

Generalized Parking Spaces *

名古屋大学多元数理科学研究科
岡田 聡一 (Soichi OKADA)

1 Parking function とその一般化

長さ n の正整数列 $(a_1, \dots, a_n)$ (ただし $1 \leq a_i \leq n$) は, 次の条件 (P) をみたすとき, parking function であるという:

(P) 各整数 k ($1 \leq k \leq n$) に対して, $\#\{i : a_i \leq k\} \geq k$.

ここで, $\#X$ は集合 X の元の個数を表す. 長さ n の parking function 全体のなす集合を PF_n と表す. 例えば,

$$\text{PF}_2 = \{11, 12, 21\},$$
$$\text{PF}_3 = \left\{ \begin{array}{ccccccccc} 111, & 112, & 121, & 211, & 113, & 131, & 311, & 122 \\ 212, & 221, & 123, & 132, & 213, & 231, & 312, & 321 \end{array} \right\}$$

である. Parking function とその周辺の話については, [21] を参照されたい.

Parking function の名前の由来は, 次のような駐車問題にある. n 台の車 $C_1, C_2, \dots, C_n$ と, 一方通行の道路に沿って順番にならんだ n ケ所の駐車スペース $1, 2, \dots, n$ があり, 各車 C_i にはそれぞれ好みの駐車スペース a_i があるという状況を考える.

$$\begin{array}{ccccccc} C_4 & C_3 & C_2 & C_1 & \longrightarrow & \hline & & & & & 1 & 2 & 3 & 4 \end{array}$$

この n 台の車が $C_1, C_2, \dots, C_n$ の順にこの一方通行の道に入り, 次のルールで駐車することを試みる:

- (1) 車 C_i はまず駐車スペース a_i に行く.
- (2) もし駐車スペース a_i が空いていれば, そこに駐車する.
- (3) もし駐車スペース a_i が空いていなければ, その先にある空いている最初の駐車スペースに駐車する.
- (4) もし駐車スペースが見つからなければ, この道路から立ち去る.

例えば, $n = 4$ で $(a_1, a_2, a_3, a_4) = (1, 1, 4, 2)$ であるとき,

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & C_1 & & \\ & & & & \hline 1 & 2 & 3 & 4 & \longrightarrow & 1 & 2 & 3 & 4 & \longrightarrow & \begin{array}{cc} C_1 & C_2 \\ \hline 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \end{array}$$

*この報告は伊藤 洋介との共同研究 [10] に基づくものである.

$$\longrightarrow \frac{C_1 \quad C_2 \quad \quad C_3}{1 \quad 2 \quad 3 \quad 4} \longrightarrow \frac{C_1 \quad C_2 \quad C_4 \quad C_3}{1 \quad 2 \quad 3 \quad 4}$$

のようにして, 4 台の車 $C_1, \dots, C_4$ すべてが (好みの駐車スペースではないが) 駐車することができる. しかし, $(a_1, a_2, a_3, a_4) = (1, 1, 4, 4)$ であるときは,

$$\begin{aligned} \frac{\quad}{1 \quad 2 \quad 3 \quad 4} &\longrightarrow \frac{C_1}{1 \quad 2 \quad 3 \quad 4} \longrightarrow \frac{C_1 \quad C_2}{1 \quad 2 \quad 3 \quad 4} \\ &\longrightarrow \frac{C_1 \quad C_2 \quad \quad C_3}{1 \quad 2 \quad 3 \quad 4} \longrightarrow \frac{C_1 \quad C_2 \quad \quad C_3 \quad C_4}{1 \quad 2 \quad 3 \quad 4} \end{aligned}$$

となって, 車 C_4 は駐車することができない. このとき, 次の命題が成り立つ.

命題 1.1. 数列 $(a_1, \dots, a_n)$ (ただし $1 \leq a_i \leq n$) に対して, 次の (i), (ii) は同値である:

- (i) $(a_1, \dots, a_n)$ は parking function である.
- (ii) 好みの駐車スペース $a_1, \dots, a_n$ をもつ車 $C_1, \dots, C_n$ が上のルールに従ってすべて駐車できる.

Parking function はこのような問題から生まれたものであるが, さまざまな場面に現れる基本的な研究対象となっている. 例えば, 対角的調和多項式 (Macdonald 対称関数と密接な関係がある) や, Shi 超平面配置 (アフィン Weyl 群の Kazhdan–Lusztig セルの研究に起源がある) に, 次のような形で現れる.

- (1) $2n$ 変数の多項式 $f \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n]$ は, 任意の h, k (ただし $h+k > 0$) に対して

$$\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)^h \left(\frac{\partial}{\partial y_i} \right)^k f = 0$$

が成り立つとき, 対角的調和多項式 (diagonal harmonics) であるという. 対角的調和多項式全体のなす集合を $\mathcal{DH}_n$ と表すと, $x_1, \dots, x_n$ に関する次数と $y_1, \dots, y_n$ に関する次数を考えることにより, $\mathcal{DH}_n = \bigoplus_{i,j \geq 0} \mathcal{DH}_n^{i,j}$ と直和分解される. このとき, Haglund–Loehr [6] は, $\mathcal{DH}_n$ の Hilbert 級数について次の予想を提起している.

予想 1.2. ([6, Conjecture 2]) 具体的に定義される $\text{dinv}, \text{area} : \text{PF}_n \rightarrow \mathbb{N}$ (ここで, $\mathbb{N}$ を非負整数全体のなす集合を表す) を用いて,

$$\sum_{i,j \geq 0} \dim(\mathcal{DH}_n)_{i,j} q^i t^j = \sum_{a \in \text{PF}_n} q^{\text{dinv}(a)} t^{\text{area}(a)}$$

と表される.

この予想は未解決であるが, $t = 1/q$ (特に $q = t = 1$) の場合は Haiman によって証明されている ([8] とそこに挙げられている文献を見よ).

