

群環を成分にもつ行列の行列式 (Determinant of Matrices of Group Algebras)

九州大学大学院数理学府 山口尚哉 (Naoya YAMAGUCHI)
n-yamaguchi@math.kyushu-u.ac.jp

1 はじめに

K を体, G を有限群として, 群環 KG を成分にもつ行列の行列式を定義する (KG を半単純環とは仮定しない). またこの議論より, 指数 2 の可換な部分群をもつ群にはその群の群環上に共役写像が定義できること, 一般の有限群の群行列式の新しい因数分解が得られる可能性があること (実際, いくつかの群については新しい因数分解が得られた) を示す.

1.1 群環 KG を成分にもつ行列の行列式についての結果

本稿では群環 KG を成分にもつ行列の行列式を定義する. そのために必要な主結果は次である.

Theorem 1. 正規鎖 $G = H_0 \supset H_1 \supset H_2 \supset \cdots \supset H_r = \{e\}$ において, H_k が可換群ならば, 次の条件を満たす写像 $\text{Det} : M(n, KG) \rightarrow KH_k$ が存在する.

1. $\text{Det}AB = \text{Det}A \text{Det}B$ が成り立つ.
2. A が可逆であることの必要十分条件は, $\text{Det}A \in (KH_k)^\times$ である.

この定理は行列環 $M(n, KG)$ をよりサイズの大きい行列環 $M(mn, KH)$ に埋め込む (H は G の正規部分群) ことを繰り返して, 可換環を成分にもつ行列にまで埋め込み, 通常の行列式を用いて新しい行列式が実現することを主張している. すなわち「行列のサイズを大きくして既存の行列式を用いることによって新しい行列式を定義する」といった Study 行列式に見られる手法を用いる.

群環は (K の標数が $|G|$ と互いに素であれば) Wedderburn の構造定理から斜体を成分にもつ行列の直積と同型なので, このような手法で群環を成分に

もつ行列の行列式を定義できることは想像に難くないかもしれない。実際、群環の元を正則表現の行列表示で表せば、本稿の結果の特殊な場合 (正規鎖として $G \supset \{e\}$ をとった場合) に一致する。しかしながら本稿は、Wedderburn の構造定理のような抽象的な議論を避けることにより、体 K に依存しない、行列のサイズを大きくしたときにその行列成分は一般には斜体とは限らない状況で議論を進めていく。

1.2 指数 2 の可換な部分群をもつ群の群環上の共役について

指数 2 の可換な部分群 H をもつ群 G の群環 KG 上で共役写像を定義する。 $X \in KG$ に対して、 X の共役を $\overline{X}$ で表せば、共役は以下の性質を満たすことがわかる。

任意の $X, Y \in KG$ に対して、

1. $\overline{\overline{X}} = X$.
2. $X + \overline{X}, X\overline{X} = \overline{X}X \in Z(KG)$.
3. $\overline{XY} = \overline{Y}\overline{X}$.

また共役写像を用いれば、 KG の元を成分にもつ 2×2 行列の逆行列の公式が得られる。

2 群環を成分にもつ行列の行列式

群環を成分にもつ行列の行列式を定義する。

2.1 群環 KG を成分にもつ行列

K を体、 G を有限群、 H を G の正規部分群として、 H による G の左剰余類分解を 1 つ決める。すなわち

$$G = \bigsqcup_{g \in R} gH, \quad R = \{g_1, g_2, \dots, g_m\}$$

とする。群環 $KG = \left\{ \sum_{g \in G} x_g g \mid x_g \in K \right\}$ を成分にもつ $n \times n$ 型の行列 $M(n, KG)$ の元は、 $A_g \in M(n, KH)$ が存在して、 $\sum_{g \in R} g A_g$ と一意的に表される。

2.2 Kronecker 積

Kronecker 積について復習しておく. $m_1 \times n_1$ 型の行列 $A = (a_{ij})$ と $m_2 \times n_2$ 型の行列 $B = (b_{ij})$ に対して, A と B の Kronecker 積 $A \otimes B$ とは, ブロック行列の形で表したとき,

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \cdots & a_{1n_1}B \\ a_{21}B & a_{22}B & \cdots & a_{2n_1}B \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m_1 1}B & a_{m_1 2}B & \cdots & a_{m_1 n_1}B \end{bmatrix}$$

で定義される $(m_1 m_2) \times (n_1 n_2)$ 型の行列のことである.

