

# ユニタリー表現の分岐則と複素化について

(Branching laws for unitary representations and complexification)

北川 宜稔 (Masatoshi Kitagawa) \*

## 1 導入

リー群の表現論では、古くは Weyl のユニタリートリックなど、複素化を通じて異なる実形の議論に帰着させる手法が知られている。たとえば、

- Weyl のユニタリートリック
- Flensted-Jensen duality [2]
- コンパクト Clifford–Klein 形の存在条件 (Kobayashi–Ono [8])
- 離散系列表現に対する K-type の transfer [3]
- Howe duality における無限小指標の対応 [12, 9]

などがある。

この講演では、既約表現の分岐則に対して実形のとり方によらない性質が存在するかという問題について考える。具体的には、次のような問題を扱う。

問題.  $G$  を簡約型リー群、 $V$  を  $G$  の既約ユニタリー表現、 $H, H'$  を  $G$  の簡約型部分群とする。また、 $H_{\mathbb{C}}$  と  $H'_{\mathbb{C}}$  は  $G_{\mathbb{C}}$  の中で内部自己同型で移りあうものとする。このとき、二つの分岐則  $V|_H$  と  $V|_{H'}$  はどの程度「似ている」だろうか？

たとえば、 $L^2(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$  と  $L^2(\mathbb{R})$  の既約分解は、ともに無重複であり、現れるパラメーターは一次元の自由度を持つ。しかし、 $L^2(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$  は離散的なスペクトルしか持たず、 $L^2(\mathbb{R})$  は連続的なスペクトルしか持たない。

このように、離散分解するかどうかという性質は実形のとり方に依存するが、パラメーターの自由度や重複度の有界性は実形のとり方に依存しないように思われる。実際、正則離散系列表現の分岐則では、(適当な仮定の下で) 二つの分岐則に現れる重複度の最大値は一致する。これがこの講演の主結果である。

定理 1.1.  $G$  を連結なエルミート型単純リー群、 $K$  を  $G$  の極大コンパクト群、 $V$  を  $G$  の正則離散系列表現とする。  $H, H'$  を  $G$  の連結な簡約型部分群であって  $K$  の中心を含むとする。さらに、 $H$  と  $H'$  の複素化は  $G_{\mathbb{C}}$  の内部自己同型で移りあうとする。このとき、 $V|_H, V|_{H'}$  の既約分解に現れる重複度の最大値は一致する。

注意 1.2.  $G$  の複素化  $G_{\mathbb{C}}$  の存在を仮定しているが、covering の違いを無視して考えている。主に、 $G, H, H'$  が連結な場合を扱うので、リー環レベルで考えればよく、問題は起きない。

---

\* 東京大学大学院数理科学研究科 (Graduate School of Mathematical Sciences, the University of Tokyo)

表現を  $\pi : \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \rightarrow \text{End}_{\mathbb{C}}(V)$  とする．完全可約な場合，分岐則は  $\text{End}_H(V)$  でとらえることができる． $\pi(\mathcal{U}(\mathfrak{g})^H)$  は  $\text{End}_H(V)$  の部分代数になるので，大まかには  $\pi(\mathcal{U}(\mathfrak{g})^H)$  で分岐則をとらえることができると考えられる． $\pi(\mathcal{U}(\mathfrak{g})^H)$  と  $\pi(\mathcal{U}(\mathfrak{g})^{H'})$  は代数として同型なので，上の問題を考えるにあたり， $\pi(\mathcal{U}(\mathfrak{g})^H)$  でどの程度分岐則が統制できるかを調べるのは自然である． $\pi(\mathcal{U}(\mathfrak{g})^H)$  の表現  $\text{Hom}_H(W, V)$  がいつ既約になるかという問題についてもいくつかの例を紹介する．

$H$  の表現  $V, W$  に対して，重複度を  $m(W, V) := m_H(W, V) := \dim(\text{Hom}_H(W, V))$  とおく．既約表現が最高ウェイトなどでパラメーター付けされている場合には  $m(\lambda, V)$  などと略記することにする．

## 2 コンパクト群の場合

部分群がコンパクトな場合には，次のことが知られている．

**事実 2.1** (I. Penkov and V. Serganova [11]).  $G$  を連結な簡約型リー群， $K$  をその極大コンパクト部分群， $V$  を既約  $(\mathfrak{g}, K)$ -加群， $H, H'$  を  $K$  の閉部分群とする． $H, H'$  の複素化は  $G$  の複素化の内部自己同型で移りあうとする．このとき， $V|_H, V|_{H'}$  に現れる重複度の最大値は一致する．

$H$  が非コンパクトな場合への一般化を考えるため，証明の概略を説明する．証明には次の二つの定理を用いる．

**事実 2.2** (Jacobson density theorem).  $\mathcal{A}$  を  $\mathbb{C}$ -代数， $V$  を高々可算次元な既約  $\mathcal{A}$ -加群とする．このとき，任意の有限次元部分空間  $X \subset V$  に対して，次の写像は全射になる．