- (2) Shi 配置 $\mathcal{A}_n$ とは, $\mathbb{R}^n$ 内の $n(n-1)$ 枚の超平面

$$x_i - x_j = 0 \quad (1 \leq i < j \leq n), \quad x_i - x_j = 1 \quad (1 \leq i < j \leq n)$$

からなる超平面配置である. Shi [18, Corollary 7.3.10] は, 補空間 $\mathbb{R}^n \setminus \bigcup_{H \in \mathcal{A}_n} H$ の領域 (連結成分) の個数が $(n+1)^{n-1} (= \# \text{PF}_n)$ に等しいことを代数的に証明し

ている．一方，(Pak–)Stanley [20], Athanasiadis–Linusson [1] は， $\mathbb{R}^n \setminus \bigcup_{H \in \mathcal{A}_n} H$ の領域と長さ n の parking function の間の全単射を具体的に与えている．

さて，本稿では表現論の立場から parking function の一般化を考える． n 次対称群 $\mathfrak{S}_n$ が成分の置換として PF_n に作用する．対応する $\mathfrak{S}_n$ 加群 $\mathbb{C}[\text{PF}_n]$ を parking space と呼ぶ．このとき， $\mathfrak{S}_n$ 作用を保つ全単射

$$\text{PF}_n \xrightarrow{\cong} (\mathbb{Z}_{n+1})^n / \langle \mathbf{1} \rangle \quad (1)$$

(ここで， $\mathbb{Z}_{n+1} = \mathbb{Z}/(n+1)\mathbb{Z}$ であり， $\langle \mathbf{1} \rangle$ は $\mathbf{1} = (1, 1, \dots, 1) \in (\mathbb{Z}_{n+1})^n$ で生成される部分群である) が存在する．この同型を利用すると， $\mathfrak{S}_n$ の PF_n 上の置換指標が計算できる．

命題 1.3. $\mathfrak{S}_n$ の PF_n 上の置換表現の指標を χ_{PF_n} と表すと，

$$\chi_{\text{PF}_n}(w) = (n+1)^{l(\text{type}(w))-1} \quad (w \in \mathfrak{S}_n). \quad (2)$$

ここで， $l(\text{type}(w))$ は w を互いに共通元をもたない巡回置換 (固定点も巡回置換に含める) の積として表したときの巡回置換の個数である．特に， $\#\text{PF}_n = (n+1)^{n-1}$ であり， PF_n における $\mathfrak{S}_n$ 軌道の個数は Catalan 数 $C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$ に等しい．

Haiman [7] は，上の同型 (1) に着目することにより，有限 Weyl 群 W に付随した “parking function” の集合として $Q/(h+1)Q$ を考察している．ここで， Q は W に対応するルート格子であり， h は W の Coxeter 数である．

命題 1.4. ([19, Proposition 3.9]) W の $Q/(h+1)Q$ 上の置換表現の指標を $\chi_{Q/(h+1)Q}$ と表すと，

$$\chi_{Q/(h+1)Q}(w) = (h+1)^{\dim V^w}. \quad (3)$$

ここで， V は W の鏡映表現であり， $V^w = \{v \in V : wv = v\}$ は w による固定点集合である．

命題 1.3, 1.4 に現れる指標が特別な形をしていることに着目して，複素鏡映群上の次のような類関数を考える (複素鏡映群については，[12] を参照されたい)．

定義 1.5. W を有限複素鏡映群とし， V をその鏡映表現とする．正整数 k に対して， W 上の類関数 φ_k^W とその q 類似 $\tilde{\varphi}_k^W$ を

$$\varphi_k^W(w) = k^{\dim V^w} \quad \tilde{\varphi}_k^W(w) = \frac{\det_V(1 - q^k w)}{\det_V(1 - qw)} \quad (w \in W) \quad (4)$$

とおいて定める．混乱の恐れがない場合は， W を省略して単に $\varphi_k, \tilde{\varphi}_k$ と表す．

しかし，一般に φ_k が表現の指標となるとは限らない．そこで，次の問を考える．

問 1.6. W を有限複素鏡映群とし， k を正整数とする．

- (1) いつ φ_k^W は W の表現の指標になるか？
- (2) いつ $\tilde{\varphi}_k^W$ は W の次数つき表現の次数つき指標となるか？

ここで, W の表現 U で W 不変部分空間への直和分解 $U = \bigoplus_{i \geq 0} U_i$ が与えられているものを W の次数つき表現と呼び, $\sum_{i \geq 0} (\text{ch } U_i) q^i$ (ここで, $\text{ch } U_i$ は W の表現 U_i の指標である) を U の次数つき指標と呼ぶ.

類関数 $\varphi_k^W, \tilde{\varphi}_k^W$ が表現, 次数つき表現から得られるとき, その表現を与えるような W 加群を一般化された parking space と呼ぶことにする. 例えば, $k = h + 1$, あるいは, より一般に $k \equiv 1 \pmod{h}$ (h は W の Coxeter 数) であるとき, 一般化された parking space (の候補) の組合せ論的, 代数的構成が [2], [16] で与えられている. 本稿の目的は, 上の問 1.6 に完全な解答を与えることである.

2 主定理

主定理を述べるために, 複素鏡映群に対する Catalan 数の q 類似を定義する.

定義 2.1. W を有限複素鏡映群とする. このとき, 一般化された q Catalan 数 $\text{Cat}_k(W, q)$, 一般化された双対 q Catalan 数 $\text{Cat}_k^*(W, q)$ を次のように定義する:

$$\text{Cat}_k(W, q) = \prod_{i=1}^r \frac{[k + d_i - 1]_q}{[d_i]_q}, \quad \text{Cat}_k^*(W, q) = q^N \prod_{i=1}^r \frac{[k - d_i^* - 1]_q}{[d_i]_q}. \quad (5)$$

ここで, $(d_1, \dots, d_r), (d_1^*, \dots, d_r^*)$ はそれぞれ W の次数 (degree), 双対次数 (codegree) であり, N は W の鏡映超平面の個数である. また, $[m]_q = (1 - q^m)/(1 - q)$ である.

例えば, $W = \mathfrak{S}_n$ の場合, 次数は $(2, 3, \dots, n)$ だから, $h = n + 1$ ($\mathfrak{S}_n$ の Coxeter 数 +1) のとき

$$\text{Cat}_{n+1}(\mathfrak{S}_n, q) = \frac{1}{[n+1]_q} \begin{bmatrix} 2n \\ n \end{bmatrix}_q$$

となるが, これは MacMahon による Catalan 数の q 類似である.

