

VISIBLE ACTIONS ON SPHERICAL NILPOTENT ORBITS

笹木 集夢 (東海大学理学部数学科)
ATSUMU SASAKI (TOKAI UNIVERSITY)

ABSTRACT. 複素単純リー環の冪零軌道に対して、内部自己同型群のコンパクト実型が可視的に作用するための必要十分条件を与える。その際に、可視的作用の誘導定理が重要な役割を果たし、本問題が線型空間に対する可視的作用の問題に帰着できることについて解説する。

1. 導入

連結な複素多様体 D におけるリー群 G の正則な作用が強可視的であるとは、次を満たす D の実部分多様体 S および D 上の反正則微分同相写像 σ が存在するときをいう¹ (cf. [9, Definition 3.3.1]) :

$$\begin{aligned} \text{(V.1)} \quad & D = G \cdot S, \\ \text{(S.1)} \quad & \sigma|_S = \text{id}_S, \\ \text{(S.2)} \quad & \sigma(x) \in G \cdot x \quad (\forall x \in D). \end{aligned}$$

複素多様体における可視的作用の概念は小林俊行氏によって導入され、表現の無重複性に対して統一的説明を与える、という理論において重要な役割を果たす (無重複性の伝播定理, [9, 12]). 一方で、可視的作用自身の研究が、対称空間、旗多様体、線型空間などの種々の設定で近年行われている (cf. [10, 11, 17, 20, 25, 26, 27, 28]).

本講演では、複素多様体として複素単純リー環の冪零軌道を扱う。 $\mathfrak{g}$ を有限次元複素単純リー環とし、 $G_{\mathbb{C}} = \text{Int } \mathfrak{g}$ を $\mathfrak{g}$ の内部自己同型群とする。元 $X \in \mathfrak{g}$ を通る $G_{\mathbb{C}}$ -軌道を $\mathcal{O}_X = G_{\mathbb{C}} \cdot X$ で表す。0 でない元 $X \in \mathfrak{g}$ が冪零元るとき、すなわち $\mathfrak{g}$ 上の線型変換 $\text{ad}(X)$ が冪零変換のとき $\mathcal{O}_X$ を冪零軌道という。複素単純リー群 $G_{\mathbb{C}}$ のコンパクトな実型 G_u をとる。このとき、次が成り立つ。

定理 1.1. 冪零軌道 $\mathcal{O}_X$ に対して、次は同値である。

- (i) $\mathcal{O}_X$ における G_u の作用は強可視的である。
- (ii) $\mathcal{O}_X$ は球多様体である。
- (iii) $\mathcal{O}_X$ の高さは3以下である。

2014 年度表現論シンポジウム (世話人: 松澤淳一氏, 示野信一氏, 夢海游 淡路島: 2014 年 11 月 25 日–28 日) における講演集。

本研究は科研費 (課題番号: 22740029) による助成を受けたものである。

¹オリジナルの定義 [9, Definition 3.3.1] では、 D の開集合が (V.1)–(S.2) を満たすとしている。本講演では、こちらの少し強い定義を採用する。

(iv) $\mathcal{O}_X$ 上のレギュラー関数全体 $\mathbb{C}[\mathcal{O}_X]$ は G_u の表現として無重複である。

ここで、 $\mathcal{O}_X$ が球多様体であるとは、 $\mathcal{O}_X$ が $G_{\mathbb{C}}$ のボレル部分群による開軌道をもつことである。また、 $\mathcal{O}_X$ の高さは (2.3), 冪零元 X から定まる $\mathfrak{sl}_2$ -triple に含まれる半単純元 H に対して線型変換 $\text{ad}(H)$ の固有値の最大値を指す ((2.3) 参照)。

定理 1.1 において、(ii) と (iii) の同値性は Panyushev [16] によって示された (事実 2.1 参照)。 (ii) $\Rightarrow$ (iv) は Cartan–Weyl の最高ウェイト理論によりしたがう。その逆 (iv) $\Rightarrow$ (ii) は Vinberg [30] によって示された (cf. [29])。 (i) $\Rightarrow$ (iv) は小林の無重複性の伝播定理 [9, 12] により証明される。 (iii) $\Rightarrow$ (i) が示されると定理 1.1 の証明が完了する。

