

有限群の整数値指標である表現の交代テンソル積表現

Exterior powers of representations of finite groups with integer-valued characters

九州大学大学院数理学府 田村 朋之

Tomoyuki Tamura

Graduate School of Mathematics, Kyushu University

概要

本講演では有限群の複素数体上有限次表現について、表現の指標が整数値であることと、表現の交代テンソル積表現の指標の母関数に対応する necklace ring の元のある特徴との関係を述べる。また一般に交代テンソル積表現の指標の母関数はある無限積の形で表せるが、この主張により表現の指標が整数値であるならば有限積で表すことができることを述べる。

1 序章

G を有限群とする。 G の $\mathbb{C}$ 上有限次元表現 $\rho: G \rightarrow GL(V)$ が与えられた時、任意の整数 $i = 0, 1, 2, \dots$ に対し交代テンソル積表現 $\Lambda^i \rho: G \rightarrow GL(\bigwedge^i(V))$ が任意の $g \in G$ と $v_1, \dots, v_i \in V$ に対し次で定まる。

$$\Lambda^i \rho(g)(v_1 \wedge \cdots \wedge v_i) := (\rho(g)v_1) \wedge \cdots \wedge (\rho(g)v_i).$$

この交代テンソル積表現の指標の計算方法として、 λ -ring と呼ばれる可換環の構造を用いる手法が存在する。 G の類関数全体の集合を $CF(G)$ とすると、 $CF(G)$ には λ -ring の構造が定義される。そして χ を G の表現 V の指標とすると、交代テンソル積表現 $\Lambda^i(V)$ の指標は χ を λ -ring としての λ -operation によって移した像 $\lambda^i(\chi)$ であることが知られている (Theorem 2 (D.Knutson [3] p.84) より示すことができる)。

Knutson は [3] において、3 次対称群 S_3 の 2 次既約表現の指標 χ_3 を具体例として考察しており、2 階交代テンソル積表現の指標 $\lambda^2(\chi_3)$ が符号表現の指標となることを示している。そこで他の有限群や表現の指標 χ において $\lambda^i(\chi)$ を計算すると、どのような指標が得られるだろうか。また、母関数 $\lambda_t(\chi) = \sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i(\chi)t^i$ を求め t^i の係数を計算することで、 $\lambda^i(\chi)$ を求めることができる。そこで $\lambda_t(\chi)$ に、 t^i の係数を得ることに適した簡潔な形を与えることができるだろうか。

G の指標 χ について、母関数 $\lambda_t(\chi)$ は [6] Lemma 5.41 より $\lambda_t(\chi) = \prod_{i=1}^{\infty} (1 - (-t)^i)^{\alpha_i}$ ($\alpha_1, \alpha_2, \dots \in CF(G)$) と書けることが知られている (但し、この式の括弧の中にある “1” は $CF(G)$ の単位元、つまり自明表現の指標とする)。つまり、 $\lambda_t(\chi)$ を無限積の形で書くことができる。本稿では pre- λ -ring 等を用い、指標 χ が整数値指標であるとき、即ち任意の $g \in G$ に対し $\chi(g) \in \mathbb{Z}$ が成り立つときに、 $\lambda^i(\chi)$ や $(\alpha_n)_{n=1}^{\infty}$ の性質や関係について述べる。特に $\lambda_t(\chi)$ を有限積の形で書くことができたので紹介したい。置換表現の指標や対称群の表現の指標は特に整数値指標であり、多くの指標 χ における $\lambda_t(\chi)$ の計算に適用が可能であると思われる。

ここで、第 3 章で述べる、本稿の主な定理の概略を記述する。

- 指標 χ が整数値指標ならば任意の自然数 i に対し $\lambda^i(\chi)$ は整数値指標であることを述べる (3.1 節 Theorem 5)。

- 指標 χ が整数値指標であることと, $(\alpha_n)_{n=1}^\infty$ について自然数 n が G の exponent を割らなければ $\alpha_n = 0$ となることが同値であり, 特に $\lambda_t(\chi)$ が有限積の形で書けることを述べる (3.2 節 Theorem 8).
- この二つの Theorem を用い, 指標 χ が $g \in G$ から生成される巡回群 $\langle g \rangle$ 上で整数値であるとき $\alpha_n(g) \in \mathbb{Z}$ となり, または 0 となる場合があることを述べる (3.3 節 Theorem 12).

最後に, λ -ring と necklace ring を用いて指標の和と積について λ_t の計算方法を第 4 章において簡潔に述べる. necklace ring は Metropolis と Rota [4] によって necklace polynomial の考察の際に導入された可換環であり, 2.2 節 においていくつかの定義がこの necklace ring に関係する. しかし本稿の定理を述べている第 3 章において necklace ring を特徴づける性質は用いないので, 2.2 節では Remark 1 で述べるにとどめる. (necklace ring に関係する写像については, 定義のみなら問題なく可能である.)

本稿における有限群 G の表現は全て $\mathbb{C}$ 上有限次元表現とし, G の指標は $\mathbb{C}$ 上有限次元表現の指標とする.

2 準備

この章では, 次章の定理において用いる記号や性質, 写像等を定義する. 2.1 節では pre- λ -ring について述べる. pre- λ -ring とは λ -ring のにおける λ -operation の条件を少し弱めたものであり, 本稿では主に pre- λ -ring の概念を以て議論を進める. λ -ring の定義は第 4 章に記述している. 2.2 節では, binomial ring や関連する写像達について定義する. 2.3 節では交代テンソル積表現の指標と pre- λ -ring との関わりについて述べる.