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A} & \rightarrow & \text{Hom}_{\mathbb{C}}(X, V) \\ \downarrow & & \downarrow \\ a & \mapsto & (x \mapsto ax) \end{array}$$

**事実 2.3** (Amitsur–Levitzki theorem).  $M_n(\mathbb{C})$  を  $n \times n$  行列全体の集合とする．任意の自然数  $k$  と  $X_1, X_2, \dots, X_k \in M_n(\mathbb{C})$  に対して，

$$s_k(X_1, X_2, \dots, X_k) := \sum_{w \in \mathfrak{S}_k} \text{sgn}(w) X_{w(1)} X_{w(2)} \cdots X_{w(k)}$$

とおく．ここで， $k$  次対称群を  $\mathfrak{S}_k$ ，その符号を  $\text{sgn}$  とした．このとき， $s_{2n}$  は恒等的に 0 である．また， $s_{2n-1}$  が 0 にならない  $X_1, X_2, \dots, X_{2n-1} \in M_n(\mathbb{C})$  が存在する．

**定義 2.4.**  $\mathbb{C}$ -代数  $\mathcal{A}$  に対して，

$$\text{PI.deg}(\mathcal{A}) := \min\{n \in \mathbb{N} : \mathcal{A} \text{ 上で } s_{2n} \text{ は恒等的に } 0\}$$

と定義する．(つまり， $\text{PI.deg}(M_n(\mathbb{C})) = n$  となる．)

Amitsur–Levitzki theorem より行列環の大きさを，恒等式で区別することができる．したがって，代数の既約表現の大きさを  $\text{PI.deg}$  で評価することができる．

**命題 2.5.**  $\mathcal{A}$  を高々可算次元な  $\mathbb{C}$ -代数とする．既約表現の族  $\{(\pi_\lambda, X_\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda}$  であって， $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} \ker(\pi_\lambda) = 0$  を満たすものが存在したとする．このとき， $\sup_{\lambda \in \Lambda} \{\dim(X_\lambda)\} = \text{PI.deg}(\mathcal{A})$  となる．

証明. [事実 2.1 の証明] 表現  $V$  を定める  $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$  から  $\text{End}_{\mathbb{C}}(V)$  への写像を  $\pi$  とする.  $V$  は既約  $(\mathfrak{g}, K)$ -加群なので,  $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ -加群としても既約である. したがって, Jacobson density theorem より, 任意の  $H$  の有限次元既約表現  $F \in \widehat{H}$  に対して,  $\text{Hom}_H(F, V)$  は既約  $\mathcal{U}(\mathfrak{g})^H$ -加群になる.

$V$  は  $H$  の表現として完全可約なので,

$$V \simeq \bigoplus_{F \in \widehat{H}} F \otimes_{\mathbb{C}} \text{Hom}_H(F, V)$$

と既約分解する. したがって,  $\pi(\mathcal{U}(\mathfrak{g})^H)$  の既約表現の族  $\{\text{Hom}_H(F, V)\}_{F \in \widehat{H}}$  は命題 2.5 の仮定を満たす. よって,  $\text{PI.deg}(\pi(\mathcal{U}(\mathfrak{g})^H)) = \sup_{F \in \widehat{H}} \{m_H(F, V)\}$  となる. 同様にして,  $\text{PI.deg}(\pi(\mathcal{U}(\mathfrak{g})^{H'})) = \sup_{F' \in \widehat{H'}} \{m_{H'}(F', V)\}$  となる.

$\ker(\pi)$  は  $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$  の両側イデアルなので, 特に  $\text{Ad}(G_{\mathbb{C}})$  不変である. したがって, 仮定より

$$\begin{aligned} \pi(\mathcal{U}(\mathfrak{g})^H) &\simeq (\mathcal{U}(\mathfrak{g})/\ker(\pi))^{H_{\mathbb{C}}} \\ &\simeq (\mathcal{U}(\mathfrak{g})/\ker(\pi))^{H'_{\mathbb{C}}} \\ &\simeq \pi(\mathcal{U}(\mathfrak{g})^{H'}) \end{aligned}$$

となる. よって,  $\sup_{F \in \widehat{H}} \{m_H(F, V)\} = \sup_{F' \in \widehat{H'}} \{m_{H'}(F', V)\}$  が示された.  $\square$

証明の中で使われたことをまとめると,

1.  $\text{Hom}_H(F, V)$  は既約  $\mathcal{U}(\mathfrak{g})^H$ -加群,
2.  $\text{PI.deg}(\pi(\mathcal{U}(\mathfrak{g})^H)) = \sup_{F \in \widehat{H}} \{m(F, V)\}$ ,
3.  $\ker(\pi)$  は  $\text{Ad}(G_{\mathbb{C}})$  不変,