本講演では、複素単純リー環の冪零軌道が高さ 3 以下のときにコンパクト実型が強可視的に作用すること ((iii) $\Rightarrow$ (i)) について解説する。特に、本主題がある冪零部分環における作用の強可視性により保証されることに焦点をあてる。

2. 準備

冪零軌道における作用を考察するために、冪零軌道を以下で与える別の方法で実現する。

2.1. $\mathcal{N}$ を $\mathfrak{g}$ の冪零元全体のなす錐とし、 $\mathcal{S}$ を半単純元全体とする。元 $X \in \mathcal{N}^* = \mathcal{N} - \{0\}$ に対し、 $\mathfrak{sl}_2$ -triple をなす $\{H, X, Y\}$ を、つまり、 $[H, X] = 2X$, $[H, Y] = -2Y$, $[X, Y] = H$ を満たすものを選ぶことができる (Jacobson–Morozov)。Kostant と Mal'cev により、冪零軌道 $\mathcal{O}_X$ から半単純軌道 $\mathcal{O}_H$ へ写像 Φ が (2.1) によって得られる。特に、 Φ は単射である。

(2.1)

$$\begin{array}{ccccc} \Phi: & G_{\mathbb{C}} \backslash \mathcal{N}^* & \xrightarrow{\text{Kostant} \atop 1:1} & G_{\mathbb{C}} \backslash \{\mathfrak{g} \text{ 内の } \mathfrak{sl}_2\text{-triples}\} & \xrightarrow{\text{Mal'cev}} & G_{\mathbb{C}} \backslash \mathcal{S} \\ & \Downarrow & & \Downarrow & & \Downarrow \\ & \mathcal{O}_X & \mapsto & \{H, X, Y\} & \mapsto & \mathcal{O}_H = G_{\mathbb{C}} \cdot H \end{array}$$

次に、 $\mathcal{O}_X$ から定まる半単純軌道 $\Phi(\mathcal{O}_X)$ の元 H に対して線型変換 $\text{ad}(H)$ による固有空間分解を考える。 $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ の表現論から、 $\text{ad}(H)$ の固有値はすべて整数である。いま、固有値 $m \in \mathbb{Z}$ に対する $\text{ad}(H)$ の固有空間を

$$\mathfrak{g}(m) = \{Z \in \mathfrak{g} : [H, Z] = mZ\}$$

で表す。このとき、リー環 $\mathfrak{g}$ は次のように固有空間分解される。

$$(2.2) \quad \mathfrak{g} = \bigoplus_{m \in \mathbb{Z}} \mathfrak{g}(m)$$

特に、この分解は $\mathbb{Z}$ による次数付けを与える。

この次数付けは半単純元 $H \in \Phi(\mathcal{O}_X)$ の選び方に依らない．ゆえに，冪零軌道 $\mathcal{O}_X$ で決定される．そこで，

$$(2.3) \quad \text{ht}(\mathcal{O}_X) := \max\{m \in \mathbb{Z} : \mathfrak{g}(m) \neq \{0\}\}$$

と定義する．これを，冪零軌道 $\mathcal{O}_X$ の高さという ([16, Section 2]). 定義より $X \in \mathfrak{g}(2)$ である．よって， $\text{ht}(\mathcal{O}_X) \geq 2$ である．

Panyushev は冪零軌道が球多様体であるための必要十分条件を冪零軌道の高さによって与えた．

事実 2.1 ([16, Theorem 3.1]). 冪零軌道 $\mathcal{O}_X$ に対して， $\mathcal{O}_X$ が球多様体であるための必要十分条件は $\text{ht}(\mathcal{O}_X) \leq 3$ である．

2.2. $\mathbb{Z}$ による次数付け (2.2) から次の放物型部分環 $\mathfrak{q}$ およびそのレビ部分環 $\mathfrak{l}$ が定義される：

$$(2.4) \quad \mathfrak{q} := \bigoplus_{m \geq 0} \mathfrak{g}(m),$$

$$(2.5) \quad \mathfrak{l} := \mathfrak{g}(0) = \mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(H).$$

