般には $((1-t)I_2 + tS)$ は可逆な行列ではなくなり、そのとき三角形はつぶれてしまいます。これを避けるには、リー環からの指数写像を使えば良い、というのが我々が普通に気がつく処方箋です。すなわち、対称行列のなす線形空間からの指数写像 $\exp: \text{Sym}(n, \mathbf{R}) \rightarrow \text{Sym}^+(n, \mathbf{R})$ は多様体としての解析的同型を与えます。特に全単射です。したがって、 $S = \exp(Y)$ と $Y \in \text{Sym}(n, \mathbf{R})$ を用いて表示できます。ついでに回転行列の方もそのように書けば、 $R = R_\theta = \exp(\theta J)$ と書けるわけです。この表示、すなわち、

$$\boxed{\text{ゴールの三角形}} = \exp(\theta J) \exp(Y) \boxed{\text{スタートの三角形}} + \mathbf{b}$$

から始めると、補間の別の候補として

$$\boxed{\text{時刻 } t \text{ の三角形}} = \exp(t\theta J) \exp(tY) \boxed{\text{スタートの三角形}} + t\mathbf{b}$$

を与えることができます [9]。これは外挿にも安定です。

以上のように、我々はリー群の構造に関して基本的な知識を持っているので、なぜ、CG研究者が提唱するやり方がうまく行くのかという理由を簡潔に与えることができ、また理由が判ればそれを利用して拡張することもできます。例えば、リー環は線形空間

ですから線形補間が当然うまく行きます。リー群は線形空間ではないので、入れ物の空間の線形構造を利用して線形補間すればたいはいははみ出してしまいます。 $GL^+(2, \mathbf{R})$

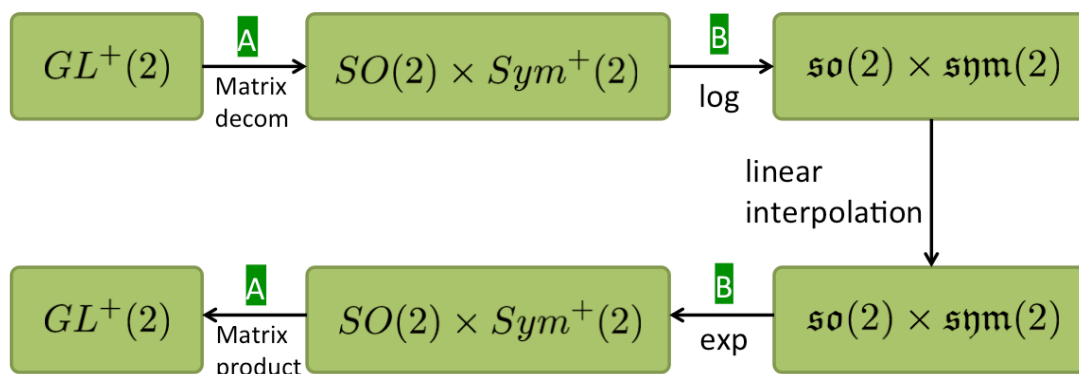


図 2: 2D Deformation via Log-Exp 補間による変形

で指数写像が使えるれば物事はもっと簡単なのでしょうが、指数写像は全射ではないので、素朴にはうまく行かないため工夫が必要です。工夫の一つの方法が極分解です。分解したそれぞれでは、指数写像は全射であり、うまく補間することができます。この分析は、リー群の他の分解、例えば KAK 分解の利用を示唆します。実際、いまの ARAP あるいは改良版 ARAP では、スタートとゴールを入れ替えたとき、アニメーションは逆回しになりませんが、 KAK 分解を使えば、逆回しになるような、すなわち、逆行列の補間が補間の逆行列になるようなものを与えることができます。さらに、このような理解をしておけば、2D から 3D への拡張も自然に着想することができます [8]. この辺り、数学的にもまだまだいろいろな問題があるように思います [7], [10].