以降, R を単位元 1 をもつ可換環とし, $R[[t]]$ を t を変数とする, R の元を係数とする 1 変数巾級数環とし. 任意の $f \in R[[t]]$ に対し $f' \in R[[t]]$ を f の変数 t に関する微分とする.

$\Lambda(R)$ を $R[[t]]$ の元であり定数項が 1 であるもの全体とする.

可換環 R が $\mathbb{Z}$ -torsion-free であるとは, 0 でない整数 n と $r \in R$ に対し $nr = 0$ ならば $r = 0$ となるときを言う. R が $\mathbb{Q}$ -algebra であるとは, 環準同型写像 $\mathbb{Q} \rightarrow R$ が備わっているときを言う. 可換環 R は $\mathbb{Q}$ -algebra ならば $\mathbb{Z}$ -torsion-free である. 本稿では次章において, 序章で述べた $CF(G)$ を $\mathbb{Q}$ -algebra として用いる.

また, 任意の自然数 i, j に対し, $[i, j]$ を i と j の最小公倍数, (i, j) を i と j の最大公倍数と定義する.

2.1 pre- λ -ring の定義

この節では pre- λ -ring の定義と Adams operation, 準同型写像について述べる. 詳しくは [3], [6] Section 1, 2, 3 等を参照されたい.

可換環 R は以下の 3 条件を満たす写像の族 $\lambda^n : R \rightarrow R$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) が備わっているとき pre- λ -ring と言う.

- 任意の $r \in R$ に対し, $\lambda^0(r) = 1$ である.
- λ^1 は R 上の恒等写像である.
- 任意の $n \geq 0$ と $r, s \in R$ に対し, $\lambda^n(r+s) = \sum_{i+j=n} \lambda^i(r)\lambda^j(s)$ が成り立つ.

pre- λ -ring における写像 λ^n 達を λ -operation と言う. pre- λ -ring R とその元 $r \in R$ に対し, $\lambda_t(r) \in \Lambda(R)$ を次のように定義する.

$$\lambda_t(r) := \sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i(r)t^i$$

pre- λ -ring R について任意の自然数 n に対し, n -th Adams operation $\psi^n : R \rightarrow R$ を, 任意の $r \in R$ に対し次が成り立つように定義する.

$$\psi_{-t}(r) = -t \frac{d}{dt} \log \lambda_t(r) \quad (= -t \lambda'_t(r) \lambda_t(r)^{-1}).$$

但し $\psi_t(r) := \sum_{n=1}^{\infty} \psi^n(r)t^n$ と定義し、左辺はこの式の t に $-t$ を代入したものである。pre- λ -ring における n -th Adams operation ψ^n は加法についての準同型写像であり、また ψ^1 は R 上の恒等写像である。

pre- λ -ring R_1, R_2 における環準同型写像 $f : R_1 \rightarrow R_2$ が λ -operation を交換するとき、即ち任意の整数 $i \geq 0$ に対し $f \circ \lambda^i = \lambda^i \circ f$ が成り立つとき、pre- λ -homomorphism という。環準同型写像 f が pre- λ -homomorphism ならば任意の自然数 n に対し $f \circ \psi^n = \psi^n \circ f$ となり、 f の値域である R_2 が $\mathbb{Z}$ -torsion-free ならばこの逆も成り立つ。以降、簡単のため pre- λ -homomorphism を単に λ -homomorphism と呼ぶ。

可換環 R_1, R_2 の環準同型写像 $F : R_1 \rightarrow R_2$ が与えられた時、写像 $F_\Lambda : \Lambda(R_1) \rightarrow \Lambda(R_2)$ を $F_\Lambda(\sum_{i=0}^{\infty} a_i t^i) := \sum_{i=0}^{\infty} F(a_i) t^i$ ($a_i \in R$) と定義する。 R_3 を可換環、 $G : R_2 \rightarrow R_3$ を環準同型写像とすると $(G \circ F)_\Lambda = G_\Lambda \circ F_\Lambda$ が成り立つ。また、 R_1, R_2 が pre- λ -ring かつ F が λ -homomorphism ならば $F_\Lambda \circ \lambda_t = \lambda_t \circ F$ が成り立つ。写像 F_Λ は Theorem 12 の証明で用いる。

2.2 binomial ring や写像の定義

この節では binomial ring 等、本稿で用いるいくつかの集合と写像を定義する。詳しくは [4], [6] Section 5 を参照されたい。

集合 R^N を、可換環 R の元の列 $(a_1, a_2, \dots) = (a_n)_{n=1}^{\infty}$ の全体と定義する。任意の $\alpha \in R^N$ と $n \in \mathbb{N}$ に対し、 $\alpha(n) \in R$ を α の n 番目の項であると定義する ($\alpha = (\alpha(n))_{n=1}^{\infty}$)。また R^N を次の演算とスカラーを以て R -加群 とみなす。任意の $(a_n)_{n=1}^{\infty}, (b_n)_{n=1}^{\infty} \in R^N, r \in R$ に対し、

$$(a_n)_{n=1}^{\infty} + (b_n)_{n=1}^{\infty} := (a_n + b_n)_{n=1}^{\infty}, \quad r(a_n)_{n=1}^{\infty} := (ra_n)_{n=1}^{\infty} \quad (1)$$

と定義する。さらに任意の自然数 i に対し $e_i \in R^N$ を、 i 番目のみが 1 で他は 0 であるものと定義する。これを用いると、任意の $(a_n)_{n=1}^{\infty} \in R^N$ は $\sum_{i=1}^{\infty} a_i e_i$ と書くことができる。