特に， $\mathfrak{l}$ は簡約リー環である．

次に， $\mathfrak{g}$ の冪零部分環 $\mathfrak{n}$ を

$$(2.6) \quad \mathfrak{n} := \bigoplus_{m \geq 2} \mathfrak{g}(m)$$

で定義する．次数付け (2.2) により， $\mathfrak{n}$ は $\mathfrak{q}$ -加群である．特に， $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ の表現論から冪零元 $X \in \mathfrak{n}$ を用いて次のように表される：

$$(2.7) \quad [\mathfrak{q}, X] = \mathfrak{n}.$$

2.3. $Q_{\mathbb{C}}$ を $G_{\mathbb{C}}$ の放物型部分群で $\mathfrak{q}$ をリー環にもつものとする．この $Q_{\mathbb{C}}$ は $\mathfrak{n}$ に作用する．そこで， $G_{\mathbb{C}}$ -同変な写像 φ を次で定義する：

$$(2.8) \quad \varphi : G_{\mathbb{C}} \times_{Q_{\mathbb{C}}} \mathfrak{n} \rightarrow \mathfrak{g}, \quad (x, Z) \mapsto x \cdot Z.$$

ここで， X を通る $Q_{\mathbb{C}}$ -軌道を $\mathfrak{n}^{\circ}$ とおく：

$$(2.9) \quad \mathfrak{n}^{\circ} := Q_{\mathbb{C}} \cdot X.$$

この $\mathfrak{n}^{\circ}$ は (2.7) から $\mathfrak{n}$ の開集合となる．このとき，冪零軌道 $\mathcal{O}_X$ は次のように表される．

命題 2.2. $\mathcal{O}_X = \varphi(G_{\mathbb{C}} \times_{Q_{\mathbb{C}}} \mathfrak{n}^{\circ})$.

Proof. $\varphi(G_{\mathbb{C}} \times_{Q_{\mathbb{C}}} \mathfrak{n}^{\circ}) = \varphi(G_{\mathbb{C}} \times_{Q_{\mathbb{C}}} (Q_{\mathbb{C}} \cdot X)) = G_{\mathbb{C}} \cdot X = \mathcal{O}_X$. $\square$

次に， $L_{\mathbb{C}}$ を $Q_{\mathbb{C}}$ のレビ部分群で $\mathfrak{l}$ をリー環にもつものとする． $L_{\mathbb{C}}$ のコンパクト実型として $L_u := L_{\mathbb{C}} \cap G_u$ を選ぶ．このとき，包含写像 $G_u \hookrightarrow G_{\mathbb{C}}$ は旗多様体としての同型 $G_u/L_u \simeq G_{\mathbb{C}}/Q_{\mathbb{C}}$ を導く．よって，旗多様体上の G_u -同変な正則ベクトル束として次の同型を得る：

$$G_u \times_{L_u} \mathfrak{n} \simeq G_{\mathbb{C}} \times_{Q_{\mathbb{C}}} \mathfrak{n}.$$

この2つを同一視すると，冪零軌道は次のようにも表される：

命題 2.3. $\mathcal{O}_X = G_u \cdot \mathfrak{n}^\circ$.

Proof. 命題 2.2 より, $\mathcal{O}_X = \varphi(G_{\mathbb{C}} \times_{Q_{\mathbb{C}}} \mathfrak{n}^\circ) = \varphi(G_u \times_{L_u} \mathfrak{n}^\circ) = G_u \cdot \mathfrak{n}^\circ$. $\square$

命題 2.3 より, $\mathcal{O}_X$ は $\mathfrak{n}^\circ$ の各点を通る G_u -軌道の集合と捉えられる.

3. 可視的作用の誘導定理

本章では, 冪零軌道 $\mathcal{O}_X$ における G_u の作用の強可視性が $\mathfrak{n}$ における L_u の線型作用の強可視性から導かれることを表す次の定理について解説する.

定理 3.1 (可視的作用の誘導定理). 冪零部分環 $\mathfrak{n}$ における L_u の作用が強可視的であるとする. このとき, 冪零軌道 $\mathcal{O}_X$ における G_u の作用は強可視的である.