このとき, 次が本稿の主定理である.

定理 2.2. W を既約な有限複素鏡映群とし, k を正整数とする.

(A) 任意の W に対して, 次の (i), (ii), (iii) は同値である:

- (i) $\tilde{\varphi}_k^W$ は W の次数つき表現の次数つき指標である.
- (ii) $\text{Cat}_k(W, q), \text{Cat}_k^*(W, q)$ はともに q の多項式である.
- (iii) k は表 1 に挙げた条件をみたす.

(B) 二面体群 $W = G(m, m, 2) = I_2(m)$ の場合を除いて, (A) の条件は次の条件 (iv),

(v) と同値である:

- (iv) φ_k^W は W の表現の指標である.
- (v) φ_k^W は W の置換表現の指標である.

(C) $W = G(m, m, 2) = I_2(m)$ のとき, 次の条件 (iii'), (iv), (v) は同値である:

(iii') $k = 1$ であるか, あるいは, $k \geq m - 1$ で

$$k^2 \equiv 1 \begin{cases} \pmod{2m} & (m \text{ が偶数であるとき}) \\ \pmod{m} & (m \text{ が奇数であるとき}) \end{cases}$$

表 1: 定理 2.2 (iii) における条件

群	k に関する条件
$\mathfrak{S}_n$	$\gcd(k, n) = 1$
$G(m, p, n)$ ($n \geq 3$ または $p < m$)	$k \equiv 1 \pmod{m}$
$G(m, m, 2)$	$k \equiv \pm 1 \pmod{m}$
C_m	$k \equiv 1 \pmod{m}$
G_4	$k \equiv 1, 3 \pmod{6}$
G_5	$k \equiv 1 \pmod{6}$
G_6	$k \equiv 1, 9 \pmod{12}$
G_7	$k \equiv 1 \pmod{12}$
G_8	$k \equiv 1, 5 \pmod{12}$
G_9	$k \equiv 1, 17 \pmod{24}$
G_{10}	$k \equiv 1 \pmod{12}$
G_{11}	$k \equiv 1 \pmod{24}$
G_{12}	$k \equiv 1, 11, 17, 19 \pmod{24}$
G_{13}	$k \equiv 1, 17 \pmod{24}$
G_{14}	$k \equiv 1, 19 \pmod{24}$
G_{15}	$k \equiv 1 \pmod{24}$
G_{16}	$k \equiv 1, 11 \pmod{30}$
G_{17}	$k \equiv 1, 41 \pmod{60}$
G_{18}	$k \equiv 1 \pmod{30}$
G_{19}	$k \equiv 1 \pmod{60}$
G_{20}	$k \equiv 1, 19 \pmod{30}$
G_{21}	$k \equiv 1, 49 \pmod{60}$
G_{22}	$k \equiv 1, 29, 41, 49 \pmod{60}$
$G_{23} = W(H_3)$	$k \equiv 1, 5, 9 \pmod{10}$
G_{24}	$k \equiv 1, 9, 11 \pmod{14}$
G_{25}	$k \equiv 1 \pmod{6}$
G_{26}	$k \equiv 1 \pmod{6}$
G_{27}	$k \equiv 1, 19, 25 \pmod{30}$
$G_{28} = W(F_4)$	$k \equiv 1, 5 \pmod{6}$
G_{29}	$k \equiv 1, 9, 13, 17 \pmod{20}$
$G_{30} = W(H_4)$	$k \equiv 1, 11, 19, 29 \pmod{30}$
G_{31}	$k \equiv 1, 13, 17, 29, 37, 41, 49, 53 \pmod{60}$
G_{32}	$k \equiv 1, 7, 13, 19 \pmod{30}$
G_{33}	$k \equiv 1 \pmod{6}$
G_{34}	$k \equiv 1, 13, 19, 25, 31, 37 \pmod{42}$
$G_{35} = W(E_6)$	$k \equiv 1, 5 \pmod{6}$
$G_{36} = W(E_7)$	$k \equiv 1, 5 \pmod{6}$
$G_{37} = W(E_8)$	$k \equiv 1, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29 \pmod{30}$

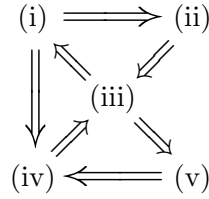
- (iv) φ_k^W は W の表現の指標である .
- (v) φ_k^W は W の置換表現の指標である .

注意. 既約な有限複素鏡映群は , Shephard–Todd によって , 3 つの無限系列

- (1) 対称群 $\mathfrak{S}_n$,
- (2) 半直積群 $G(m, 1, n) = C_m^n \rtimes \mathfrak{S}_n$ の指数 p (ただし $p \mid m$) の正規部分群 $G(m, p, n)$,
- (3) 巡回群 C_m

と 34 個の例外群 $G_4, \dots, G_{37}$ に分類されている .

主定理 2.2 (二面体群以外の場合) を証明するには , 次の $\implies$ を示せばよい :



このうち , (i) $\implies$ (iv), (v) $\implies$ (iv) は明らかであり , (i) $\implies$ (ii) も次の命題 2.3 ([11, (2.3)] から従う) を用いると分類によらずに示すことができる .

命題 2.3. W を有限複素鏡映群とするととき , $\tilde{\varphi}_k^W$ における自明な指標 triv , 行列式指標 $\det = \det_V$ の重複度はそれぞれ $\text{Cat}_k(W, q)$, $\text{Cat}_k^*(W, q)$ に等しい .

しかし , それ以外の部分は現在のところ分類に基づいてケースバイケースでしか証明できていない (例外型の場合の証明では , コンピュータとソフトウェア [17], [4] を利用している.) また , φ_k^W , $\tilde{\varphi}_k^W$ が表現の指標となることの証明でも表現を構成しているわけではない . よって , 次の問題が残されている .

- 問題 2.4. (1) 定理 2.2 の (i), (ii) が同値であることを , 分類を用いなくて証明せよ .
- (2) 定理 2.2 の (iii) の条件を分類によらない形で記述せよ .
- (3) φ_k^W , $\tilde{\varphi}_k^W$ が表現の指標となるとき , 対応する表現を構成せよ .