写像 $\phi : R^N \rightarrow R^N$ を、 $\phi((a_n)_{n=1}^{\infty}) = (b_n)_{n=1}^{\infty}$ で $b_n = \sum_{d|n} da_d$ となるように定義する。 ϕ は R -加群としての準同型写像である。また R が $\mathbb{Q}$ -algebra ならば、メビウスの反転公式を用いると任意の自然数 n に対し

$$a_n = \frac{1}{n} \sum_{d|n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) b_d \quad (2)$$

を得る。但し、写像 μ はメビウス関数である。

写像 $z : \Lambda(R) \rightarrow R^N$ を、 $z(f) := (b_n)_{n=1}^{\infty}$ で $\sum_{i=1}^{\infty} b_n (-t)^n = -tf'f^{-1}$ を満たすように定義する。写像 z は $\Lambda(R)$ の乗法から R^N の加法への準同型写像である。また R が pre- λ -ring であるとき、Adams operation の定義から任意の $r \in R$ に対し

$$z \circ \lambda_t(r) = (\psi^n(r))_{n=1}^{\infty} \quad (3)$$

が成り立つ。写像 z, ϕ は共に、 R が $\mathbb{Z}$ -torsion-free ならば単射、 $\mathbb{Q}$ -algebra ならば全単射である。

R が binomial ring であるとは $\mathbb{Z}$ -torsion-free であって、さらに任意の $r \in R$ と自然数 n に対し

$$\binom{r}{n} = \frac{r(r-1) \cdots (r-(n-1))}{n!} \in R \otimes \mathbb{Q}$$

が R に属しているときを言う。このとき、巾級数 $(1 - (-t)^j)^r \in \Lambda(R)$ を $\sum_{i=0}^{\infty} \binom{r}{i} (-(-t)^j)^i$ と定義する。整数全体の集合 $\mathbb{Z}$ や $\mathbb{Q}$ -algebra は binomial ring である。

また R が binomial ring であるとき、任意の $f \in \Lambda(R)$ に対し $\prod_{i=1}^{\infty} (1 - (-t))^{a_i}$ を満たす $a_1, a_2, \dots \in R$ が唯一通りに存在する ([6] Lemma 5.41.)。写像 $E_{Nr} : \Lambda(R) \rightarrow R^N$ を、

$$E_{Nr} \left(\prod_{i=1}^{\infty} (1 - (-t)^i)^{a_i} \right) = (a_n)_{n=1}^{\infty}$$

と定義する. この写像は全単射であり, $z = \phi \circ E_{N_r}$ が成り立つ.

Remark 1. 本稿の主な定理を述べている第 3 章では用いないが, この節でのいくつかの定義に関係し, かつ [4], [6] Section 5.6 において中心的な話題である, R 上の necklace ring $Nr(R)$ について述べる.

R^N は式 (1) で述べた R -加群の構造に加え, 次の乗法により R -algebra となる. 任意の $(a_n)_{n=1}^\infty, (b_n)_{n=1}^\infty \in R^N$ に対し, $(a_n)_{n=1}^\infty (b_n)_{n=1}^\infty := (a_n b_n)_{n=1}^\infty$ と定義する.

一方, R^N はこれとは異なる乗法 “ $\cdot_{Nr}$ ” を定義することができる. 任意の $(a_n)_{n=1}^\infty, (b_n)_{n=1}^\infty \in R^N$ に対し

$$(a_n)_{n=1}^\infty \cdot_{Nr} (b_n)_{n=1}^\infty = (c_n)_{n=1}^\infty, \quad c_n := \sum_{[i,j]=n} (i,j) a_i b_j$$

と定義する. 単位元は $(1, 0, 0, \dots)$ である. R^N は加法 “ $+_{Nr}$ ” := “ $+$ ” と乗法 “ $\cdot_{Nr}$ ” により可換環となるが このとき, R^N を $Nr(R)$ と書き, R 上 necklace ring という. [6] Section 5.6 では写像 ϕ の定義域, 及び写像 E_{Nr} の値域である R^N は $Nr(R)$ と記されており, また, $\Lambda(R)$ の可換環としての構造と, 写像 $\phi: Nr(R) \rightarrow R^N, z: \Lambda(R) \rightarrow R^N, E_{Nr}: \Lambda(R) \rightarrow Nr(R)$ の環準同型性が述べられている.

しかし本稿の主な定理の証明では $R^N, Nr(R)$ の違いである乗法や, 写像の乗法の準同型に触れないまま議論を進めることができる. 特に この状況下では $Nr(R)$ と R^N は同一であるため, 複数の記号を用いることへの混乱を避けるため $Nr(R)$ と記さずに R^N のまま記す. $Nr(R)$ や乗法の準同型性は 4 章で改めて用いる.

2.3 pre- λ -ring と表現の指標

この節では有限群の交代テンソル積表現の指標が λ -operation を用いて記述できることを述べる.

集合 $R(G)$ を G の表現環, つまり G の既約表現の同型同値類全体から生成される自由加群とする. この集合は交代テンソル積表現に由来する形で λ -operation を定義することにより pre- λ -ring となる. 具体的には $[V]$ を G の表現のある同値類とすると, 任意の整数 $i \geq 0$ に対して $\lambda^i([V]) = [\bigwedge^i V]$ が成り立つように定義される.