2.3 行列のサイズを大きくする

$G/H = \{g_1 H, g_2 H, \dots, g_m H\}$ の正則表現を, 次のように $M(m, K)$ で行列表示したものを L とする.

$$L(gH) \text{ の } (i, j) \text{ 成分} = \begin{cases} 1 & g_i g_j^{-1} \in gH, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

$A = (a_{ij}) \in M(n, KG)$ に対して, $A^h = (h^{-1} a_{ij} h)$ と定義する.

Lemma 2. $M(n, KG)$ から $M(mn, KG)$ への以下の写像 φ は, 単射 K 代数写像である.

$$\varphi \left(\sum_{g \in R} g A_g \right) = \sum_{g \in R} (L(gH) \otimes g A_g).$$

ただし $\otimes$ は Kronecker 積である.

Proof. 積に関する準同型性のみを示せばよい.

$$\begin{aligned} \sum_{g \in R} g A_g \sum_{h \in R} h B_h &= \sum_{g \in R} \sum_{h \in R} g h A_g^h B_h \\ &= \sum_{g' \in R} \sum_{\substack{g, h \in R \\ gh \in g' H}} g h A_g^h B_h \\ &= \sum_{g' \in R} g' \left(g'^{-1} \sum_{\substack{g, h \in R \\ gh \in g' H}} g h A_g^h B_h \right) \end{aligned}$$

となるので,

$$\begin{aligned}
\varphi \left(\sum_{g \in R} g A_g \sum_{h \in R} h B_h \right) &= \sum_{g' \in R} \left(L(g') \otimes \sum_{\substack{g, h \in R \\ gh \in g'H}} gh A_g^h B_h \right) \\
&= \sum_{g' \in R} \sum_{\substack{g, h \in R \\ gh \in g'H}} (L(g') \otimes gh A_g^h B_h) \\
&= \sum_{g, h \in R} (L(ghH) \otimes gh A_g^h B_h) \\
&= \sum_{g \in R} (L(gH) \otimes g A_g) \sum_{h \in R} (L(hH) \otimes h B_h) \\
&= \varphi \left(\sum_{g \in R} g A_g \right) \varphi \left(\sum_{h \in R} h B_h \right)
\end{aligned}$$

がわかった. $\square$

$g_i g_j^{-1} \in g_k H$ が成り立つとき, $\overline{g_i g_j^{-1}} = g_k$ とする.

Lemma 3. $\varphi \left(\sum_{g \in R} g A_g \right)$ のブロック (i, j) 成分は $\overline{g_i g_j^{-1}} A_{\overline{g_i g_j^{-1}}}$ となる.

Proof. $\varphi \left(\sum_{g \in R} g A_g \right) = \sum_{g \in R} (L(gH) \otimes g A_g)$ のブロック (i, j) 成分は,

$$\sum_{g \in R} ((L(gH) \text{ の } (i, j) \text{ 成分}) \cdot g A_g) = \overline{g_i g_j^{-1}} A_{\overline{g_i g_j^{-1}}}$$

となることよりわかった. $\square$

$$P = \begin{bmatrix} g_1 I_n & & & \\ & g_2 I_n & & \\ & & \ddots & \\ & & & g_m I_n \end{bmatrix}$$

とする.

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} g_1^{-1} I_n & & & \\ & g_2^{-1} I_n & & \\ & & \ddots & \\ & & & g_m^{-1} I_n \end{bmatrix}$$

であることに注意しておく.