以上のようにひとつひとつの 3 三角形をつなぐことができたなら、これをまとめて、3 三角形分割されてトポロジーが同じ図形の間を変形して行く写像の族を、適当なエネルギー関数を定義して、その関数の最小値問題の解として見つけます。図3の上段の変形のようにばらばらになっている線型変換を、下段の変形のようにつなげて行きます。

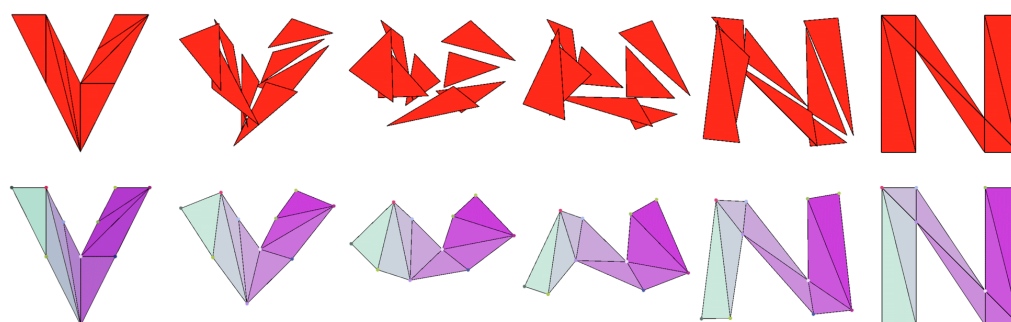


図 3: 局所最適補間をつないで大域的な変形を作る

2.2. 四元数

CGを少しかじったことがあるならご存知かもしれませんが、CGでは意外に四元数が使われるので驚きました。もちろん、絶対値が1の四元数(unit quaternion)の全体がリー群として $Sp(1) \cong SU(2)$ であること、そしてそれが $SO(3)$ の2重被覆群 $Spin(3)$ と同型であることが登場頻度の高い原因です。非可換な数体系というのは馴染みがない感じを受けますが、計算が早く、しかも安定。いずれは、誤差付きの代数群という概念を数学的に定式化すると面白いと思いますが、まだそういう段階にないので、四元数は活用されています [5]。例えばSLERP (spherical linear interpolation) も、結局は、 $SO(3)$ から $Sp(1)$ へ持ち上げ、指数写像の逆写像でリー環に写してから、リー環内での等速直線運動（線形補間）を四元数で書いていると解釈できます。（解説記事は例えば [14]。）

四元数だけだと回転しかできませんが、平行移動もできるように拡張したものが双四元数 (dual quaternion) です [11], [12]。さらにこれらを拡張した Clifford 代数、あるいは、別名を幾何代数 (geometric algebra) といったものも最近では使われています。ロボティクスにも多くの文献があります。特に、符号を $(1,4)$ とした不定値計量から定まる共形幾何代数 (conformal geometric algebra) というものは、 $SO_0(1,4)$ の2重被覆と相性が良く、その放物型部分群の Langlands 分解 MAN として自然に、 $SO(3)$, dilation, 3D 平行移動が登場する仕掛けになっています。