序章でも述べたが, $CF(G)$ を G から $\mathbb{C}$ への類関数全体の集合とする. $CF(G)$ は次の加法, 乗法, スカラー倍, Adams operation を以て $\mathbb{Q}$ -algebra かつ pre- λ -ring (実際には λ -ring) の構造を持つ ([3] p.54, p.81).

$$\begin{cases} (f_1 + f_2)(g) := f_1(g) + f_2(g), \\ (f_1 f_2)(g) := f_1(g) f_2(g), \\ (cf)(g) := cf(g), \\ \psi^n(f)(g) := f(g^n). \end{cases}$$

但し, $f_1, f_2 \in CF(G), c \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{N}, g \in G$ とする. この演算による零元, 単位元はそれぞれ $0, 1$ への定置写像である. また, $CF(G)$ 上の Adams operation は任意の自然数 n, m に対し $\psi^n \circ \psi^m = \psi^m \circ \psi^n$ を満たし, さらに λ -homomorphism である. (λ -homomorphism であることは $CF(G)$ が λ -ring であることより明らかであるが, 別の証明として, λ -operation を交換することを $CF(G)$ が特に $\mathbb{Z}$ -torsion-free であることと Adams operation 同士の可換性より示すことができる.)

この二つの集合 $R(G), CF(G)$ 間の写像 $X: R(G) \rightarrow CF(G)$ を表現の指標が対応するように定義すると, 次の Theorem が成り立つ.

Theorem 2 (D.Knutson [3] p.84). 写像 X は λ -homomorphism である.

この Theorem を用いると, χ を指標に持つ G の有限次元表現 V の, i 階交代テンソル積表現 $\Lambda^i(V)$ の指標は $\lambda^i(\chi)$ であること示される.

Definition 3. 写像 X による像 $\text{Im}(X)$ を $Cl_{\mathbb{Z}}(G)$ と定義する.

集合 $Cl_{\mathbb{Z}}(G)$ は G の全ての既約指標の整数結合で表される $CF(G)$ の元全体であり, λ -homomorphism の像である. 特に, 任意の $\chi \in Cl_{\mathbb{Z}}(G)$ と自然数 n に対し $\psi^n(\chi) \in Cl_{\mathbb{Z}}(G)$ が成り立つ. (なお, $Cl_{\mathbb{Z}}(G)$ の記号は [1] p.316 のものを用いている.)

3 定理とその証明

G を有限群とする, χ を指標に持つ G の表現の i 階交代テンソル積表現の指標は, 前章で見たように G の類関数全体の集合 $CF(G)$ に定義された λ -ring の構造を用いて, $\lambda^i(\chi)$ と書くことができる.

この章では前章で定義した準備を用い, 指標 χ が整数値指標であるときの $\lambda^i(\chi)$ 及び母関数 $\lambda_t(\chi) = \sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i(\chi)t^i$ の性質や表示について 3 つの定理を述べる.

ここで, この章で主に考察する “整数値指標” を改めて定義する.

Definition 4. G を有限群とする. $\chi \in Cl_{\mathbb{Z}}(G)$ が整数値指標であるとは, 任意の $g \in G$ に対し $\chi(g) \in \mathbb{Z}$ が成り立つことと定義する.

3.1 整数値指標と $\lambda^i(\chi)$

まず, 整数値指標と $\lambda^i(\chi)$ について次の Theorem を述べる.

Theorem 5. $\chi \in Cl_{\mathbb{Z}}(G)$ が整数値指標ならば, 任意の自然数 i に対し $\lambda^i(\chi)$ は整数値指標である.

証明の方針は χ が整数値指標であることを, 任意の $g \in G$ に対し $\chi(g)$ が $Cl_{\mathbb{Z}}(G)$ のある Adams operation による作用で不変な元である, と言いかえることに着目する.

この節では e を G の exponent, 即ち G の全ての元の位数の最小公倍数とし, ω を 1 の原始 e 乗根とする.

Lemma 6. 任意の $\chi \in Cl_{\mathbb{Z}}(G)$ と $g \in G$ に対し, $f \in \mathbb{Z}[t]$ で $\chi(g) = f(\omega)$ と表すことができる, また, 任意の自然数 n に対し $\psi^n(\chi)(g) = f(\omega^n)$ が成り立つ.

Proof. $Cl_{\mathbb{Z}}(G)$ の定義より χ が G の指標であるときに示せばよい. ρ を指標が χ であるような G の表現, m を表現 ρ の次元とすると $\chi(g)$ は整数 $a_1, \dots, a_m$ を用いて $\chi(g) = \omega^{a_1} + \dots + \omega^{a_m}$ と表すことができ, 特に $\chi(g) \in \mathbb{Q}(\omega)$ である.

また, 任意の自然数 n に対し, $\psi^n(\chi)(g) = \chi(g^n) = \text{Tr}(\rho(g)^n) = \omega^{na_1} + \dots + \omega^{na_m}$ を得る. □

Lemma 6 を用いて Lemma 7 を述べる.

Lemma 7. $\chi \in Cl_{\mathbb{Z}}(G)$ について次の二条件は同値である.

- (1) χ は整数値指標である.
- (2) 任意の自然数 n に対し $\psi^n(\chi) = \psi^{(n,e)}(\chi)$ である.

Proof. n を自然数, $n' = n/(n, e)$ とする. $g \in G$ とすると, Lemma 6 より $f \in \mathbb{Z}[t]$ で $\chi(g) = f(\omega)$ と書くことができる. よって, $\psi^n(\chi) = f(\omega^{(n,e)n'})$, $\psi^{(n,e)}(\chi) = f(\omega^{(n,e)})$ であり共に $\mathbb{Q}(\omega^{(n,e)})$ に属する. $\omega^{(n,e)}$ は 1 の原始 $e/(n, e)$ 乗根であり, $(n', e/(n, e)) = 1$ であるので, Γ_n を拡大体 $\mathbb{Q}(\omega^{(n,e)}) : \mathbb{Q}$ のガロア群, $\sigma \in \Gamma_n$ で $\sigma(\omega^{(n,e)}) = \omega^{(n,e)n'}$ とすると, $\psi^n(\chi)(g) = \sigma(\psi^{(n,e)}(\chi)(g))$ を得る.