Lemma 4. $M(n, KG)$ から $M(mn, KH)$ への以下の写像 ψ は, 単射 K 代数写像である.

$$\begin{aligned}\psi\left(\sum_{g \in R} gA_g\right) &= P^{-1}\varphi\left(\sum_{g \in R} gA_g\right)P \\ &= P^{-1}\sum_{g \in R} (L(gH) \otimes gA_g)P.\end{aligned}$$

Proof. Well-defined であることを示せばよい. これは Lemma 3 より,

$$\begin{aligned}P^{-1}\varphi\left(\sum_{g \in R} gA_g\right)P \text{ のブロック } (i, j) \text{ 成分} &= g_i^{-1}\overline{g_i g_j^{-1}}A_{g_i g_j^{-1}}g_j \\ &= g_i^{-1}\overline{g_i g_j^{-1}}g_j A_{g_i g_j^{-1}}^{g_j}\end{aligned}$$

となるので, $g_i^{-1}\overline{g_i g_j^{-1}}g_j \in H$ を示せばよい. これは定義より $g_i g_j^{-1} \in \overline{g_i g_j^{-1}}H$, H が正規なので $(g_i g_j^{-1})^{-1}g_i \in Hg_j = g_j H$ となることよりよい. $\square$

(i, j) 成分が 1 で他の成分が 0 である $m \times m$ 行列を E_{ij} とする.

Lemma 5. $\psi(X)^{-1} \in M(mn, KH)$ が存在するならば, $\psi(X)^{-1} \in \psi(M(n, KH))$ である.

Proof. $\psi(X)^{-1} \in M(mn, KH)$ なので $Y_{ij} \in M(n, KH)$ が存在して,

$$\begin{aligned}\psi(X)^{-1} &= \psi(g_1 Y_{11}) + \cdots + \psi(g_m Y_{m1}) + E_{12} \otimes Y_{12} + \cdots + E_{mm} \otimes Y_{mm} \\ &= \psi\left(\sum_{k=1}^m g_k Y_{k1}\right) + E_{12} \otimes Y_{12} + \cdots + E_{mm} \otimes Y_{mm}\end{aligned}$$

とかける. ゆえに

$$\begin{aligned}I_{mn} &= \psi(X)(\psi(X))^{-1} \\ &= \psi(X)\left(\psi\left(\sum_{k=1}^m g_k Y_{k1}\right) + E_{12} \otimes Y_{12} + \cdots + E_{mm} \otimes Y_{mm}\right) \\ &= \psi\left(X\left(\sum_{k=1}^m g_k Y_{k1}\right)\right) + \psi(X)\begin{bmatrix} O & Y_{12} & \cdots & Y_{1m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ O & Y_{m2} & \cdots & Y_{mm} \end{bmatrix}\end{aligned}$$

となり,

$$\psi\left(X\left(\sum_{k=1}^m g_k Y_{k1}\right)\right) = \begin{bmatrix} I_n & & \\ O & & \\ \vdots & * & \\ O & & \end{bmatrix}$$

がわかる. ψ の像はブロック $(k, 1)$ 成分が決まれば他のブロック成分は決まるので,

$$\psi \left(X \left(\sum_{k=1}^m g_k Y_{k1} \right) \right) = \begin{bmatrix} I_n & & \\ & \ddots & \\ & & I_n \end{bmatrix}$$

となる. よって,

$$\psi(X)^{-1} = \psi \left(X \left(\sum_{k=1}^m g_k Y_{k1} \right) \right) \in \psi(M(n, KG))$$

がわかった. □

2.4 G/H が可換群の場合の ψ の像の特徴づけ

G/H が可換群の場合に $\psi(M(n, KG))$ の像を特徴づける.

Lemma 6. $\varphi(M(n, KG))$ の元は $L(gH) \otimes I_n$ と可換.