このことに気がつく、このミニチュア版、すなわち、2次元の回転と平行移動を表わすような数体系を考えることが可能です [13]。このときに普通の共役とは異なる共役を導入する必要がありました。理由を説明するために記号を準備します。文字 ε を $\varepsilon^2 = 0$ を満たすものとします。すなわち、1変数多項式環を単項イデアル (ε^2) で割った環を $\mathbf{R}[\varepsilon] = \mathbf{R} \oplus \mathbf{R}\varepsilon$ と書きます。 ε を dual number と呼ぶこともあります。一般に、 $\mathbf{R}$ 上の代数 A に対して、係数拡大 $A[\varepsilon] := \mathbf{R}[\varepsilon] \otimes_{\mathbf{R}} A$ を A の dual 化と定義します [17]。これを四元数体 $A = \mathbf{H}$ のときに適用した $\mathbf{H}[\varepsilon]$ が双四元数環です。長さが1の双四元数の全体は6次元のリー群をなし、これは $1 + \text{Im}\mathbf{H}\varepsilon \cong \mathbf{R}^3$ へ共役 apa^{-1} で作用します。これによって、この6次元のリー群は $SE(3)$ の2重被覆群を与えます。Kavan たちはこれらを3次元の運動の補間に用いています。簡単なポイントですが、 A が可換環のときは、 $A[\varepsilon]$ も可換です。ですから、共役による作用 apa^{-1} は自明な作用になってしまいます。つまり、複素数体 $A = \mathbf{C}$ からこの構成を素直にするのでは、2次元運動群 $SE(2) = SO(2) \times \mathbf{R}^2$ という非可換群を得ることはできないので、何らかの工夫をする必要があります。論文 [13] では、これをひねった演算

$$(p_0 + p_1\varepsilon)(q_0 + q_1\varepsilon) = p_0q_0 + (p_1\bar{q}_0 + p_0q_1)\varepsilon$$

を導入することで解決する方法を提案しました。これは、適当な作用によって $SE(2)$ を実現し、十分に軽く満足 of いくものでした。ただし、我々の定義した演算の正体は何なのかは未解明の問題です。

3. 計算に関する問題

前節では、補間に関する問題は線形化するという話をしました。まあ人間ができる補間方法と言ったら、そのぐらいなのでしょう。指数写像はリー環とリー群を原点の付近で局所同型に写す優れた写像ですが、冪零などの特別な場合を除き、多項式写像ではなく、一般には計算のコストが高いです。あるいは、例えば、 $SO(2)$ がそうですが、リー群もリー環も実代数多様体の構造を持ったとしても指数写像は三角関数で書かれ

るため、代数多様体の間の写像ではありません。同じように、シュミットの直交化法 (KAN 分解) では、ベクトルのノルムを求めるときに平方根を考える必要があります。前節で扱った極分解でも正定値対称行列の平方根を求める必要があります。

CGで、これらのサイズが2から4の行列を扱うときは、例えば、腕の表面のそれぞれの場所の位置の移動を表わしていたりするので、計算の精度はさほど要請されません。高々数桁程度です。そのかわりに、腕の表面 (2次元面) を点の集まり (あるいはそれらの近接点を結んだ多数の小三角形からなるメッシュ) で表わすので、行列の個数は簡単に何万から何十万となります。これらの計算をリアルタイムでしたい。例えば、映像制作者 (アニメーター、アーティスト) がマウスで肘のあたりを引っ張ったら、腕の皮膚全体がそれにつれて適切に動いてほしいのです。精度はほどほどで良いので、たくさんを速く、という要請に応えられるような式が望ましいです。

ここから産まれてくる工夫を2つ紹介します。どちらも私の研究ではありませんが。

3.1. 正規直交枠の構成

問題を述べます。単位ベクトル $\mathbf{u} \in \mathbf{R}^3$ が一つ与えられたとします。このとき、 $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbf{R}^3$ を平方根を使わずに (四則演算だけで) 求めて、この3本のベクトルが正規直交基底になるようにすることができるか？

問題のポイントは、適当に1次独立なベクトルを取って来て直交化すると、正規化するところで長さの2乗の平方根が必要となるが、それを避ける方法はあるか、という点です。答えを知りたくない人もいるかもしれませんが、仕方がない、書いてしまいます [4]。