(1) が成り立つと仮定すると, $\psi^n(\chi)(g), \psi^{(n,e)}(\chi)(g) \in \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$ であるからガロア群 Γ_n による作用は不変であり, 任意の $g \in G$ に対して両者が一致し (2) を得る. (2) が成り立つと仮定すると, 特に e と互いに素な自然数 n に対し $\psi^n(\chi) = \chi$ を得る. $g \in G$ とする. $\sigma \in \Gamma_1$ で $\sigma(\omega) = \omega^n, (n, e) = 1$ であるとする

$\chi(g) = \psi^n(\chi)(g) = \sigma(\chi(g))$ を得るので $\chi(g) \in \mathbb{Q}$, 特に $\chi(g)$ は $\mathbb{Z}$ 上代数的なので $\chi(g) \in \mathbb{Z}$ となる.

□

Proof of Theorem 5. Lemma 7 と, $CF(G)$ の Adams operaiton が λ -homomorphism であることより示される.

□

実際には $\chi \in Cl_{\mathbb{Z}}(G)$ が整数値指標であることと, $(n, e) = 1$ なる自然数 n に対し $\psi^n(\chi) = \chi$ となることは同値である. つまり Theorem 5 を示すためには Lemma 7 でなくともこの事実で十分なのだが, Lemma 7 は次節の Theorem 8 の証明にも用いるためこのように記述した.

3.2 整数値指標と $\lambda_t(\chi)$

次に整数値指標と $\lambda_t(\chi)$ との関係について述べる. 紛らわしいかもしれないが, 以降, $CF(G)$ における単位元である, 自明表現の指標をこれまで扱ってきた可換環と同様, “1” と記す.

$\chi \in Cl_{\mathbb{Z}}(G)$ とすると特に $\chi \in CF(G)$ であり, $CF(G)$ は $\mathbb{Q}$ -algebra であるから特に binomial ring なので写像 E_{Nr} が定義される. さらに, $(\alpha_n)_{n=1}^{\infty} = E_{Nr}(\lambda_t(\chi))$ とすると, $z = E_{Nr} \circ \phi$ であること, 式 (3) を用いることで $\phi((\alpha_n)_{n=1}^{\infty}) = z(\lambda_t(\chi)) = (\psi^n(\chi))_{n=1}^{\infty}$ を得るので, 式 (2) を用いて $\lambda_t(\chi)$ を次で書くことができる.

$$\lambda_t(\chi) = \prod_{i=1}^{\infty} (1 - (-t)^i)^{\alpha_i} \in \Lambda(Cl_{\mathbb{Z}}(G)), \quad \alpha_n = \frac{1}{n} \sum_{d|n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) \psi^d(\chi) \in CF(G)$$

$\lambda_t(\chi)$ を求めるにあたって上記の形に変形した場合, 各 α_n について更なる情報が得られないだろうか. 特にこのとき $\lambda_t(\chi)$ は無限積の形で与えられているので, もしこれが有限積で表すことができれば α_n と合わせることで $\lambda^i(\chi)$ の計算がより簡単になると予想される.

次の Theorem では, χ が整数値指標であることと α_n のある性質の同値性について述べる.

Theorem 8. e を G の exponent とする. $\chi \in Cl_{\mathbb{Z}}(G)$ とし, $(\alpha_n)_{n=1}^{\infty} = E_{Nr}(\lambda_t(\chi))$ とすると次の 2 条件は同値である.

- (1) χ は整数値指標である.
- (2) 任意の自然数 n に対し $n \nmid e$ ならば $\alpha_n = 0$ である.

特に χ がこれらの条件を満たすならば, $\lambda_t(\chi)$ は次のように書くことができる.

$$\lambda_t(\chi) = \prod_{d|e} (1 - (-t)^d)^{\alpha_d}.$$

Theorem 8 の証明には, Lemma 7 と, 次より述べる Lemma 10 を用いる. そのためには R^N の元 e_i を写像 ϕ で移した $\phi(e_i)$ について考える. 前章で定義したとおり, $e_i \in R^N$ は i 番目で 1 を, 他では 0 をとる元である.

Lemma 9. i を自然数とすると, $\phi(e_i) \in R^N$ について次が成り立つ.

- (1) 任意の自然数 n に対し $i \mid n$ ならば $\phi(e_i)(n) = i$, $i \nmid n$ ならば $\phi(e_i)(n) = 0$ となる.
- (2) e を自然数で $i \mid e$ ならば, $\phi(e_i)(n) = \phi(e_i)(n, e)$ が任意の自然数 n に対し成り立つ.

Proof. (1) は e_i と写像 ϕ の定義より明らかである. (2) は任意の自然数 n に対し $i \mid n$ であることと $i \mid (n, e)$ であることが同値なので (1) より成り立つ. □

Lemma 10. R が $\mathbb{Z}$ -torsion-free ならば, $(a_n)_{n=1}^{\infty} \in R^N$, $(b_n)_{n=1}^{\infty} = \phi((a_n)_{n=1}^{\infty})$ と自然数 e について次の二つは同値である.

- (1) 任意の自然数 n に対し $n \nmid e$ ならば $a_n = 0$ となる.
(2) 任意の自然数 n に対し $b_n = b_{(n,e)}$ が成り立つ.