3 対称群の場合の証明

この節では , $W = \mathfrak{S}_n$ の場合に主定理 2.2 の証明の概略を説明する . この場合の証明の鍵となるのは , Schur 関数の特殊値の最大公約元に関する結果 (定理 3.2) である .

まず , 対称群の表現論と対称関数の関係について思い出しておく (詳しくは [13, Chapter 1] を参照されたい) . 正整数 n の分割とは , 非負整数の広義単調減少列 $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots)$ で $\sum_{i \geq 1} \lambda_i = n$ となるもののことである . λ が n の分割であることを $\lambda \vdash n$ と表す . 分割 λ の 0 でない成分の個数を $l(\lambda)$ と表し , λ の長さと呼ぶ . 長さ k 以下の分割 λ に対して , 対応する単項対称関数 $m_\lambda(x_1, \dots, x_k)$, Schur 関数 $s_\lambda(x_1, \dots, x_k)$ をそれぞれ

$$m_\lambda(x_1, \dots, x_k) = \sum_{\alpha \in \mathfrak{S}_k \lambda} x^\alpha, \quad s_\lambda(x_1, \dots, x_k) = \frac{\det \left(x_i^{\lambda_j + k - j} \right)_{1 \leq i, j \leq k}}{\det \left(x_i^{k - j} \right)_{1 \leq i, j \leq k}}$$

(ここで, α は λ の置換全体をわたり, $x^\alpha = \prod_{i=1}^k x_i^{\alpha_i}$ である) において定義する. $l(\lambda) > k$ のときは $m_\lambda = s_\lambda = 0$ と約束する. また, 分割 μ に対応するべき和対称関数 $p_\mu(x_1, \dots, x_k)$ を

$$p_\mu(x_1, \dots, x_k) = \prod_{j=1}^{l(\mu)} (x_1^{\mu_j} + \dots + x_k^{\mu_j})$$

において定める. これらの対称関数 f に $x_1 = \dots = x_k = 1$ を代入したものを $f(1^k)$ と表す.

n 次対称群 $\mathfrak{S}_n$ の共役類, 既約指標はいずれも n の分割によってパラメトライズされる. n の分割 λ に対応する既約指標を χ^λ と表し, 巡回置換型 μ の元での値を χ_μ^λ と表す. このとき, 次の Frobenius の公式が成り立つ:

$$p_\mu(x_1, \dots, x_k) = \sum_{\lambda \vdash n} \chi_\mu^\lambda s_\lambda(x_1, \dots, x_k). \quad (6)$$

ここで, λ は n の分割全体をわたる.

置換 $w \in \mathfrak{S}_n$ の巡回置換型が μ であるとき,

$$\varphi_k(w) = k^{l(\mu)-1}, \quad \tilde{\varphi}_k(w) = \frac{\prod_{j=1}^{l(\mu)} [k]_{q^{\mu_j}}}{[k]_q}$$

(ここで, $[k]_t = (1 - t^k)/(1 - t)$ である) と表される. よって, Frobenius の公式 (6) に $x_i = 1$ あるいは $x_i = q^{i-1}$ ($1 \leq i \leq k$) を代入することによって, 次の命題の (1) が得られる. また, n に関する母関数を考え, Cauchy の公式を用いることによって, 次の命題の (2) が得られる.

命題 3.1. (1) 類関数 $\varphi_k, \tilde{\varphi}_k$ は, 既約指標の 1 次結合として次のように表される:

$$\varphi_k = \sum_{\lambda \vdash n} \frac{s_\lambda(1^k)}{k} \chi^\lambda, \quad \tilde{\varphi}_k = \sum_{\lambda \vdash n} \frac{s_\lambda(1, q, \dots, q^{k-1})}{[k]_q} \chi^\lambda. \quad (7)$$

(2) 分割 λ に対して, $\mathfrak{S}_\lambda = \mathfrak{S}_{\lambda_1} \times \mathfrak{S}_{\lambda_2} \times \dots$ とおき, $\mathfrak{S}_n$ の $\mathfrak{S}_n/\mathfrak{S}_\lambda$ 上の置換指標を η^λ と表す. このとき,

$$\varphi_k = \sum_{\lambda \vdash n} \frac{m_\lambda(1^k)}{k} \eta^\lambda. \quad (8)$$

この命題 3.1 から, 例えば, $\tilde{\varphi}_k$ が $\mathfrak{S}_n$ の次数つき表現の次数つき指標となることと, 任意の $\lambda \vdash n$ に対して $s_\lambda(1, q, \dots, q^{k-1})/[k]_q \in \mathbb{N}[q]$ (ここで, $\mathbb{N}[q]$ は非負整数係数の q に関する多項式全体の集合を表す) となることが同値であることがわかる. よって, 主定理 2.2 の証明は Schur 関数, 単項対称関数の特殊値に関する主張に帰着される. そこで, 次の Schur 関数の特殊値の最大公約元に関する結果が重要な役割を果たす (証明については, [10], あるいは [9] を参照されたい.)

定理 3.2. n, k を正整数とする.

(1) 整数環 $\mathbb{Z}$ において,

$$\gcd_{\mathbb{Z}}\{s_\lambda(1^k) : \lambda \vdash n\} = \frac{k}{\gcd(n, k)}. \quad (9)$$

(2) 有理数係数の多項式環 $\mathbb{Q}[q]$ において,

$$\gcd_{\mathbb{Q}[q]} \{s_\lambda(1, q, \dots, q^{k-1}) : \lambda \vdash n\} = \frac{[k]_q}{[\gcd(n, k)]_q}. \quad (10)$$

ここで, 多項式の最大公約式は最高次係数が 1 であるようにとる.

この定理 3.2 を用いると, 主定理 2.2 の証明が完成する.

対称群の場合の定理 2.2 の証明の概略. (ii) $\implies$ (iii) : [7, Proposition 2.5.1] を見よ.