$\mathbf{u} = (a, b, c)^T$ という列ベクトルだったとします。このとき、 $g(\mathbf{u}) := (I_3 - \frac{1}{c+1}(a, b, c+1)^T(a, b, c+1))I_{2,1}$ が答えです。ここで、 I_3 は単位行列、 $I_{2,1}$ は対角成分が1, 1, -1であるような対角行列です。簡単に確認できるのは、対称行列 $\frac{1}{c+1}(a, b, c+1)^T(a, b, c+1)$ は階数が1で、trace が2であることです。つまり、これを単位行列から引いた行列は、Weyl 群を定義するときにおなじみのやつ、そう、ある平面に関する鏡映変換です。特に直交変換です。 $I_{2,1}$ をかけることで行列式が1になるようにするとともに (これは問題文では要請されていませんでしたが)、第3列がマイナス1倍されることで $\mathbf{u}$ となるように調整しました。

これは一体なんなのでしょう？まず、 $SO(3)$ は S^2 へ推移的に作用し、ある点の isotropy は $SO(2)$ と同型ですから、 $S^2 = SO(3)/SO(2)$ と、等質空間として表示できるとともに、 $SO(3) \rightarrow SO(3)/SO(2)$ という S^1 束ができます。いま、この bundle の section を一つ求めようとしているのですが、trivial bundle ではないため連続なものは存在しません。(もちろん、CGでも連続性は要請していません。場合ごとにそのような表示があれば十分役に立ちます。) でも、この写像 $g: S^2 \rightarrow SO(3)$ は連続では？ちょっとだまされそうですが、分母 $c+1$ があるため、 $c = -1$ という1点、すなわち、 S^2 の南極ではこの写像は定義できていません。すなわち、多項式写像ではなく有理写像になっています。これらの問題や結論が $SO(3)$ 以外の代数群とその等質空間でどうなっているのかは興味のあるところです。

この結果は、rendering (3次元のデータから、色や影を計算して2次元の画像を得るプロセス) において、数値積分計算をするときに Monte Carlo 法を高速化することに寄与しています。

3.2. 正定値対称行列の平方根

ここでの問題は、適当な精度で良いので、与えられた正定値対称行列の平方根を求めよ。

ここで適当な精度とは、例えば、成分の絶対値が1程度以下であれば、 10^{-5} 程度の誤差で、というぐらいを想定しています。問題のポイントは、固有値と固有ベクトルを求めて対角化すればもちろん、対角成分の平方根を使って書ける($A = kDk^{-1}$ ならば、 $A^{1/2} = kD^{1/2}k^{-1}$ 。ここで k は直交行列、 D は対角行列)のですが、固有値固有ベクトルを使わないでね、というところです。

答えを述べます。与えられた正定値対称行列を S と書きます。これから、正定値対称行列の列 A_i をrecursiveに定義して行きます。 $A_0 = S, A_{i+1} = (A_i + SA_i^{-1})/2$ ($i = 0, 1, 2, \dots$). 主張は十分大きな i に対して、例えば、 A_5 はほぼ $S^{1/2}$ を与える、というものです。証明は例えば対角化してスカラーの場合に帰着する、そして、そのスカラーの場合、算術調和平均は幾何平均、という事実に基づくものです。この事実は、算術幾何平均が楕円関数(つまり特殊なパラメータのガウスの超幾何関数)で書けると有名事実の、おもちゃのモデルで、ずっと易しく、しかも、収束がめっちゃ速いという特徴は両者に共通です。もちろん、我々は実対称行列全体がジョルダン代数をなし、そのうち正定値なものはその中の凸錐であることを知っています。従って、この漸化式が他のジョルダン代数へと拡張できるのかはすぐに思いつく問題です。

4. 商集合の表示

一般に、何かを調べるときに、群の作用があると有効です。集合 M に群 G が推移的に作用していれば、等質空間として $M = G/H$ と書くことができます。

逆に G/H という等質空間は商空間なので、対称性は見やすいものの、各要素は剰余類なので、必ずしも扱いやすいとはいえないでしょう。(判りやすいと扱いやすいは異なる。) また、 G/H に座標や距離を入れて計算するのも自明ではありません。一つの安易な解決策は G/H を何か判りやすいものの部分集合として同定する、という方法です。すなわち、「商を部分で実現せよ」。例えば、典型はグラスマン多様体のPlücker埋め込みです。あまり当たり前でない例としては $SL(2, \mathbf{R})/SL(2, \mathbf{Z})$ のknot complementとして実現。当たり前の例としては、Harish-Chandra埋め込み: $SL(2, \mathbf{R})/SO(2)$ を上半平面と同一視する、というのもその例にあたります。