となる. このうち, 3. は  $H$  が非コンパクトでなくとも成り立つが, 1. は  $H$  の既約表現が有限次元であることを使っているため, 非コンパクトな場合には成り立つとは限らない.  $V$  が  $(\mathfrak{h}, K \cap H)$ -加群として完全可約なら, 2. を  $\leq$  に置き換えたものがいつでも成り立つ. 1. が成り立てば, 逆の不等号も従う. よって, 非コンパクトな  $H$  に対して一般化を行う場合, 1. の既約性が成り立つかどうかが問題になる. 実際, 成り立たない例を作ることができる (例 3.1). 一方で, よいクラスの表現に対しては 1. が成り立つことがある. これについては, 3 節で扱う.

以上の事柄について一度まとめておく.

命題 2.6.  $G$  を連結な簡約型リー群,  $K$  を  $G$  の極大コンパクト部分群,  $(\pi, V)$  を既約  $(\mathfrak{g}, K)$ -加群,  $H$  を  $G$  の簡約型部分群とする.  $V$  は  $(\mathfrak{h}, H \cap K)$ -加群として完全可約と仮定する. このとき,

$$\text{PI.deg}(\pi(\mathcal{U}(\mathfrak{g})^H)) \leq \sup_{F \in \widehat{H}} \{m(F, V)\}$$

となる. ここで  $\widehat{H}$  で  $H$  の既約  $(\mathfrak{h}, H \cap K)$ -加群の同値類全体を表した. さらに, 任意の  $F \in \widehat{H}$  に対して,  $\text{Hom}_{\mathfrak{h}, H \cap K}(F, V)$  が 0 または既約  $\mathcal{U}(\mathfrak{g})^H$ -加群となる場合には, 等号が成立する.

### 3 $\mathcal{U}(\mathfrak{g})^H$ -加群の既約性

$\mathcal{U}(\mathfrak{g})^H$ -加群  $\text{Hom}_{\mathfrak{h}, H \cap K}(F, V)$  が既約になる例, ならない例を紹介する.

### 3.1 既約でない例

離散的に分解するような分岐則であって,  $\text{Hom}_{\mathfrak{h}, H \cap K}(F, V)$  が既約にならないような例を紹介する.

$(\omega, V)$  を  $\text{Sp}(2n, \mathbb{R}) (= G)$  の Weil 表現の Even な方 (つまり, 極小表現) とする. 実際には  $\text{Sp}(2n, \mathbb{R})$  の二重被覆の表現だが, 簡単のため省略する.  $\text{Sp}(2n, \mathbb{R})$  の dual pair,  $\text{Sp}(n, \mathbb{R}), \text{O}(2)$  を考える.  $H$  をこの  $\text{Sp}(n, \mathbb{R})$  とする.

$$\begin{aligned} G = \text{Sp}(2n, \mathbb{R}) &\supset \text{Sp}(n, \mathbb{R}) \times \text{Sp}(n, \mathbb{R}) \\ &\cup \quad \cup \\ \text{Sp}(n, \mathbb{R}) \cdot \text{O}(2) &\supset H = \text{Sp}(n, \mathbb{R}) \end{aligned}$$

例 3.1. 上の設定の下で,  $\omega|_H$  は離散分解し, 重複度の最大値は 2 になる. さらに,  $\omega(\mathcal{U}(\mathfrak{g})^H)$  は可換になる. したがって, 適当な既約表現  $F$  に対して,  $\text{Hom}_{\mathfrak{h}, H \cap K}(F, V)$  は既約でない.

証明.  $\omega|_{\text{Sp}(n, \mathbb{R}) \cdot \text{O}(2)}$  は離散分解し次のように既約分解することが知られている [5].

$$\omega|_{\text{Sp}(n, \mathbb{R}) \cdot \text{O}(2)} \simeq \bigoplus \pi \otimes_{\mathbb{C}} \theta(\pi)$$

$\pi$  は  $\text{Sp}(n, \mathbb{R})$  の既約ユニタリー最高ウェイト加群を動き,  $\theta(\pi)$  は  $\pi$  から一意に定まる  $\text{O}(2)$  の既約表現となる.  $\text{O}(2)$  の既約表現は 1 次元表現二つを除いて 2 次元になる. よって  $\omega|_H$  の既約分解に現れる重複度の最大値は 2 となる.

不変式論より,  $\omega(\mathcal{U}(\mathfrak{g})^H) = \omega(\mathcal{U}(\mathfrak{so}(2)))$  となるので,  $\omega(\mathcal{U}(\mathfrak{g})^H)$  は可換になる.  $\square$

### 3.2 既約になる例

$\mathcal{U}(\mathfrak{g})^H$ -加群が既約になる例について簡単にまとめる. この講演で紹介する  $\mathcal{U}(\mathfrak{g})^H$ -加群の既約性の証明は, コンパクト群へ制限する場合に帰着させる方法で行われる.