(iii) $\implies$ (i) : 定理 3.2 (2) より, $\gcd(n, k) = 1$ であるとき, $s_\lambda(1, q, \dots, q^{k-1})$ は $\mathbb{Q}[q]$ において $[k]_q$ で割り切れるが, $[k]_q$ の最高次係数は 1 だから, $s_\lambda(1, q, \dots, q^{k-1})/[k]_q \in \mathbb{Z}[q]$ となる. さらに, Andrews の方法 (例えば [5, Lemma 5.1] を見よ) を用いると, $s_\lambda(1, q, \dots, q^{k-1})/[k]_q \in \mathbb{N}[q]$ となることがわかる.

(iii) $\implies$ (v) : 定理 3.2 (1) より, $\gcd(n, k) = 1$ であるとき, $m_\lambda(1^k)/k \in \mathbb{Z}$ となる.

(iv) $\implies$ (iii) : 任意の $\lambda \vdash n$ に対して $s_\lambda(1^k)/k \in \mathbb{Z}$ であると仮定すると, k は $\gcd\{s_\lambda(1^k) : \lambda \vdash n\}$ を割り切る. よって, 定理 3.2 (1) より, k は $k/\gcd(n, k)$ を割り切ることになるから, $\gcd(n, k) = 1$ でなければならない. $\square$

この節の最後に, Schur 関数の特殊化 $s_\lambda(1, q, \dots, q^{k-1})$ に関する予想を 1 つ与える. n, k を正整数とし, $d = \gcd(n, k)$ とおくと, 定理 2.2 (iii) $\implies$ (i) の証明と同様にして,

$$f_\lambda(q) = \frac{s_\lambda(1, q, \dots, q^{k-1})}{[k]_q/[d]_q} \in \mathbb{N}[q]$$

となることがわかる. ここで, 実数列 $(a_0, a_1, \dots, a_m)$ は,

$$a_0 \leq a_1 \leq \dots \leq a_{p-1} \leq a_p \geq a_{p+1} \geq \dots \geq a_m.$$

となる p が存在するとき, 単峰列 (unimodal sequence) であるという. 例えば, n が k の倍数であるとき, つまり, $\gcd(n, k) = k$ であるとき, $f_\lambda(q) = s_\lambda(1, q, \dots, q^{k-1})$ の係数が単峰列をなすことはよく知られている (例えば [13, I.8 Example 4] を見よ). 一方, $\gcd(n, k) = 1$ のとき, 対称群 $\mathfrak{S}_n$ に付随した有理 Cherednik 代数の有限次元表現論から, $f_\lambda(q)$ は Lie 代数 $\mathfrak{sl}_2$ の指標となることがわかる (例えば, [3] を見よ). これらの結果, および, 計算機による実験結果から, 次が予想される.

予想 3.3. n, k を正整数とし, $d = \gcd(n, k)$ とおく. $l(\lambda) \leq k$ となる n の分割 λ に対して,

$$\frac{s_\lambda(1, q, \dots, q^{k-1})}{[k]_q/[d]_q} = \sum_{i \geq 0} a_i q^i$$

と表すとき, 2 つの数列 $(a_0, a_2, a_4, \dots), (a_1, a_3, a_5, \dots)$ はいずれも単峰列である.

注意. 例えば, $n = 2, k = 3, \lambda = (2)$ であるとき, $s_{(2)}(1, q, q^2)/[3]_q = 1 + q^2$ となる. よって, 一般には $f_\lambda(q)$ の係数全体は単峰列となるとは限らない.

4 $G(m, p, n)$ の場合の証明

この節では、 $W = G(m, p, n)$ の場合に主定理 2.2 の証明の概略を説明する．この場合も対称関数が重要な役割を果たす．

まず、 $G(m, 1, n) = C_m^n \rtimes \mathfrak{S}_n$ の表現と対称関数の関係について復習しておく（例えば、[13, Chapter 1, Appendix B] を見よ）． $G(m, 1, n)$ の共役類、既約表現は、ともに分割の m 重対 $\lambda = (\lambda^{(0)}, \dots, \lambda^{(m-1)})$ で $|\lambda| = \sum_{i=0}^{m-1} |\lambda^{(i)}| = n$ となるものでパラメトライズされる． λ に対応する共役類の代表元を w_λ 、既約指標を χ^λ と表す．すると、

$$\det_V(1 - tw_\lambda) = \prod_{i=0}^{m-1} \prod_{j \geq 0} \left(1 - \zeta^i t^{\lambda_j^{(i)}}\right). \quad (11)$$

（ここで、 $\zeta = \exp(2\pi\sqrt{-1}/m)$ とおいた）となることが確かめられ、例えば $\varphi_k(w_\lambda) = k^{l(\lambda^{(0)})}$ となることがわかる．

変数 $\mathbf{x}^{(i)} = (x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \dots)$ に関する対称関数環を $\Lambda(\mathbf{x}^{(i)})$ とし、そのテンソル積

$$\Lambda^{(m)} = \Lambda(\mathbf{x}^{(0)}) \otimes \Lambda(\mathbf{x}^{(1)}) \otimes \dots \otimes \Lambda(\mathbf{x}^{(m-1)})$$

を考える．分割の m 重対 λ に対して、

$$S_\lambda = s_{\lambda^{(0)}}(\mathbf{x}^{(0)}) s_{\lambda^{(1)}}(\mathbf{x}^{(1)}) \dots s_{\lambda^{(m-1)}}(\mathbf{x}^{(m-1)}), \quad P_\lambda = \prod_{i=0}^{m-1} \prod_{j \geq 1} \left(\sum_{r=0}^{m-1} \zeta^{ir} p_{\mu_j^{(i)}}(\mathbf{x}^{(r)}) \right)$$

とおく．このとき、 $G(m, 1, n)$ の既約指標の値は次の Frobenius 型の公式をみたす：

$$P_\mu = \sum_{|\lambda|=|\mu|} \chi^\lambda(w_\mu) S_\lambda. \quad (12)$$

この Frobenius 型の公式 (12) を用いることによって、次の命題が証明できる．

命題 4.1. $W = G(m, 1, n)$ とし、 $k = pm + 1$ ($p \in \mathbb{Z}$) であるとする．このとき、

(1) $\tilde{\varphi}_k^{G(m, 1, n)}$ における χ^λ の重複度 $\tilde{m}_k^\lambda$ は

$$\tilde{m}_k^\lambda = s_{\lambda^{(0)}}(1, q^m, \dots, q^{pm}) \prod_{r=1}^{m-1} s_{\lambda^{(r)}}(q^r, q^{r+m}, \dots, q^{r+(p-1)m}) \quad (13)$$