ここでは $O(3, \mathbf{R})/O(3, \mathbf{Z})$ の実現を考えてみましょう [6]。一般に、 G/H が与えられたときに、次のような G のユニタリ表現 V が見つかったとします: ある元 $v \in V$ のisotropyが H と一致する。このとき、 G/H は v の G 軌道 $Gv \subset V$ と自然に同一視することができます。 $G/H \ni gH \mapsto gv \in Gv$ 。これによって、 G/H での距離を測るときに、 V での距離を測れば良いことになります。 V の内積を $\langle \cdot, \cdot \rangle$ を書くことにします。このとき2点の距離は $d(g_1H, g_2H) = \langle g_1v, g_2v \rangle = \langle v, g_1^{-1}g_2v \rangle$ と、行列要素で表せます。

この「埋め込み」を補間にも使うのは少なくともCGでは常套手段です。(私は最初、あまりの非標準性に驚愕しました。) 今の例で説明すると、 g_1H, g_2H を補間するとしましょう。軌道側に写して g_1v, g_2v を考えます。これは V の2点ですから線形補間できます。でもそうすると補間した途中の元は軌道 Gv からはみ出ている。そこで、そのはみ出ている元から、軌道 Gv の最も近い点を見つけてそれを補間の結果とする、という方法です。この射影のプロセスでは、多くの場合、解析的な表示はなく、最適化法を使います。この方法だと、 Gv がconvexでない場合には、射影する写像が連続でなくなり、映像としては不具合が生じます。ただ、映像制作では、絵に飛びが生じたり

変形が歪んだりといった深刻な障害が生じたとしても、それを最悪の場合は手で直せば作品は完成しますので、暫定ツールとしては使える余地が十分あります。ここがロボットや自動車など、万全の安全性の担保が必要な技術の下支えとは考え方が異なります。使っていくうちに不具合、障害、限界、ニーズを見つけ、それを解決して行く、というやり方です。

冒頭の $O(3, \mathbf{R})/O(3, \mathbf{Z})$ の例の場合は、 $L^2(S^2)$ に属する 3 変数 4 次調和多項式 v が、9 次元既約表現 V の中に存在しますので、 $O(3, \mathbf{R})/O(3, \mathbf{Z})$ は実 9 次元線形空間 V の中に実現することができます。これを使うと、距離を表わす行列要素は 4 次の調和多項式を積分することで求めることができ、成分による閉じた表示を与えることができます。これは、cross-frame field といって、2D の場合の quad mesh の 3D version を与えるのに使われます。これによって、空間領域を、与えられた直線方向に沿ったほぼ直方体の形の多数の領域の積み重ねで表わすことができ、有限要素法などの連続方程式の離散近似の基盤を与えることができます。

2D あるいは 3D の mesh は思った以上にいろいろなバリエーションがあり、CG 研究で現在も活発に登場しているようです。しかし、不変式的、あるいは表現としての扱いはまだ乏しいと思います。表現論としては階数の低い群、あるいは、半直積型の群が登場することが多いですが、それだけに、あまり難しくない特殊関数の活用でいろいろなものが明示的に（解析的に）表示できる可能性があるのではないかと感じています。

5. さいごに

以上、なるべく問題を提示するような原稿としたいと思いましたがいかがでしょうか。この小文を見た人が、興味を持ってくだされば、望外の喜びです。

この内容は、安生健一さん (OLM Digital), 木村歩さん (OLM Digital), 鍛冶静雄さん (山口大学) を始めとしたたくさんの方々との議論や研究に基づくものです。数々の意見の表明に関しては著者の責任です。