よく知られている方法としては, dual pair の理論がある. see saw pair の手法を用いると, 分岐則の問題を別の分岐則に帰着させることができる. 特に, 最高ウェイト加群の分岐則の場合にはコンパクト群への制限に帰着され, したがって  $\mathcal{U}(\mathfrak{g})^H$ -加群の既約性を示すことができる.

ここで紹介するのは, Zuckerman の導来関手加群使った手法である.  $(\mathfrak{g}, K)$ -加群に対して, 忘却関手で  $(\mathfrak{g}, H \cap K)$ -加群にし, その後 Zuckerman の導来関手を作用させて  $(\mathfrak{g}, H)$ -加群にする. これは K-type の transfer と呼ばれ, 新しい表現を作りだしたり, 異なる実形の間の表現を関連付けるために用いられる (たとえば, [10, 14] など).

K-type の transfer を用いて  $\mathcal{U}(\mathfrak{g})^H$  の性質を調べる.  $V$  を既約  $(\mathfrak{g}, K)$ -加群とする.  $V$  は  $(\mathfrak{h}, K \cap H)$ -加群として, 完全可約かつ admissible であるとする. すなわち, 各既約成分の重複度が有限になっているとする.  $V|_H$  の既約分解は

$$V|_H \simeq \bigoplus_{W \in \widehat{H}} W \otimes_{\mathbb{C}} \text{Hom}_H(W, V)$$

となる. これに, Zuckerman の導来関手を作用させ,  $R^i \Gamma_{K \cap H}^H(V)$  を得る. ここで,  $R^i \Gamma_{K \cap H}^H$  は  $H$ -finite vector を取る関手の導来関手とした.  $V|_H$  の既約分解から,

$$R^i \Gamma_{K \cap H}^H(V) \simeq \bigoplus_{W \in \widehat{H}} R^i \Gamma_{K \cap H}^H(W) \otimes_{\mathbb{C}} \text{Hom}_H(W, V)$$

となる．これは， $H$ -加群， $\mathcal{U}(\mathfrak{g})^H$ -加群としての分解になっている．

まずは，一般的な形で命題を述べる．

命題 3.2. ある  $i$  に対して， $R^i\Gamma_{K\cap H}^H(W) \neq 0$  とする．このとき， $\mathrm{Hom}_H(W, V)$  は *finite length* であり，仮定を満たすような  $W$  全体を動かしたとき，*length* は有界になる．さらに， $R^i\Gamma_{K\cap H}^H(V)$  が既約  $(\mathfrak{g}, H)$ -加群であるとする， $\mathrm{Hom}_H(W, V)$  は既約  $\mathcal{U}(\mathfrak{g})^H$ -加群となる．

証明. まずは，前半を示す． $R^i\Gamma_{K\cap H}^H(V)$  は無限小指標を持ち， $H$ -admissible である．したがって，finite length になる． $R^i\Gamma_{K\cap H}^H(W)$  の既約部分表現  $X$  をとる．上で述べた  $R^i\Gamma_{K\cap H}^H(V)$  の分解から， $\mathcal{U}(\mathfrak{g})^H$ -加群の単射準同型  $\mathrm{Hom}_H(W, V) \rightarrow \mathrm{Hom}_H(X, R^i\Gamma_{K\cap H}^H(V))$  が定まる．したがって， $\mathrm{Hom}_H(W, V)$  の length は  $R^i\Gamma_{K\cap H}^H(V)$  の length で抑えられる．

同様にして，後半の主張も示される． □

ユニタリー表現を考える場合， $R^i\Gamma_{K\cap H}^H(W) \neq 0$  となるためには，Vogan–Zuckerman の定理 [13] より  $W \simeq A_q(\lambda)$  となることが必要十分条件であることがわかる．もう一つの条件， $R^i\Gamma_{K\cap H}^H(V)$  の既約性を確かめるのは一般に難しい．離散系列表現が離散的に分解する場合については，Duflo–Vargas [1], Gross–Wallach [3] の結果から次のことがわかる．

事実 3.3.  $G$  を連結な線形半単純リー群， $V$  を  $G$  の離散系列表現， $H$  を  $G$  の連結な対称部分群とする．さらに， $V|_H$  は離散分解する（したがって，*admissible*）と仮定する．このとき， $R^S\Gamma_{H\cap K}^H(V)$  は *cohomological parabolic induction* の形で書け，さらに既約になる．また， $V|_H$  の既約分解に現れる表現は  $H$  の離散系列表現であり， $R^S\Gamma_{H\cap K}^H$  を作用させると既約な有限次元表現になる．ここで， $S = \dim(H/(H \cap K))/2$  とした．