で与えられ、これは非負整数係数の多項式である．

(2) 整数 r ($0 \leq r \leq n$) と分割 $\lambda \vdash n - r$ に対して、 $G(m, 1, n)/(G(m, 1, r) \times \mathfrak{S}_\lambda)$ 上の置換指標を $\eta^{r, \lambda}$ と表すと、

$$\varphi_k^{G(m, 1, n)} = \sum_{r=0}^n \sum_{\lambda \vdash n-r} m_\lambda(1^p) \eta^{r, \lambda}. \quad (14)$$

以上の準備のもとで、 $W = G(m, p, n)$ の場合に主定理 2.2 を証明しよう．

$G(m, p, n)$ の場合の定理 2.2 の証明の概略. ここでは, $n \geq 3$ の場合の証明の概略を述べる ($n = 2$ で二面体群でない場合の証明も同様である. また, 二面体群の場合はより容易に証明できる.)

(ii) $\implies$ (iii) : $W = G(m, p, n)$ とし, $\text{Cat}_k(W, q)$ が多項式であるとき, $k \equiv 1 \pmod{m}$ となることを示す. W に付随する一般化された q Catalan 数は

$$\text{Cat}_k(W, q) = \frac{\prod_{i=1}^{n-1} [k + im - 1]_q \cdot [k + mn/p - 1]_q}{\prod_{i=1}^{n-1} [im]_q \cdot [mn/p]_q}$$

で与えられる. ここで, q 整数 $[l]_q$ は円分多項式 $\Phi_d(q)$ を用いて $[l]_q = \prod_{d|l, d \neq 1} \Phi_d(q)$ と既約分解されることに注意する. $n \geq 3$ のとき, $\text{Cat}_k(W, q)$ の分母は $\Phi_m(q)^2$ で割り切れるから, $\text{Cat}_k(W, q)$ が多項式となるためには, 分子も $\Phi_m(q)^2$ で割り切れなければならない. よって, $[k + im - 1]_q$ ($1 \leq i \leq n-1$) の少なくとも 1 つが $\Phi_m(q)$ で割り切れなければならないから, $k \equiv 1 \pmod{m}$ となる.

(iii) $\implies$ (i) : $k \equiv 1 \pmod{m}$ のとき, 命題 4.1 (1) より, $\tilde{\varphi}_k^{G(m, 1, n)}$ は $G(m, 1, n)$ の次数つき表現の次数つき指標である. よって, $G(m, p, n)$ に制限することにより, $\tilde{\varphi}_k^{G(m, p, n)}$ も次数つき表現の次数つき指標である.

(iii) $\implies$ (v) : $k \equiv 1 \pmod{m}$ のとき, 命題 4.1 (2) より, $\varphi_k^{G(m, 1, n)}$ は $G(m, 1, n)$ の置換指標である. よって, Mackey の制限定理を用いることにより, $\varphi_k^{G(m, p, n)}$ も $G(m, p, n)$ の置換指標となることがわかる.

(iv) $\implies$ (iii) : $G(m, p, n)$ から $G(m, m, n)$ への制限を考えることにより, $\varphi_k^{G(m, m, n)}$ が $G(m, m, n)$ の表現の指標であるとき $k \equiv 1 \pmod{m}$ となることを示せばよい. 命題 2.3 により, $\varphi_k^{G(m, m, n)}$ における triv, det の重複度はそれぞれ

$$m_k^{\text{triv}} = \frac{1}{m^{n-1}n!} \prod_{i=1}^{n-1} (k + im - 1) \cdot (k + n - 1),$$

$$m_k^{\text{det}} = \frac{1}{m^{n-1}n!} \prod_{i=1}^{n-1} (k - im + m - 1) \cdot (k - (n-1)m + (n-1))$$

で与えられる. そこで, 多項式

$$f(z) = \frac{1}{n!} \prod_{i=1}^{n-1} (z + i) \cdot (mz + n), \quad g(z) = \frac{1}{n!} \prod_{i=1}^{n-1} (z - i + 1) \cdot (m(z - n + 1) + n)$$

を考えると, 有理数 $z = (k-1)/m$ は代数方程式

$$\begin{aligned} \frac{n!}{2} (f(z) + g(z)) - (n-2)! z (f(z) - g(z)) \\ = \frac{n!}{2} (m_k^{\text{triv}} + m_k^{\text{det}}) - (n-2)! (m_k^{\text{triv}} - m_k^{\text{det}}) z \end{aligned}$$

の解となる. ここで, 代数的整数であるような有理数が (有理) 整数しかないことに注意すると, $(k-1)/m \in \mathbb{Z}$ となることを証明するためには,

$$h(z) = \frac{n!}{2} (f(z) + g(z)) - (n-2)! z (f(z) - g(z))$$

が最高次係数 1 の整数係数の多項式であることを示せばよい．

$$f_1(z) = \frac{m}{n!} \prod_{i=1}^n (z+i-1), \quad f_2(z) = \frac{1}{(n-1)!} \prod_{i=1}^{n-1} (z+i),$$

$$g_1(z) = \frac{m}{n!} \prod_{i=1}^n (z-i+1), \quad g_2(z) = \frac{1}{(n-1)!} \prod_{i=1}^{n-1} (z-i+1)$$

とおくと, $f(z) = f_1(z) + f_2(z)$, $g(z) = g_1(z) + g_2(z)$ である．まず, f_1, g_1 の n 次, $(n-1)$ 次の係数, f_2, g_2 の $(n-1)$ 次, $(n-2)$ 次の係数を考えることにより, $h(z)$ は最高次係数が 1 の $(n-1)$ 次多項式であることがわかる．次に, $c(n, j)$ を符号を除いた第 1 種 Stirling 数とすると,

$$\prod_{i=1}^n (z+i-1) = \sum_{k=0}^n c(n, j) z^j$$

だから,

$$\frac{n!}{2} (f_1(z) + g_1(z)) = m \sum_{n-j: \text{偶数}} c(n, j) z^j,$$

$$(n-2)! (f_1(z) - g_1(z)) = \frac{m}{\binom{n}{2}} \sum_{n-j: \text{奇数}} c(n, j) z^j.$$