3.1. 定理 3.1 は, 以下に示す 2 つの側面をもつ.

$$\begin{array}{ccc} L_u \text{ の } \mathfrak{n} \text{ への作用} & & G_u \text{ の } \mathcal{O}_X \text{ への作用} \\ \hline \text{平坦な空間 (線型空間)} & \Rightarrow & \text{曲がった空間} \\ \text{小さい空間} & \Rightarrow & \text{大きな空間} \end{array}$$

我々の対象は冪零軌道という「曲がった」空間である. その可視的作用が「平坦な」空間の可視的作用によって統制されると解釈される. また, $Q_{\mathbb{C}}$ が $G_{\mathbb{C}}$ の放物型部分群であること, $\mathfrak{n}^\circ = Q_{\mathbb{C}} \cdot X \subset \mathcal{O}_X = G_{\mathbb{C}} \cdot X$ を鑑みると, 定理 3.1 は「大きい」空間の強可視性が「小さい」空間の強可視性によって保証されているとも言える.

冪零部分環 $\mathfrak{n}$ における L_u の線型作用に対する強可視性の判定を, 線型空間における可視的作用の分類 [17, 20] に沿って行うことができる (第 4 章参照). その結果, 次の定理が成り立つことが明らかになった.

定理 3.2. 冪零軌道 $\mathcal{O}_X$ は $\text{ht}(\mathcal{O}_X) \leq 3$ とする. このとき, 冪零部分環 $\mathfrak{n}$ における L_u -作用は強可視的である. 特に, (V.1)–(S.2) を満たすスライス S_0 および反正則微分同相写像 σ として次を満たすものを選ぶことができる:

$$(3.1) \quad S_0 \text{ は } \mathfrak{n} \text{ の部分空間,}$$

$$(3.2) \quad \sigma^2 = \text{id},$$

$$(3.3) \quad \text{rank}_{\mathbb{R}} \mathfrak{l}^\sigma = \text{rank } \mathfrak{l}.$$

3.2. 本節では, 定理 3.2 を満たすスライス S_0 が冪零軌道 $\mathcal{O}_X$ における G_u の作用のスライス S を導くことを見よう.

まず, $\mathfrak{n}$ の開集合 $\mathfrak{n}^\circ$ を考察する. 定義 (2.9) により, $\mathfrak{n}^\circ$ はレビ部分群 $L_{\mathbb{C}}$ の作用で安定である. そこで,

$$(3.4) \quad S := S_0 \cap \mathfrak{n}^\circ$$

とする.

補題 3.3. $\mathfrak{n}^\circ = L_u \cdot S$.

Proof. $\mathfrak{n}^\circ = (L_u \cdot \mathfrak{n}^\circ) \cap (L_u \cdot S_0) = L_u \cdot (\mathfrak{n}^\circ \cap S_0) = L_u \cdot S$. $\square$

補題 3.3 を用いると、上で定めた S が冪零軌道 $\mathcal{O}_X$ における G_u の作用におけるスライスとなる。

命題 3.4. $\mathcal{O}_X = G_u \cdot S$.

Proof. 命題 2.3 と補題 3.3 より、 $\mathcal{O}_X = G_u \cdot \mathfrak{n}^\circ = G_u \cdot (L_u \cdot S) = G_u \cdot S$. $\square$

3.3. 次に、冪零軌道 $\mathcal{O}_X$ における G_u の作用に対して (S.1), (S.2) を満たす $\mathfrak{g}$ 上の反正則微分同相写像 σ について要点のみ述べる。

複素単純リー環 $\mathfrak{g}$ の実型 $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ として $\text{rank}_{\mathbb{R}} \mathfrak{g}_{\mathbb{R}} = \text{rank } \mathfrak{g}$ を満たすものとする。この $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ を $\mathfrak{g}$ の正規実型とよぶ。正規実型のカルタン分解を $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}} = \mathfrak{k}_{\mathbb{R}} + \mathfrak{p}_{\mathbb{R}}$ で与えると、 $\mathfrak{k}_{\mathbb{R}} + \sqrt{-1}\mathfrak{p}_{\mathbb{R}}$ は $\mathfrak{g}$ のコンパクトな実型である。複素単純リー環の正規実型は同型を除いて一意であるので、 $\mathfrak{g}_u := \mathfrak{k}_{\mathbb{R}} + \sqrt{-1}\mathfrak{p}_{\mathbb{R}}$ が G_u のリー環に一致するように $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ を選んでおく。そこで、 $\mathfrak{g}$ 上の反正則微分同相写像 σ を、 $\mathfrak{g}$ の正規実型 $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ に関する複素共役とする：

$$(3.5) \quad \sigma(A + \sqrt{-1}B) = A - \sqrt{-1}B \quad (A, B \in \mathfrak{g}_{\mathbb{R}}).$$