$J_g = P^{-1}(L(gH) \otimes I_n)P$ とする.

Lemma 7. $\psi(M(n, KG))$ の元は J_g と可換.

Lemma 8. $M(mn, KH)$ の元で J_g と可換なもの全体は $\psi(M(n, KG))$ に一致する. すなわち

$$\psi(M(n, KG)) = \{X \in M(mn, KH) \mid J_g X = X J_g\}$$

が成り立つ.

Proof. $X \in M(mn, KH)$ とする. $X_{ij} \in M(n, KH)$ が存在して,

$$A = \psi(g_1 X_{11}) + \psi(g_2 X_{21}) + \cdots + \psi(g_m X_{m1}) + E_{12} \otimes X_{12} + \cdots + E_{mm} \otimes X_{mm}$$

となる. $X J_g = J_g X$ とすれば Lemma 7 より,

$$(E_{12} \otimes X_{12} + \cdots + E_{mm} \otimes X_{mm}) J_g = J_g (E_{12} \otimes X_{12} + \cdots + E_{mm} \otimes X_{mm})$$

が成り立つ. ここでブロック $(k, 1)$ 成分が $g_k I_n g_1^{-1}$ となる J_g (すなわち $L(g)$ の $(k, 1)$ 成分が 1 となる g についての J_g) をとれば,

$$X_{1k} = X_{2k} = \cdots = X_{mk} = O$$

がわかる. ゆえに, X は ψ の像である. □

2.5 行列式の構成

G の 1 つの正規部分群 H に行列式が定義されていれば, G に行列式が定義できることを示す.

次のような性質を満たす写像 $\det : M(n, KH) \rightarrow KH$ が存在するとする. 任意の $A, B \in M(n, KH)$ に対して,

1. $\det AB = \det A \det B$ が成り立つ.
2. A が可逆であることの必要十分条件は, $\det A \in (KH)^\times$ である.

Definition 9. $M \in M(n, KG)$ に対して,

$$\text{Det}M = (\det \circ \psi)(M)$$

と定義する.

Lemma 10. $M \in M(n, KG)$ とする. このとき M が可逆であることの必要十分条件は, $\text{Det}M \in (KH)^\times$ が成り立つことである.

Proof. M を可逆とする.

$$\begin{aligned} \text{Det}M \text{Det}(M^{-1}) &= \text{Det}(MM^{-1}) \\ &= \text{Det}(I) \\ &= \det \psi(I) \\ &= \det I \in (KH)^\times \end{aligned}$$

となるので, $\text{Det}M \in (KH)^\times$ がわかる. 逆に $\text{Det}M = \det \psi(M) \in (KH)^\times$ とすれば, $\psi(M)^{-1} \in \psi(M(n, KG))$ となるので, $\psi(N) = \psi(M)^{-1}$ となる $N \in M(n, KG)$ が存在して,

$$\begin{aligned} \psi(MN) &= \psi(M)\psi(N) \\ &= \psi(M)\psi(M)^{-1} \\ &= I \end{aligned}$$

ψ は単射なので, $MN = I$ となる. □

Definition 11. 群 G の部分群の列

$$G = H_0 \supset H_1 \supset H_2 \supset \cdots \supset H_r = \{e\}$$

で, すべての $i = 1, 2, \dots, r$ に対して, H_i が H_{i-1} の正規部分群であるとき, これを G の長さ r の正規鎖という.

Theorem 12. 正規鎖 $G = H_0 \supset H_1 \supset H_2 \supset \cdots \supset H_r = \{e\}$ において, H_k が可換群ならば, 次の条件を満たす写像 $\text{Det} : M(n, KG) \rightarrow KH_k$ が存在する.

1. $\text{Det}AB = \text{Det}A \text{Det}B$ が成り立つ.