この定理により， $\mathcal{U}(\mathfrak{g})^H$ -加群の既約性が導かれる．

定理 3.4.  $G$  を連結な線形半単純リー群， $V$  を  $G$  の離散系列表現， $H$  を  $G$  の連結な対称部分群とする．さらに， $V|_H$  は離散分解すると仮定する．このとき， $H$  の任意の離散系列表現  $W$  に対して， $\mathrm{Hom}_H(W, V)$  は 0 または，既約  $\mathcal{U}(\mathfrak{g})^H$ -加群となる．

注意 3.5.  $R^S\Gamma_{H\cap K}^H(W)$  は有限次元表現になるので，これが非零だと仮定すると  $W$  の無限小指標は有限次元表現と同じものでなくてはならない．したがって，K-type の transfer を直接  $V$  に適応する場合，定理の  $G$  が線形という仮定は必要になる．

## 4 正則離散系列表現の離散分岐則

正則離散系列表現が離散的に分解するような場合には，実形のとり方によらずに重複度がほとんど同じような振る舞いをするを見る．以下この節では， $G$  を連結なエルミート型単純リー群， $K$  を  $G$  の極大コンパクト部分群とする．また， $\mathfrak{k}_{\mathbb{C}}$  の中心の元  $Z$  であって， $\mathrm{ad}(Z)$  の固有値が  $-1, 0, 1$  となるものを固定する． $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{p}_{-} \oplus \mathfrak{k}_{\mathbb{C}} \oplus \mathfrak{p}_{+}$  を  $\mathrm{ad}(Z)$  による固有空間分解で，それぞれ固有値  $-1, 0, 1$  に対応するものとする． $\mathfrak{k}$  から Cartan 部分代数  $\mathfrak{t}$  と  $\mathfrak{k}_{\mathbb{C}}$  の Borel 部分代数  $\mathfrak{b}$  をとり固定する．

$\mathrm{ad}(\mathfrak{k}_{\mathbb{C}})$  不変な  $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$  の部分空間  $\mathfrak{s}$  に対して， $\Delta(\mathfrak{s}, \mathfrak{k}_{\mathbb{C}})$  を  $\mathfrak{s}$  のルート分解に現れるルート全体の集合とする． $\rho$  を  $\mathfrak{b} \oplus \mathfrak{p}_{+}$  から定まる正ルートの和とする．

## 4.1 正則離散系列表現

正則離散系列表現について使う事実を簡単にまとめる．

$F_{\mathfrak{k}}(\lambda)(= F(\lambda))$  を最高ウェイトが  $\lambda$  の  $\mathfrak{k}$  の既約ユニタリー表現とする． $\zeta$  を  $\mathfrak{k}$  の非自明なユニタリー指標に対応する最高ウェイトとする．(この講演では正規化の仕方は全く影響がないので，どのユニタリー指標をとっても良い．)

$\mathfrak{k}$  の既約ユニタリー表現  $F(\lambda)$  に対して，一般化 Verma 加群を  $M_{\mathfrak{g}}(\lambda)(= M(\lambda)) := \mathcal{U}(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}) \otimes_{\mathcal{U}(\mathfrak{p}_+ \oplus \mathfrak{k}_{\mathbb{C}})} F(\lambda)$  で定める． $M_{\mathfrak{g}}(\lambda)$  の最大真部分加群を  $N_{\mathfrak{g}}(\lambda)$ ， $L_{\mathfrak{g}}(\lambda) := M_{\mathfrak{g}}(\lambda)/N_{\mathfrak{g}}(\lambda)$  とする．

事実 4.1. 上の設定に加え，任意の  $\alpha \in \Delta(\mathfrak{p}_+, \mathfrak{k}_{\mathbb{C}})$  に対して， $(\lambda + \rho, \alpha) < 0$  と仮定する．このとき， $M_{\mathfrak{g}}(\lambda)$  は既約であり， $\mathfrak{g}$  不変なエルミート内積を許容する．

事実 4.1 の仮定を満たすとき， $M_{\mathfrak{g}}(\lambda)$  を正則離散系列表現と呼ぶ．

事実 4.2. 任意の  $\alpha \in \Delta(\mathfrak{p}_+, \mathfrak{k}_{\mathbb{C}})$  に対して， $2(\lambda, \alpha)/(\alpha, \alpha) \in \{0, 1, 2, \dots\}$  と仮定する．このとき， $L_{\mathfrak{g}}(\lambda)$  は有限次元既約表現である．