このとき、 $\mathfrak{g}_u$ は σ -安定である。

$\mathfrak{a}_{\mathbb{R}}$ を $\mathfrak{p}_{\mathbb{R}}$ の極大可換部分空間とし、 $\mathfrak{t}$ を $\mathfrak{a}_{\mathbb{R}}$ の複素化とする。このとき、 $\mathfrak{t}$ は $\mathfrak{g}$ のカルタン部分環となる。

ここで、再び (2.1) に戻ろう。複素半単純リー環のカルタン部分環が共役を除いて一意であることから、半単純元 $H \in \Phi(\mathcal{O}_X)$ として $H \in \mathfrak{t}$ を満たすものを選ぶことができる。この H から定まるレビ部分群 $\mathfrak{l}$ や冪零部分環 $\mathfrak{n}$ は σ -安定である。特に、 σ を $\mathfrak{n}$ に制限したものは $\mathfrak{n}$ 上の反正則微分同相写像となる。

いま、 $\mathfrak{l}_{\mathbb{R}} := \mathfrak{l} \cap \mathfrak{g}_{\mathbb{R}} = \mathfrak{l}^\sigma$ とする。このとき、 $\mathfrak{l}_{\mathbb{R}} = (\mathfrak{l}_{\mathbb{R}} \cap \mathfrak{k}_{\mathbb{R}}) + (\mathfrak{l}_{\mathbb{R}} \cap \mathfrak{p}_{\mathbb{R}})$ は $\mathfrak{l}_{\mathbb{R}}$ のカルタン分解を与える。さらに、 $\mathfrak{p}_{\mathbb{R}}$ の極大可換部分空間 $\mathfrak{a}_{\mathbb{R}}$ は $\mathfrak{l}$ に含まれるため、 $\mathfrak{l}_{\mathbb{R}} \cap \mathfrak{p}_{\mathbb{R}}$ に含まれる。ゆえに、

$$\text{rank}_{\mathbb{R}} \mathfrak{l}_{\mathbb{R}} \geq \dim \mathfrak{a}_{\mathbb{R}} = \text{rank } \mathfrak{l}.$$

一方、 $\text{rank}_{\mathbb{R}} \mathfrak{l}_{\mathbb{R}} \leq \text{rank } \mathfrak{l}$ が一般に成り立つ。よって、 $\text{rank } \mathfrak{l} = \text{rank}_{\mathbb{R}} \mathfrak{l}_{\mathbb{R}}$ を得る。したがって、 $\mathfrak{l}_{\mathbb{R}}$ は $\mathfrak{l}$ の正規実型であることが示された。特に、 σ は (3.2) と (3.3) を満たす。

この σ を $G_{\mathbb{C}}$ の対合的自己同型に持ち上げる。このとき、 $g \in G_{\mathbb{C}}$ および $Z \in \mathfrak{g}$ に対して次を満たす：

$$(3.6) \quad \sigma(g \cdot Z) = \sigma(g) \cdot \sigma(Z).$$

特に、リー環 $\mathfrak{l}, \mathfrak{g}_u$ や $\mathfrak{n}$ はすべて σ -安定だったので、(3.6) は $g \in L_u$ と $Z \in \mathfrak{n}$ に対しても成り立つことに注意しよう。

3.4. 冪零部分環 $\mathfrak{n}$ における L_u の作用において、 $\mathfrak{n} = L_u \cdot S_0$ かつ $\sigma|_{S_0} = \text{id}_{S_0}$ を満たす S_0 が存在すると仮定する。任意の元 $Z \in \mathfrak{n}$ を $g \in L_u$ と $Z_0 \in S_0$ を用いて $Z = g \cdot Z_0$ と表そう。このとき、

$$\sigma(Z) = \sigma(g) \cdot \sigma(Z_0) = \sigma(g) \cdot Z_0 = \sigma(g)g^{-1} \cdot Z \in L_u \cdot Z.$$