2. A が可逆であることの必要十分条件は, $\text{Det}A \in (KH_k)^\times$ である.

Proof. H_k を正規鎖に含まれる可換群とする. H_k は可換群なので, 任意の $A, B \in M(n, KH)$ に対して,

1. $\text{Det}_k AB = \text{Det}_k A \text{Det}_k B$ が成り立つ.

2. A が可逆であることの必要十分条件は, $\text{Det}_k A \in (KH_k)^\times$ である.

となる写像 $\text{Det}_k : M(n, KH_k) \rightarrow KH_k$ が存在する. H_k は H_{k-1} の正規部分群なので, これまでの議論より, 任意の $A, B \in M(n, KH_{k-1})$ に対して,

1. $\text{Det}_{k-1} AB = \text{Det}_{k-1} A \text{Det}_{k-1} B$ が成り立つ.

2. A が可逆であることの必要十分条件は, $\text{Det}_{k-1} A \in (KH_k)^\times$ である.

となる写像 $\text{Det}_{k-1} : M(n, KH_{k-1}) \rightarrow (KH_k)$ が定義できる. この議論を $H_0 = G$ まで繰り返せばよい. $\square$

3 具体例と群環上の共役写像

具体例と指数 2 の可換な部分群をもつ G の群環 KG 上の共役写像について述べる. これからは KG の元の g の係数を不定元とみなして考えることにする. すなわち

$$KG[x_g] = \left\{ \sum_{g \in G} A_g g \mid A_g \in K[x_g] \right\}$$

上で考える.

3.1 群行列式

1×1 行列 $(\sum_{g \in G} x_g g)$ に対して, 正規鎖 $G \supset \{e\}$ を考えて Theorem 12 で定義される行列式を用いると,

$$\begin{aligned} \text{Det} \left(\sum_{g \in G} x_g \right) &= \text{Det} \left(P^{-1} \begin{bmatrix} g_1 g_1^{-1} x_{g_1 g_1^{-1}} & \cdots & g_1 g_n^{-1} x_{g_1 g_n^{-1}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g_n g_1^{-1} x_{g_n g_1^{-1}} & \cdots & g_n g_n^{-1} x_{g_n g_n^{-1}} \end{bmatrix} P \right) \\ &= \text{Det} \left(\begin{bmatrix} x_{g_1 g_1^{-1}} e & \cdots & x_{g_1 g_n^{-1}} e \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{g_n g_1^{-1}} e & \cdots & x_{g_n g_n^{-1}} e \end{bmatrix} \right) \\ &= \Theta(G)e \end{aligned}$$

となる. ただし $\Theta(G)$ は次で定義される群行列式のことを表す.

Definition 13 (群行列式). G を有限群として, G の各元 g に対して, 不定元 x_g を用意する. このとき

$$\Theta(G) = \det (x_{gh^{-1}})_{g,h \in G}$$

を G の群行列式という.

すなわち群行列式は群環の元が可逆かどうかを判別する式である.

3.2 指数 2 の可換な部分群をもつ場合

群 G が指数 2 の可換な部分群 H をもつとする. このとき H は G の正規部分群である. $G = H \sqcup bH$ として, 1×1 行列 $(X) = (A + bB)$ ($A, B \in KH$) に対して, 正規鎖 $G \supset H$ を考えて Theorem 12 で定義される行列式を用いると,

$$\text{Det} X = \det \begin{bmatrix} A & bBb \\ B & b^{-1}Ab \end{bmatrix}$$

となる. この行列を考察する. 以後の議論では $h \in H$ が存在して,

$$\begin{aligned} b^{-1} &= hb \\ &= bh \end{aligned}$$

が成り立つこと, $b^2 \in H$ となることに注意しておく.

$KG[x_g]$ の中心を $Z(KG[x_g])$ で表す.

Lemma 14.

$$M = \begin{bmatrix} A & bBb \\ B & b^{-1}Ab \end{bmatrix}$$

のトレースと行列式は, $Z(KG[x_g])$ の元である.