Proof. (1) が成り立つことを仮定すると $(a_n)_{n=1}^\infty = \sum_{d|e} a_d e_d$ と書くことができるので、写像 ϕ で移すことにより $(b_n)_{n=1}^\infty = \sum_{d|e} a_d \phi(e_d)$ となる。よって Lemma 9 (2) を用いると、この Lemma の (2) が示される。

次に (2) を仮定し (1) が成り立つことを n についての数学的帰納法で示す。 $n = 1$ の時は明らかなので $d < n$ となる自然数 d で成り立つことを仮定し自然数 n で成り立つことを示す。 $n | e$ の時は明らかなので $n \nmid e$ とする。帰納法の仮定より、 $(b_n)_{n=1}^\infty$ は

$$(b_n)_{n=1}^\infty = \phi((a_n)_{n=1}^\infty) = \left(\sum_{q|e, q < n} a_q \phi(e_q) \right) + a_n \phi(e_n) + \left(\sum_{n < q} a_q \phi(e_q) \right)$$

と書くことができる。 $(b_n)_{n=1}^\infty$ の n 番目と (n, e) 番目を見ると、仮定した (2) と Lemma 9 (2) より、 $a_n \phi(e_n)(n) = a_n \phi(e_n)(n, e)$ を得る。また、 $\phi(e_n)(n) = n$ 、かつ $n \nmid e$ から特に $(n, e) < n$ より $\phi(e_n)(n, e) = 0$ である。よって $na_n = 0$ 、さらに R が $\mathbb{Z}$ -torsion free であることより $a_n = 0$ を得る。

よって自然数 n で成り立つことが示せたので、数学的帰納法より (1) が成り立つ。 $\square$

Proof of Theorem 8. $(\alpha_n)_{n=1}^\infty = E_{Nr}(\lambda_t(\chi))$ であるから、 $\phi((\alpha_n)_{n=1}^\infty) = (\psi^n(\chi))_{n=1}^\infty$ である。このことと Lemma 7 及び Lemma 10 より示すことができる。 $\square$

3.3 巡回群と整数値の関係

$\chi \in Cl_{\mathbb{Z}}(G)$, e を G の exponent, $(\alpha_n)_{n=1}^\infty = E_{Nr}(\lambda_t(\chi))$ とする。 Theorem 8 より χ が整数値指標ならば $n \nmid e$ なる自然数 n に対し $\alpha_n = 0$ となることを見た。この節では G 全体ではなく、ある一つの元 $g \in G$ より生成される巡回群 $\langle g \rangle$ という一部分のみで整数値であるとき (任意の自然数 n に対し $\chi(g^n) \in \mathbb{Z}$ が成り立つとき) に $\alpha_n(g) \in \mathbb{Z}$ となり、もしくは 0 となる場合があることを述べる。勿論、 χ が整数値指標ならば任意の $g \in G$ に対して用いることができる。

H を有限群 G の部分群とする。このとき写像の定義域を G から H へと制限する環準同型写像 $\text{Res}_H^G : CF(G) \rightarrow CF(H)$ は $\text{Res}_H^G(Cl_{\mathbb{Z}}(G)) \subset Cl_{\mathbb{Z}}(H)$ を満たす他、次の性質が成り立つ。

Lemma 11. 環準同型写像 $\text{Res}_H^G : CF(G) \rightarrow CF(H)$ は λ -homomorphism である。

Proof. 写像の値域である $CF(H)$ が特に $\mathbb{Z}$ -torsion-free なので、Adams operation が可換であることを示せば証明ができる。任意の自然数 n と $\chi \in CF(G)$, $h \in H$ に対し、 $\psi^n(\text{Res}_H^G(\chi))(h) = \chi(h^n) = \text{Res}_H^G(\psi^n(\chi))(h)$ となるので確かに成り立つ。 $\square$

Theorem 5, Theorem 8, Lemma 11 より、次の Theorem 12 を示すことができる。

以降、任意の $g \in G$ に対し $O(g)$ を g の位数と定義する。

Theorem 12. $\chi \in Cl_{\mathbb{Z}}(G)$ とする。 $g \in G$ とし、 χ は g より生成される巡回群 $\langle g \rangle$ 上で整数値であるとする。 $(\alpha_n)_{n=1}^\infty = E_{Nr}(\lambda_t(\chi))$ とすると、任意の自然数 n に対し次が成り立つ。

- (1) $\alpha_n(g) \in \mathbb{Z}$ である。
(2) $n \nmid O(g)$ ならば $\alpha_n(g) = 0$ となる。

特に $\lambda_t(\chi)(g) := \sum_{i=0}^\infty \alpha_i(g) t^i$ は次のように書くことができる。

$$\lambda_t(\chi)(g) = \prod_{d|O(g)} (1 - (-t)^d)^{\alpha_d(g)}.$$

Proof. 写像 $E_g : CF(G) \rightarrow \mathbb{C}$, $E'_g : CF(\langle g \rangle) \rightarrow \mathbb{C}$ を, それぞれ $E_g(f_1) = f_1(g)$, $E'_g(f_2) = f_2(g)$ と定義する. 但し $f_1 \in CF(G)$, $f_2 \in CF(\langle g \rangle)$ とする. 明らかに写像 E_g, E'_g は環準同型写像であるほか, $E_g = E'_g \circ \text{Res}_{\langle g \rangle}^G$ が成り立つので, 特に $E_{g\Lambda} = E'_{g\Lambda} \circ \text{Res}_{\langle g \rangle\Lambda}^G$ が成り立つ.