ゆえに、 $\mathfrak{n}$ における L_u の作用は強可視的である。

3.5. 以上の準備の下で、定理 3.2 から定理 3.1 が証明される。

Sketch of Proof. (3.4) で定めた S が (V.1) を満たすことは命題 3.4 から明らかである。

次に、冪零軌道 $\mathcal{O}_X$ は σ -安定であることが分かる。実際に、定理 3.2 から $\mathfrak{n} = L_u \cdot S_0$ を満たすので、 $X \in \mathfrak{n}$ を $X = g \cdot Z_0$ と表す ($g \in L_u, Z_0 \in S_0$)。このとき、(3.6) から

$$\sigma(G_{\mathbb{C}} \cdot X) = \sigma(G_{\mathbb{C}}) \cdot (\sigma(g) \cdot \sigma(Z_0)) = G_{\mathbb{C}} \cdot Z_0 = G_{\mathbb{C}} \cdot X.$$

ゆえに、 σ を $\mathcal{O}_X$ に制限したものは $\mathcal{O}_X$ 上の反正則微分同相写像を誘導する。

$S \subset S_0$ より定理 3.2 から $\sigma|_S = \text{id}_S$ を満たす。つまり、(S.1) が示された。さらに、(S.2) は (V.1), (S.1) および (3.6) から導かれる。実際に、命題 3.4 に沿って $Z \in \mathcal{O}_X$ を $Z = g \cdot Z^\circ$ ($g \in G_u, Z^\circ \in S$) と表したとき、

$$\sigma(Z) = \sigma(g) \cdot Z^\circ = \sigma(g)g^{-1} \cdot Z \in G_u \cdot Z.$$

以上より、 $\mathcal{O}_X$ における G_u の作用は強可視的である。 □

4. 定理 3.2 の証明の方針

最後に定理 3.2 の証明の方針について述べる。なお、詳細は紙面の関係上省略させていただく。

これまでの議論から、示すべきことは次の主張に帰着される。

主張 4.1. 冪零軌道 $\mathcal{O}_X$ が $\text{ht}(\mathcal{O}_X) \leq 3$ のとき、(3.1), (V.1) および σ に対して (S.1) を満たす S_0 を構成する。

主張 4.1 に対する以下の方針を、各球冪零軌道 $\mathcal{O}_X$ に対して遂行する。

Step 1. Dynkin–Kostant の理論により、複素単純リー環の冪零軌道に対して重み付き Dynkin 図形が 1 つに定まり、この視点によって冪零軌道の分類が与えられている。冪零軌道の高さは、対応する重み付き Dynkin 図形と複素単純リー環の最高ルートから計算できる。そこで、事実 2.1 にしたがって高さが 3 以下の冪零軌道をリストアップする。

Step 2. 高さ 3 以下の冪零軌道 $\mathcal{O}_X$ に対して、半単純元 $H \in \Phi(\mathcal{O}_X) \cap \mathfrak{t}$ は対応する重み付き Dynkin 図形から特定できる。

Step 3. $\mathfrak{l} = \mathfrak{g}(0)$ および $\mathfrak{n} = \bigoplus_{m \geq 2} \mathfrak{g}(m)$ を $\mathfrak{g}$ の $\mathfrak{t}$ に関するルートに対応するルート空間を用いて記述する。さらに、 $\mathfrak{n}$ における $\mathfrak{l}$ の作用を考察する。

Step 4. $\mathfrak{n}$ における L_u の作用が強可視的かどうかを論文 [17, 20] にしたがって判定し、スライス S_0 を構成する。