また, Stirling 数の漸化式 $c(n, j) = c(n-1, j-1) + (n-1)c(n-1, j)$ を用いると,

$$\frac{n!}{2} (f_2(z) + g_2(z)) = n \sum_{n-1-j: \text{偶数}} c(n-1, j) z^j + \binom{n}{2} \sum_{j=1}^n c(n-1, j) z^{j-1},$$

$$(n-2)! (f_2(z) - g_2(z)) = n \cdot \frac{1}{\binom{n-1}{2}} \sum_{n-1-j: \text{奇数}} c(n-1, j) z^j + \sum_{j=1}^n c(n-1, j) z^{j-1}.$$

ここで, 下の命題 4.2 から, $n-j$ が奇数であるとき $\binom{n}{2} \mid c(n, j)$ となることがわかるので, $h(z) \in \mathbb{Z}[z]$ となり, 証明が完成する． $\square$

符号を除いた Stirling 数 $c(n, j)$ はちょうど j 個の巡回置換の積となる n 次対称群の元の個数に等しい．また, $w \in \mathfrak{S}_n$ が巡回置換型 λ をもつとき, $n-l(\lambda) = \sum_{i \geq 1} (i-1)m_i(\lambda)$ ($m_i(\lambda)$ は λ における成分 i の重複度) であり, $n-l(\lambda)$ が奇数ならば $m_i(\lambda)$ が奇数となる偶数 i が存在する．よって, 次の命題 4.2 が示されると, $n-j$ が奇数であるとき $c(n, j)$ が $\binom{n}{2}$ で割り切れることがわかる．

命題 4.2. λ を n の分割とし, C_λ を対応する $\mathfrak{S}_n$ の共役類とする． $m_i(\lambda)$ が奇数となるような λ の偶数成分 i が存在するならば, $\#C_\lambda$ は $\binom{n}{2}$ で割り切れる．

5 例外群の場合の証明

最後に, 例外群の場合を考える．一般に, 有限複素鏡映群 W 上の類関数 $\varphi_k, \tilde{\varphi}_k$ は既約指標の 1 次結合として

$$\varphi_k = \sum_{\chi \in \text{Irr}(W)} m_k^\chi \chi, \quad \tilde{\varphi}_k = \sum_{\chi \in \text{Irr}(W)} \tilde{m}_k^\chi \chi$$

と表されるが, m_k^χ は k に関する多項式であり, $\tilde{m}_k^\chi$ は多項式 $\hat{m}^\chi(u) \in \mathbb{C}(q)[u]$ を用いて $\tilde{m}_k^\chi = \hat{m}^\chi(q^k)$ と表される. W が例外群の場合には, ソフトウェア GAP [17], CHEVIE [4] を利用することにより, これらの多項式 $m_k^\chi, \hat{m}^\chi$ の具体形を求めることができる. また, 次の Orlik–Solomon の結果を用いると, φ_k をある種の置換指標の 1 次結合として具体的に表すことができる.

命題 5.1. ([14, 15]) W を有限複素鏡映群とし, $\mathcal{A}$ を W の鏡映超平面全体のなす集合とする. $L(\mathcal{A})$ を $\mathcal{A}$ に含まれる超平面の共通部分として表されるもの全体のなす集合とし, $X_1, \dots, X_s$ を $L(\mathcal{A})$ 上の W 軌道の完全代表系とする. このとき, $1 \leq j \leq s$ に対して,

$$W_j = \{w \in W : X_j \subset V^w\}, \quad \mathcal{A}_j = \{H \cap X_j : H \in \mathcal{A}, H \not\supset X_j\}$$

とおき, W の W/W_j 上の置換指標を η_j と表すと,

$$\varphi_k = \sum_{j=1}^s \frac{\chi(\mathcal{A}_j, k)}{[N_W(W_j) : W_j]} \eta_j. \quad (15)$$

ここで, $\chi(\mathcal{A}_j, t)$ は超平面配置 $\mathcal{A}_j$ の特性多項式であり, $N_W(W_j)$ は W における W_j の正規化部分群である.

この命題 5.1 に現れる W 軌道の完全代表系, 特性多項式 $\chi(\mathcal{A}_j, t)$, 指数 $[N_W(W_j) : W_j]$ はいずれも Orlik–Solomon [14, 15] によって具体的に求められている.

従って, 主定理 2.2 の証明のうち (iii) $\implies$ (i), (iii) $\implies$ (v), (iv) $\implies$ (iii) は, 多項式 $m \in \mathbb{C}[t]$, あるいは, $\hat{m} \in \mathbb{C}(q)[u]$ が与えられたとき, $m(k) \in \mathbb{N}$, あるいは $\hat{m}(q^k) \in \mathbb{N}[q]$ となるような正整数 k を決定するという問題に還元される. この問題は無限個の k に関する問題であるが, 次の補題 5.2, 5.3, 5.4 を用いることによって, 有限回の計算に帰着できる.

補題 5.2. $f \in \mathbb{C}[t]$ を t に関する多項式とし, 正整数 L で任意の $p \in \mathbb{N}$ に対して $f(t+L) - f(t) \in \mathbb{N}$ となるようなものが存在すると仮定する. このとき, $1 \leq i \leq L$ をみたす整数 i について, 次の (i), (ii) は同値である:

(i) $f(i) \in \mathbb{N}$.

(ii) $k \equiv i \pmod{L}$ となる任意の整数 k に対して, $f(k) \in \mathbb{N}$.