(1) 仮定より $\text{Res}_{\langle g \rangle}^G(\chi) \in Cl_{\mathbb{Z}}(\langle g \rangle)$ が整数値指標なので, Lemma 11 と Theorem 5 より,

$$\lambda^n(\chi)(g) = E_g(\lambda^n(\chi)) = E'_g \circ \text{Res}_{\langle g \rangle}^G(\lambda^n(\chi)) = E'_g(\lambda^n(\text{Res}_{\langle g \rangle}^G(\chi))) = \lambda^n(\text{Res}_{\langle g \rangle}^G(\chi))(g) \in \mathbb{Z}$$

を得る. よって $\lambda_t(\chi)(g) = E_{g\Lambda}(\lambda_t(\chi)) \in \Lambda(\mathbb{Z})$ が成り立つ. この多項式の係数が属する集合 $\mathbb{Z}$ は binomial ring なので, $\alpha_n(g) \in \mathbb{Z}$ となる.

(2) $\text{Res}_{\langle g \rangle}^G(\chi)$ について考える. $(\alpha'_n)_{n=1}^\infty = E_{Nr}(\lambda_t(\text{Res}_{\langle g \rangle}^G(\chi)))$ とおくと, 巡回群 $\langle g \rangle$ の exponent は $O(g)$ であるから, Theorem 8 より自然数 n が $n \nmid O(g)$ を満たすなら $\alpha'_n = 0$ となる. また, $\lambda_t(\text{Res}_{\langle g \rangle}^G(\chi))$ について,

$$\prod_{i=1}^\infty (1 - (-t)^i)^{\alpha'_n(g)} = E'_{g\Lambda}(\lambda_t(\text{Res}_{\langle g \rangle}^G(\chi))) = E'_{g\Lambda} \circ \text{Res}_{\langle g \rangle\Lambda}^G(\lambda_t(\chi)) = E_{g\Lambda}(\lambda_t(\chi)) = \prod_{i=1}^\infty (1 - (-t)^i)^{\alpha_i(g)}$$

が成り立つ. よって任意の自然数 n に対し $\alpha_n(g) = \alpha'_n(g)$ となり, 特に $n \nmid O(g)$ ならば $\alpha_n(g) = 0$ となる. $\square$

Example 13. 指標 Π を有限群 G の左正則表現の指標とする. 左正則表現は任意の $g \in G$ に対し, $\Pi(g)$ が $g \in G$ が単位元ならば $|G|$ となり, そうでなければ 0 となる, G の整数値指標の一つである. この指標について各 $g \in G$ に対し $\lambda_t(\Pi)(g) := E_{g\Lambda}(\lambda_t(\Pi))$ を求める.

$(\alpha_n)_{n=1}^\infty = E_{Nr}(\lambda_t(\chi))$ とすると, 各 $\alpha_n(g)$ について,

$$\alpha_n(g) = \begin{cases} \frac{|G|}{O(g)} & (\text{if } n = O(g)), \\ 0 & (\text{if } n \neq O(g)) \end{cases}$$

が成り立つ. 特に任意の $g \in G$ に対し $\lambda_t(\Pi)(g) = (1 - (-t)^{O(g)})^{\frac{|G|}{O(g)}}$ が成り立つ.

Proof. n についての数学的帰納法で示す. $n = 1$ のときは明らかなので, 自然数 $n > 2$ で $n - 1$ まで成り立つと仮定し n の場合に示す. $n \nmid O(g)$ ならば Theorem 12 より $\alpha_n(g) = 0$ であり, また $n = O(g)$ となる $g \in G$ が存在しないので成り立つ. 次に $n \mid O(g)$ を仮定する. $(\psi^n(\Pi))_{n=1}^\infty = \phi((\alpha_n)_{n=1}^\infty)$ であるから,

$$\Pi(g^n) = \psi^n(\Pi)(g) = \left(\sum_{d \mid n, d \neq n} d \alpha_d(g) \right) + n \alpha_n(g)$$

となる. $\Pi(g^n)$ は $n = O(g)$ であるとき $|G|$ となり, 他では 0 となる. よって帰納法の仮定より, $n \alpha_n(g)$ は $n = O(g)$ ならば $|G|$ をとり, そうでなければ 0 となる.

よって, 数学的帰納法により成り立つことが言える. $\square$

4 指標の和と積について

最後に, λ -ring や Remark 1 で述べた necklace ring $Nr(R)$ を用い, 指標の和と積における交代テンソル積表現の指標の母関数について述べる. つまり, χ_1, χ_2 を有限群 G の指標としたとき, $\lambda_t(\chi_1 + \chi_2), \lambda_t(\chi_1 \chi_2)$ の計算方法について考える.

pre- λ -ring R はその λ -operation がさらに次の 3 条件を満たすとき, λ -ring と呼ばれる.

- 任意の $n \geq 2$ に対し, $\lambda^n(1) = 0$ が成り立つ.
- 任意の $n \geq 1$ と $r, s \in R$ に対し, $\lambda^n(rs) = P_n(\lambda^1(r), \dots, \lambda^n(r); \lambda^1(s), \dots, \lambda^n(s))$ が成り立つ.

- 任意の $n, m \geq 1$ と $r \in R$ に対し, $\lambda^n(\lambda^m(r)) = P_{n,m}(\lambda^1(r), \dots, \lambda^{mn}(r))$ が成り立つ.

但し, 多項式 $P_n, P_{n,m}$ は次のように定義する.