正則離散系列表現の分岐則について，次のことが知られている [4, 6, 7]．

事実 4.3.  $H$  を  $G$  の連結な簡約型部分群とし， $\mathfrak{h} \ni \sqrt{-1}Z$  とする．このとき，任意の正則離散系列表現  $M_{\mathfrak{g}}(\lambda)$  を  $H$  に制限したものは離散分解する．また， $\mathfrak{k} \cap \mathfrak{h}$  の表現として

$$S(\mathfrak{p}_- \cap \mathfrak{h}^{\perp}) \otimes_{\mathbb{C}} F_{\mathfrak{k}}(\lambda) \simeq \bigoplus m(\mu) F_{\mathfrak{k} \cap \mathfrak{h}}(\mu)$$

と既約分解しているとき， $M_{\mathfrak{g}}(\lambda)|_H$  は次のように既約分解する．

$$M_{\mathfrak{g}}(\lambda)|_H \simeq \bigoplus m(\mu) M_{\mathfrak{h}}(\mu)$$

さらに，各既約成分は  $H$  の正則離散系列表現になる．

## 4.2 有限次元表現への帰着

一般化 Verma 加群にパラメーターを入れて，正則離散系列に対する分岐則を有限次元既約表現に帰着させる．

$\mathfrak{k}$  の有限次元既約表現  $F_{\mathfrak{k}}(\lambda_0)$  を固定する．一般化 Verma 加群の族  $M_{\mathfrak{g}}(\lambda_0 + z\zeta)(z \in \mathbb{C})$  を考える．パラメーター  $z$  によらず次のような  $(\mathfrak{k}_{\mathbb{C}})_{ss} \oplus \mathfrak{p}_-$ -加群の canonical な同型が存在する．

$$M_{\mathfrak{g}}(\lambda_0 + z\zeta) \simeq S(\mathfrak{p}_-) \otimes_{\mathbb{C}} F_{\mathfrak{k}}(\lambda_0)$$

ここで， $(\mathfrak{k}_{\mathbb{C}})_{ss}$  で  $\mathfrak{k}_{\mathbb{C}}$  の半単純部分を表した．表現  $M_{\mathfrak{g}}(\lambda_0 + z\zeta)$  を定める写像とこの同型による同一視で， $\pi_z : \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \rightarrow \text{End}_{\mathbb{C}}(S(\mathfrak{p}_-) \otimes_{\mathbb{C}} F_{\mathfrak{k}}(\lambda_0))$  を定める．

補題 4.4. 任意の  $X \in \mathcal{U}(\mathfrak{g})$  に対して， $\pi_z(X) : \mathbb{C} \rightarrow \text{End}_{\mathbb{C}}(S(\mathfrak{p}_-) \otimes_{\mathbb{C}} F_{\mathfrak{k}}(\lambda_0))$  は多項式である．すなわち， $X_0, X_1, \dots, X_d \in \text{End}_{\mathbb{C}}(S(\mathfrak{p}_-) \otimes_{\mathbb{C}} F_{\mathfrak{k}}(\lambda_0))$  が存在して，

$$\pi_z(X) = \sum_{i=0}^d z^i X_i$$

となる．

$\mathfrak{p}_+$  の元について条件を確かめればいいが，これは  $S(\mathfrak{p}_-) \otimes_{\mathbb{C}} F_{\mathfrak{k}}(\lambda_0)$  の元への作用を具体的に計算すればできる．

事実 4.2 より， $L_{\mathfrak{g}}(\lambda_0 + z\zeta)$  が有限次元既約表現になるような  $z$  の集合  $Z_f$  は  $\mathbb{C}$  の中で Zariski dense である．したがって，正則離散系列表現の性質は有限次元既約表現の性質に帰着することができる．

補題 4.4 から次の補題が従う．

補題 4.5. 上記の設定の下で， $\bigcap_{z \in Z_f} N_{\mathfrak{g}}(\lambda_0 + z\zeta) = 0$  となる．さらに， $M_{\mathfrak{h}}(\mu_0), M_{\mathfrak{g}}(\lambda_0)$  が正則離散系列になるようなパラメーター  $\mu_0, \lambda_0$  をとると，次の等式が成り立つ．

$$m_H(M_{\mathfrak{h}}(\mu_0), M_{\mathfrak{g}}(\lambda_0)) = \lim_{z \rightarrow \infty, z \in Z_f} m_H(L_{\mathfrak{h}}(\mu_0 + z\zeta), L_{\mathfrak{g}}(\lambda_0 + z\zeta))$$