本講演の中で具体例を提示し、定理 3.2 の証明の方針の理解に努めたい。

REFERENCES

- [1] P. Bala, R. W. Carter, Classes of unipotent elements in simple algebraic groups. I. *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* **79** (1976), 401–425.
- [2] P. Bala, R. W. Carter, Classes of unipotent elements in simple algebraic groups. II. *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* **80** (1976), 1–17.
- [3] C. Benson, G. Ratcliff, A classification of multiplicity free actions, *J. Algebra* **181** (1996), 152–186.
- [4] D. Collingwood, W. McGovern, *Nilpotent orbits in semisimple Lie algebras*, Van Nostrand Reinhold Mathematics Series, Van Nostrand Reinhold Co., New York, 1993.
- [5] E. B. Dynkin, Semisimple subalgebras of semisimple Lie algebras, *Mat. Sbornik N.S.* **30** (1952), 349–462 (3 plates).
- [6] V. Kac, Some remarks on nilpotent orbits, *J. Algebra* **64** (1980), 190–213.
- [7] A. W. Knap, *Lie groups beyond an introduction, Second edition*, Progress in Mathematics, **140**, Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 2002.
- [8] T. Kobayashi, Geometry of multiplicity-free representations of $GL(n)$, visible actions on flag varieties, and triunity, *Acta. Appl. Math.* **81** (2004), 129–146.
- [9] T. Kobayashi, Multiplicity-free representations and visible actions on complex manifolds, *Publ. Res. Inst. Math. Sci.* **41** (2005), 497–549, special issue commemorating the fortieth anniversary of the founding of RIMS.
- [10] T. Kobayashi, A generalized Cartan decomposition for the double coset space $(U(n_1) \times U(n_2) \times U(n_3)) \backslash U(n) / (U(p) \times U(q))$, *J. Math. Soc. Japan* **59** (2007), 669–691.
- [11] T. Kobayashi, Visible actions on symmetric spaces, *Transform. Group* **12** (2007), 671–694.
- [12] T. Kobayashi, Propagation of multiplicity-freeness property for holomorphic vector bundles, *Lie Groups: structure, actions, and representations*, 113–140, Progress in Mathematics, **306**, Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 2013.
- [13] B. Kostant, The principal three-dimensional subgroup and Betti numbers of a complex simple Lie group, *Amer. J. Math.* **81** (1959), 973–1032.
- [14] A. Leahy, A classification of multiplicity free representations, *J. Lie Theory* **8** (1998), 367–391.
- [15] A. I. Mal’cev On semi-simple subgroups of Lie groups, *Amer. Math. Soc. Translation* **1950** (1950), 43 pp.
- [16] D. Panyushev, Complexity and nilpotent orbits, *Manuscripta Math.* **83** (1994), 223–237.
- [17] A. Sasaki, Visible actions on irreducible multiplicity-free spaces, *Int. Math. Res. Not. IMRN* **18** (2009), 3445–3466.
- [18] A. Sasaki, A characterization of non-tube type Hermitian symmetric spaces by visible actions, *Geom. Dedicata* **145** (2010), 151–158.
- [19] A. Sasaki, A generalized Cartan decomposition for the double coset space $SU(2n+1) \backslash SL(2n+1, \mathbb{C}) / Sp(n, \mathbb{C})$, *J. Math. Sci. Univ. Tokyo* **17** (2010), 201–215.
- [20] A. Sasaki, Visible actions on reducible multiplicity-free spaces, *Int. Math. Res. Not. IMRN* (2011), 885–929.
- [21] A. Sasaki, Visible actions on the non-symmetric homogeneous space $SO(8, \mathbb{C}) / G_2(\mathbb{C})$, *Adv. Pure Appl. Math.* **2** (2011), 437–450.
- [22] A. Sasaki, Visible actions on spherical nilpotent orbits, *preprint*, 51 pages.
- [23] A. Sasaki, *in preparation*.
- [24] T. Springer, R. Steinberg, Conjugacy classes, in *Seminar on Algebraic Groups and Related Finite Groups*, Lecture Notes in Mathematics, **131**, Springer, Berlin, 1970, 167–266.

- [25] Y. Tanaka, Visible actions on flag varieties of type C and a generalization of the Cartan decomposition, *Tohoku Math. J.* **65** (2013), 281–295.
- [26] Y. Tanaka, Visible actions on flag varieties of type D and a generalization of the Cartan decomposition, *J. Math. Soc. Japan* **65** (2013), 931–965.
- [27] Y. Tanaka, Visible actions on flag varieties of type B and a generalization of the Cartan decomposition, *Bull. Aust. Math. Soc.* **88** (2013), 81–97.
- [28] Y. Tanaka, Visible actions on flag varieties of exceptional groups and a generalization of the Cartan decomposition, *J. Algebra* **399** (2014), 170–189.
- [29] E. B. Vinberg, B. N. Kimelfeld, Homogeneous domains on flag manifolds and spherical subgroups of semisimple Lie groups, *Funct. Anal. Appl.*, **12** (1978), 168–174.
- [30] E. B. Vinberg, Complexity of actions of reductive groups, *Functional Anal. Appl.* **20** (1986), 1–11.

259-1292, 神奈川県平塚市北金目 4-1-1, 東海大学理学部数学科
E-mail address: atsumu@tokai-u.jp