参考文献

- [1] Marc Alexa, “Linear Combinations of Transformations”, In *ACM Transactions on Graphics (TOG) - Proc. of ACM SIGGRAPH 2002*, **21**(3), 380–387, 2002.
- [2] Marc Alexa, Daniel Cohen-Or, David Levin, As-rigid-as-possible shape interpolation, *Proceedings of the 27th annual conference on Computer graphics and interactive techniques*, p.157–164, 2000.
- [3] Ken Anjyo and Hiroyuki Ochiai, “Mathematical Basics of Motion and Deformation in Computer Graphics”, *Synthesis Lectures on Computer Graphics and Animation 6* (3), Morgan & Claypool Publishers, pp. 1–83, 2014.
- [4] Jeppe Reval Frisvad, Building an orthonormal basis from a 3D unit vector without normalization, *Journal of Graphics Tools* **16**(3), pp. 151–159, 2012.
- [5] Andrew J. Hanson, “Visualizing Quaternions”, Morgan-Kaufmann, 2006.
- [6] Jin Huang, Yiyong Tong, Hongyu Wei, and Hujun Bao, Boundary aligned smooth 3D cross-frame field, *ACM Transaction on Graphics* **30**(6), Article 143 (2011).
- [7] Takeo Igarashi, Tomer Moscovich and John F. Hughes, “As-rigid-as-possible Shape Manipulation”, *ACM Transaction on Graphics* **24**(3), 1134–1141 (2005).
- [8] Shizuo Kaji, “Tetrisation of triangular meshes and its application in shape blending”, *MI Lecture Note* **64** (2015) 33–42.

- [9] Shizuo Kaji, Sampei Hirose, Shigeo Sakata, Yoshihiro Mizoguchi, and Ken Anjyo, “Mathematical Analysis on Affine Maps for 2D Shape Interpolation”, *SCA 2012 Proc. of the ACM SIGGRAPH/Eurographics Symposium on Computer Animation*, 71–76, 2012
- [10] Shizuo Kaji and Hiroyuki Ochiai, “A concise parametrisation of affine transformation”, math.arXiv1507.05290, preprint.
- [11] Ladislav Kavan, Steven Collins, Jiří Žára, Carol O’Sullivan. Skinning with Dual Quaternions Symposium on Interactive 3D Graphics and Games, 2007.
- [12] Ladislav Kavan, Steven Collins, Jiří Žára, Carol O’Sullivan. Geometric Skinning with Approximate Dual Quaternion Blending ACM Transaction on Graphics 27(4) [Presented at SIGGRAPH], 2008.
- [13] Genki Matsuda, Shizuo Kaji and Hiroyuki Ochiai, “Anti-Commutative Dual Complex Numbers and 2D Rigid Transformation”, MI Lecture Note **50** 128–133 (2013).
- [14] Hiroyuki Ochiai, “Mathematics: As an Infrastructure of Technology and Science”, in A Mathematical Approach to Research Problems of Science and Technology, Theoretical Basis and Developments in Mathematical Modeling, 3–15, Springer-Verlag 2014.
- [15] Ken Shoemake, “Quaternions”, <http://www.cs.ucr.edu/~vbz/resources/quatut.pdf>, 1994.
- [16] Vince, J., Geometric Algebra for Computer Graphics, Springer Verlag (2008)
- [17] 雪江明彦、代数学2 環と体とガロア理論、日本評論社, 2010.
- [18] デジタル画像処理, CG Arts 協会, 2004
- [19] デジタル映像表現 — CG による映像制作 —, CG Arts 協会, 2004
- [20] コンピュータグラフィックス, CG Arts 協会, 2004.
- [21] Mathematical Progress in Expressive Image Synthesis I, Springer-Verlag, 2014.
- [22] Mathematical Progress in Expressive Image Synthesis II, Springer-Verlag, 2015.