証明.  $i$  次の対称積を  $S^i(\cdot)$  とする． $v \in S^i(\mathfrak{p}_-) \otimes_{\mathbb{C}} F_{\mathfrak{k}}(\lambda_0)$  に対して， $v \in N_{\mathfrak{g}}(\lambda_0 + z\zeta)$  となるための必要十分条件は

$$\pi_z(\mathfrak{p}_+ \mathfrak{p}_+ \cdots \mathfrak{p}_+)v = 0$$

となることである．ここで， $\pi_z$  の中は  $\mathfrak{p}_+$  の  $i$  個の積である．この条件は，多項式の零点になるという条件で書き直すことができる．一方，一般の  $z$  にたいしては， $N_{\mathfrak{g}}(\lambda_0 + z\zeta) = 0$  なので，この多項式は恒等的に 0 ではない．したがって， $v \in N_{\mathfrak{g}}(\lambda_0 + z\zeta)$  となるような  $z$  は有限個になる．

後半は前半と事実 4.3 から従う．実際，前半の主張から任意の自然数  $i$  に対して十分大きな  $z$  を取ると， $\mathfrak{k} \cap \mathfrak{h}$ -加群として

$$(L_{\mathfrak{g}}(\lambda_0 + z\zeta)/(\mathfrak{p}_- \cap \mathfrak{h})L_{\mathfrak{g}}(\lambda_0 + z\zeta))(i) \simeq (M_{\mathfrak{g}}(\lambda_0 + z\zeta)/(\mathfrak{p}_- \cap \mathfrak{h})M_{\mathfrak{g}}(\lambda_0 + z\zeta))(i)$$

となる．ここで， $Z$  の固有値が  $-i + \lambda_0(Z) + z\zeta(Z)$  の固有空間を  $(\cdot)(i)$  と表した．また，

$$M_{\mathfrak{g}}(\lambda_0 + z\zeta)/(\mathfrak{p}_- \cap \mathfrak{h})M_{\mathfrak{g}}(\lambda_0 + z\zeta) \simeq S(\mathfrak{p}_- \cap \mathfrak{h}^{\perp}) \otimes_{\mathbb{C}} F_{\mathfrak{k}}(\lambda_0 + z\zeta)$$

となる． $S(\mathfrak{p}_- \cap \mathfrak{h}^{\perp}) \otimes_{\mathbb{C}} F_{\mathfrak{k}}(\lambda_0 + z\zeta)$  は  $z$  を動かしても指標をテンソル積する程度の違いしかないので，事実 4.3 から後半の主張が従う．

□

導入で考えていた問題に戻る． $H, H'$  を  $G$  の連結な簡約型部分群で， $\mathfrak{h}, \mathfrak{h}'$  は  $\sqrt{-1}Z$  を含むとする．さらに  $G_{\mathbb{C}}$  の中で  $H_{\mathbb{C}}$  と  $H'_{\mathbb{C}}$  は内部自己同型で移りあうとする． $G$  の有限次元表現は  $G_{\mathbb{C}}$  の表現にまで伸びることが知られている． $G_{\mathbb{C}}$  の表現であれば，内部自己同型で動かしても分岐則は不変である．補題 4.5 と合わせると，次の定理が示される．

定理 4.6.  $M_{\mathfrak{g}}(\lambda_0)$  は正則離散系列と仮定する．このとき，次の等式が成り立つ．

$$\sup_{\mu} \{m_H(M_{\mathfrak{h}}(\mu), M_{\mathfrak{g}}(\lambda_0))\} = \sup_{\mu'} \{m_{H'}(M_{\mathfrak{h}'}(\mu'), M_{\mathfrak{g}}(\lambda_0))\}$$

定理 4.7. 上記の設定に加え， $H'$  をコンパクトと仮定する． $H_{\mathbb{C}}$  を  $H'_{\mathbb{C}}$  に移す内部自己同型を  $\text{Ad}(g)$  とし，Borel 部分群を Borel 部分群に，極大トーラスを極大トーラスに移すとする．誘導されるウェイトの空間の間の写像を  $\text{Ad}^*(g)$  とする．このとき，次の等式が成り立つ．

$$m_H(M_{\mathfrak{h}}(\mu), M_{\mathfrak{g}}(\lambda_0)) = \lim_{z \rightarrow \infty, z \in Z_f} m'_{H'}(M_{\mathfrak{h}'}(\text{Ad}^*(g^{-1})(\mu + z\zeta) - z\zeta), M_{\mathfrak{g}}(\lambda_0))$$

対称対の  $\varepsilon$ -family の場合や、具体的に  $H, H'$  が与えられた場合には  $\text{Ad}(g)$  を具体的に計算することは難しい。

同様の手法で、 $\mathcal{U}(\mathfrak{g})^H$ -加群の既約性を示すことができる。

**定理 4.8.**  $M_{\mathfrak{g}}(\lambda_0)$  の既約分解に現れる正則離散系列表現  $M_{\mathfrak{h}}(\mu_0)$  を取り固定する。このとき、 $\text{Hom}_H(M_{\mathfrak{h}}(\mu_0 + z\zeta), M_{\mathfrak{g}}(\lambda_0 + z\zeta))$  は有限個の  $z$  を除いて既約  $\mathcal{U}(\mathfrak{g})^H$ -加群である。