補題 5.3. $g \in \mathbb{C}[t]$ を高々 r 次の多項式とする. $b_0, b_1, \dots, b_r \in \mathbb{C}$ を

$$b_0 = g(0), \quad b_i = g(i) - \sum_{j=0}^{i-1} b_j \binom{i}{j}$$

によって帰納的に定義するとき, もし $b_0, \dots, b_r \in \mathbb{N}$ ならば, 任意の $p \in \mathbb{N}$ に対して $g(p) \in \mathbb{N}$ となる.

補題 5.4. $h(u) \in \mathbb{C}(q)[u]$ を u に関する高々 r 次の多項式とし, M を正整数とする. $c_0, c_1, \dots, c_r \in \mathbb{C}(q)$ を

$$c_0 = h(1), \quad c_i = h(q^{iM}) - \sum_{j=0}^{i-1} \left[\begin{matrix} i \\ j \end{matrix} \right]_{q^M} c_j$$

(ここで, $\begin{bmatrix} i \\ j \end{bmatrix}_{q^M}$ は q^M に関する q 二項係数である) によって帰納的に定義するとき, もし $c_0, c_1, \dots, c_r \in \mathbb{N}[q]$ ならば, 任意の $p \in \mathbb{N}$ に対して $h(q^{pM}) \in \mathbb{N}[q]$ となる.

さらに, 主定理 2.2 の (iii) $\implies$ (i) の証明では, 一般化された q Catalan 数 $\text{Cat}_k(W, q)$, $\text{Cat}_k^*(W, q)$ がいつ q の多項式になるかという問題を考える必要があるが, これも次の補題によって有限回の計算に帰着できる.

補題 5.5. 整数 $a_1, \dots, a_r$ と正整数 $b_1, \dots, b_r$ が与えられたとき, 正整数 k に対して有理関数

$$c_k(q) = \prod_{i=1}^r \frac{[k + a_i]_q}{[b_i]_q}$$

を考える. また,

$$N_k(d) = \#\{i : d \mid (k + a_i)\}, \quad D(d) = \#\{i : d \mid b_i\}, \quad T = \bigcup_{i=1}^s \{d : d \mid b_i\}$$

とおく. このとき,

- (1) $b_1, \dots, b_r$ の最小公倍数を L とすると, $N_{k+L}(d) = N_k(d)$ である.
- (2) 次の (i), (ii) は同値である:
 - (i) $c_k(q)$ が q に関する Laurent 多項式となる.
 - (ii) $k + a_i$ ($1 \leq i \leq r$) の中に 0 が含まれる (このときは $c_k(q) = 0$ である) か, あるいは, すべての $d \in T$ に対して $N_k(d) \geq D(d)$ が成り立つ.

参考文献

- [1] C. A. Athanasiadis and S. Linusson, A simple bijection for the regions of the Shi arrangement of hyperplanes, *Discrete Math.* **204** (1999), 27–39.
- [2] D. Armstrong, V. Reiner, and B. Rhoades, Parking spaces, *Adv. Math.* **269** (2015), 647–705.
- [3] Y. Berest, P. Etingof, and V. Ginzburg, Finite dimensional representations of rational Cherednik algebras, *Int. Math. Res. Not.* **2003** (2003), 1053–1088.
- [4] M. Geck, G. Hiss, F. Lübeck, G. Malle, and G. Pfeiffer, CHEVIE – A system for computing and processing generic character tables for finite groups of Lie type, Weyl groups and Hecke algebras, *Appl. Algebra Engrg. Comm. Comput.* **7**(1996), 175–210.
- [5] V. J. W. Guo and C. Krattenthaler, Some divisibility properties of binomial and q -binomial coefficients, *J. Number Theory* **135** (2014), 167–184.
- [6] J. Haglund and N. Loehr, A conjectured combinatorial formula for the Hilbert series for diagonal harmonics, *Discrete Math.* **298** (2005), 189–204.

- [7] M. D. Haiman, Conjectures on the quotient ring by diagonal invariants, *J. Algebraic Combin.* **3** (1994), 17–76.
- [8] M. D. Haiman, Combinatorics, symmetric functions and Hilbert schemes, in “Current Developments in Mathematics 2002”, International Press of Boston, 2002, pp. 39–111.
- [9] Y. Ito, Greatest common divisor of the dimensions of irreducible representations of the general linear group, *数理解析研究所講究録 1945 「組合せ論的表現論の展望」* (2015), 99–114.
- [10] Y. Ito and S. Okada, On the existence of generalized parking spaces for complex reflection groups, arXiv:1508.06846.
- [11] G. I. Lehrer, Remarks concerning linear characters of reflection groups, *Proc. Amer. Math. Soc.* **133** (2005), 3163–3169.
- [12] G. I. Lehrer and D. E. Taylor, “Unitary Reflection Groups”, Australian Mathematical Society Lecture Series Vol. 20, Cambridge University Press, 2009.
- [13] I. G. Macdonald, “Symmetric Functions and Hall Polynomials, 2nd ed.”, Oxford Univ. Press, Oxford, 1995.
- [14] P. Orlik and L. Solomon, Coxeter arrangements, in “Singularities”, *Proc. Sympos. Pure Math.* Vol. 40 Part 2, Amer. Math. Soc., 1983, pp. 269–292.
- [15] P. Orlik and L. Solomon, Arrangements defined by unitary reflection groups, *Math. Ann.* **261** (1982), 339–357.
- [16] B. Rhoades, Parking Structures: Fuss Analogs, *J. Algebraic Combin.* **40** (2014), 417–473.
- [17] M. Schönert et al., GAP – Groups, Algorithms, and Programming – version 3 release 4 patchlevel 4, Lehrstuhl D für Mathematik, Rheinisch Westfälische Technische Hochschule, Aachen, Germany, 1997.
- [18] J.-Y. Shi, “The Kazhdan–Lusztig cells in certain affine Weyl groups”, *Lecture Notes in Math.* **1179**, Springer, 1986.
- [19] E. Sommers, A family of affine Weyl group representations, *Transform. Groups* **2** (1997), 375–390.
- [20] R. P. Stanley, Hyperplane arrangements, interval orders, and trees, *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.* **93** (1996), 2620–2625.
- [21] C. Yan, Parking functions, in “Handbook of Enumerative Combinatorics”, edited by Miklos Bona, Chapman and Hall/CRC, 2015, pp. 835–893.