- n を自然数とし, $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$ を独立変数, 任意の自然数 i に対し e_i を $x_1, \dots, x_n$ の, s_i を $y_1, \dots, y_n$ のそれぞれ i 次基本対称式とする. この時, 対称多項式 $P_n(e_1, \dots, e_n; s_1, \dots, s_n)$ を, 多項式 $\prod_{i,j=1}^n (1 + x_i y_j t)$ の t^n の係数と定義する.
- n, m を自然数, $x_1, \dots, x_{nm}$ を独立変数, e_i をこれらの i 次基本対称式とする. 対称多項式 $P_{n,m}(e_1, \dots, e_{nm})$ を, 多項式 $\prod_{1 \leq i_1 < \dots < i_m \leq nm} (1 + x_{i_1} \dots x_{i_m} t)$ の t^n の係数と定義する.

例として, $\mathbb{Z}$ が二項係数を以て, 任意の有限群 G に対し $CF(G)$ が 2.3 節で述べた方法で, λ -ring となることが知られている.

次に R を λ -ring とは限らない任意の可換環とする. 第 2 章の冒頭で述べた集合 $\Lambda(R)$ は universal- λ -ring と呼ばれ ([2] Definition 2.7), λ -ring の構造が定義される. 具体的には加法 “ $+$ ” は巾級数の積で, 乗法と λ -operation は任意の $f = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} a_i t^i, g = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} b_i t^i \in \Lambda(R)$ と $m \geq 0$ に対し次のように定義される.

$$f \cdot_{\Lambda} g := 1 + \sum_{n=0}^{\infty} P_n(a_1, \dots, a_n; b_1, \dots, b_n) t^n, \quad \lambda^m(f) := 1 + \sum_{n=0}^{\infty} P_{n,m}(a_1, \dots, a_{mn}) t^n.$$

また R が λ -ring ならば写像 $\lambda_t : R \rightarrow \Lambda(R)$ は λ -homomorphism である (同 Proposition 2.8).

Remark 1 で述べた通り, R^N に式 (4) による乗法を定義すると, R^N は R 上 necklace ring と呼ばれ, $Nr(R)$ と記される. このとき, 写像 $z : \Lambda(R) \rightarrow R^N, \phi : Nr(R) \rightarrow R^N$ は環準同型写像となる. 加えて R が binomial ring であるとき写像 $E_{Nr} : \Lambda(R) \rightarrow Nr(R)$ は環同型写像となる.

G を有限群とすると $CF(G)$ は binomial ring かつ λ -ring である (明らかではあるが, この λ -ring としての構造は 2.3 章で述べたものであり, binomial ring であることから導入される, 全ての Adams operation が恒等写像となる λ -ring の構造とは異なる). $\chi_1, \chi_2 \in CF(G), (\alpha_n)_{n=1}^{\infty} = E_{Nr}(\lambda_t(\chi_1)), (\beta_n)_{n=1}^{\infty} = E_{Nr}(\lambda_t(\chi_2))$ とすると, 合成写像 $E_{Nr} \circ \lambda_t$ は環準同型写像なので,

$$E_{Nr}(\lambda_t(\chi_1 + \chi_2)) = (\alpha_n)_{n=1}^{\infty} +_{Nr} (\beta_n)_{n=1}^{\infty}, \quad E_{Nr}(\lambda_t(\chi_1 \chi_2)) = (\alpha_n)_{n=1}^{\infty} \cdot_{Nr} (\beta_n)_{n=1}^{\infty}$$

を得る. よって, 既に $(\alpha_n)_{n=1}^{\infty}, (\beta_n)_{n=1}^{\infty}$ を知っているのならば, necklace ring $Nr(CF(G))$ における加法・乗法を用いることで, $\lambda_t(\chi_1 + \chi_2), \lambda_t(\chi_1 \chi_2)$ を計算することができる.

一般に $(\alpha_n)_{n=1}^{\infty}, (\beta_n)_{n=1}^{\infty}$ は零でないものがずっと出現する (自然数 n で, 任意の自然数 i に対し $i > n$ ならば $\alpha_i = 0, \beta_i = 0$ が成り立つようなものが存在しない) 可能性があるので加法 “ $+$ ” はともかく乗法 “ $\cdot_{Nr}$ ” は計算が困難であると思われる. しかし, もし自然数 n で $i > n$ ならば $\alpha_i = \beta_i = 0$ となるものが存在するならば, 例えば χ_1, χ_2 が共に本稿で扱った整数値指標なら Theorem 8 より該当することがわかるが, 乗法の計算はいくらか簡単になるであろうと予想される.

このように, 本稿で述べた Theorem 及び乗法における計算のしやすさという点から, 整数値指標をもつ交代テンソル積表現の指標の母関数と necklace ring の概念とのある程度の相性の良さを見ることができる. 加えて, G や整数値指標 χ の特殊化, もしくは necklace ring の性質を用いれば, さらなる性質の発見を望むことができるのではないかと筆者は期待する.

参考文献

- [1] 岡田 聡一, 数理物理シリーズ 3 古典群の表現と組合せ論 上, 培風館, 2006

- [2] 近藤 武, 岩波講座 基礎数学 代数学 i 群論 III, 岩波書店, 1977
- [3] Donald Knutson, λ -Rings and the Representation Theory of the Symmetric Group, Lecture Notes in Math., Vol. 308, Springer-Verlag, Berlin, 1973
- [4] N. Metropolis and Gian-Carlo Rota, Witt vectors and the Algebra of Necklaces, Advances in mathematics **50**, 95-125 (1983)
- [5] Ian Stewart, Galois theory, Chapman & Hall/CRC, 2004
- [6] Donald Yau, Lambda-rings, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 2010