**証明.**  $\mathcal{U}(\mathfrak{g})^H$  は  $\mathfrak{h}$  の元と可換なので、特に  $\mathfrak{p}_- \cap \mathfrak{h}$  の元とも可換である。よって、 $(\mathfrak{p}_- \cap \mathfrak{h})S(\mathfrak{p}_-) \otimes_{\mathbb{C}} F_{\mathfrak{k}}(\lambda_0)$  を不変にする。したがって、 $\mathcal{U}(\mathfrak{g})^H$  の表現の族  $(\pi_z, \text{Hom}_{\mathfrak{k} \cap \mathfrak{h}}(F_{\mathfrak{k} \cap \mathfrak{h}}(\mu_0), S(\mathfrak{p}_- \cap \mathfrak{h}^\perp) \otimes_{\mathbb{C}} F_{\mathfrak{k}}(\lambda_0)))$  を得る。この族も  $z$  に多項式的に依存している。

表現  $\pi_z$  が既約であることと、 $\pi_z(\mathcal{U}(\mathfrak{g})^H)$  の次元が  $d := \dim(\text{End}_{\mathbb{C}}(\pi_z))$  と等しいことは同値である。 $z' \in Z_f$  が十分大きいとき、コンパクト群の場合の既約性の結果から  $\pi_{z'}(\mathcal{U}(\mathfrak{g})^H)$  の次元は  $d$  と等しくなる。よって、 $X_1, X_2, \dots, X_d \in \mathcal{U}(\mathfrak{g})^H$  で、 $\pi_{z'}(X_1), \pi_{z'}(X_2), \dots, \pi_{z'}(X_d)$  が一次独立となるものが存在する。一次独立性は多項式が非零であるという性質で特徴づけることができるので、 $\pi_z(X_1), \pi_z(X_2), \dots, \pi_z(X_d)$  は有限個の  $z$  を除いて一次独立になる。したがって、有限個の  $z$  を除いて  $\text{Hom}_H(M_{\mathfrak{h}}(\mu_0 + z\zeta), M_{\mathfrak{g}}(\lambda_0 + z\zeta))$  は既約である。□

## 参考文献

- [1] Michel Duflo and Jorge Antonio Vargas. Branching laws for square integrable representations. *Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci.*, 86(3):49–54, 2010.
- [2] Mogens Flensted-Jensen. Discrete series for semisimple symmetric spaces. *Ann. of Math. (2)*, 111(2):253–311, 1980.
- [3] B. Gross and N. Wallach. Restriction of small discrete series representations to symmetric subgroups. In *The mathematical legacy of Harish-Chandra (Baltimore, MD, 1998)*, volume 68 of *Proc. Sympos. Pure Math.*, pages 255–272. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2000.
- [4] Hans Plesner Jakobsen and Michèle Vergne. Restrictions and expansions of holomorphic representations. *J. Funct. Anal.*, 34(1):29–53, 1979.
- [5] M. Kashiwara and M. Vergne. On the Segal-Shale-Weil representations and harmonic polynomials. *Invent. Math.*, 44(1):1–47, 1978.
- [6] Toshiyuki Kobayashi. Discrete series representations for the orbit spaces arising from two involutions of real reductive Lie groups. *J. Funct. Anal.*, 152(1):100–135, 1998.
- [7] Toshiyuki Kobayashi. Multiplicity-free theorems of the restrictions of unitary highest weight modules with respect to reductive symmetric pairs. In *Representation theory and automorphic forms*, volume 255 of *Progr. Math.*, pages 45–109. Birkhäuser Boston, Boston, MA, 2008.
- [8] Toshiyuki Kobayashi and Kaoru Ono. Note on Hirzebruch’s proportionality principle. *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math.*, 37(1):71–87, 1990.
- [9] Jian-Shu Li. The correspondences of infinitesimal characters for reductive dual pairs in simple Lie groups. *Duke Math. J.*, 97(2):347–377, 1999.

- [10] Hung Yean Loke, Jia-Jun Ma, and U-Liang Tang. Transfers of K-types on local theta lifts of characters and unitary lowest weight modules. *Israel J. Math.*, 201(1):1–24, 2014.
- [11] Ivan Penkov and Vera Serganova. On bounded generalized Harish-Chandra modules. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 62(2):477–496, 2012.
- [12] Tomasz Przebinda. The duality correspondence of infinitesimal characters. *Colloq. Math.*, 70(1):93–102, 1996.
- [13] David A. Vogan, Jr. and Gregg J. Zuckerman. Unitary representations with nonzero cohomology. *Compositio Math.*, 53(1):51–90, 1984.
- [14] Nolan R. Wallach and Chen-Bo Zhu. Transfer of unitary representations. *Asian J. Math.*, 8(4):861–879, 2004.