Proof. $\text{Tr} M = A + b^{-1}Ab \in Z(KG[x_g])$ はよい. $\det M = Ab^{-1}Ab - BbBb \in Z(KG[x_g])$ を示す. これは b と $\det M$ が可換であることを示せばよい.

$$\begin{aligned} b(\det M) &= b(Ab^{-1}Ab - BbBb) \\ &= (bAb^{-1})Ab - (bBb)Bb \\ &= A(bAb^{-1})b - B(bBb)b \\ &= A(b^{-1}b^2Ab^{-1})b - (BbBb)b \\ &= (Ab^{-1}Ab^2b^{-1} - BbBb)b \\ &= (\det M)b \end{aligned}$$

よりわかった. □

つまり $f(X) = X^2 - (\text{Tr}M)X + \det M$ の係数は, $KG[x_g]$ の中心の元であることがわかった. 次に $f(x) = 0$ の解を求める. $D = A^2 - 2Ab^{-1}Ab + b^{-1}A^2b + 4BbBb$ とする.

Lemma 15.

$$\begin{aligned} D &= (A - b^{-1}Ab + 2bB)^2 \\ &= (A - b^{-1}Ab - 2bB)^2 \end{aligned}$$

が成り立つ.

2 次方程式 $X^2 - (\text{Tr}M)X + \det M = 0$ の解 X は,

$$X = \frac{A + b^{-1}Ab \pm \sqrt{D}}{2}$$

となるので, Lemma 15 より次がわかる.

Lemma 16. $A + bB, b^{-1}Ab - bB, A - bB, b^{-1}Ab + bB$ は $f(x) = 0$ の解である.

Definition 17 (共役). $X = A + bB \in KG[x_g]$ に対して,

$$\overline{X} = b^{-1}Ab - bB$$

と定義して, $\overline{X}$ を X の共役という.

Lemma 18. 任意の $X, Y \in KG[x_g]$ に対して, 次が成り立つ.

1. $\overline{\overline{X}} = X$.
2. $X + \overline{X}, X\overline{X} = \overline{X}X \in Z(KG[x_g])$.
3. $\overline{XY} = \overline{Y}\overline{X}$.

Lemma 19. $X = \overline{X}$ ならば, X は $Z([KG])$ の元である.

Corollary 20. $X^2 - (\text{Tr}M)X + \det X = 0$ の 1 つの解を λ とすれば, $\overline{\lambda}$ も解である.

共役写像を利用すれば, 2×2 行列の逆行列の公式が得られる.

Theorem 21.

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \overline{D} & \overline{B} \\ \overline{C} & \overline{A} \end{bmatrix} (\alpha\overline{\alpha} - \beta\gamma)^{-1} \begin{bmatrix} \overline{\alpha} & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{bmatrix}$$

が成り立つ. ただし

$$\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \overline{\alpha} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A\overline{D} + B\overline{C} & A\overline{B} + B\overline{A} \\ C\overline{D} + D\overline{C} & D\overline{A} + C\overline{B} \end{bmatrix}$$

とする.

Proof.

$$\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \bar{\alpha} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{D} & \bar{B} \\ \bar{C} & \bar{A} \end{bmatrix}$$

であり, $\alpha, \bar{\alpha}, \beta, \gamma$ がそれぞれ可換であることよりよい. $\square$

4 これから

群行列式の因数分解について 1 つの予想を立てる. この予想と群行列式の既約分解に関する定理より, G の既約表現の次数に関する予想が得られることを説明する.

1×1 行列 $\left(\sum_{g \in G} x_g g\right)$ に対して, 正規鎖 $G \supset \{e\}$ を考えて Theorem 12 で定義される行列式を用いると, 群行列式 $\Theta(G)$ が判別式であることがわかる. また正規鎖を $G \supset H_1 \supset H_2 \supset \cdots \supset H_k$ として行列式を考えれば, $\text{Det}\left(\sum_{g \in G} x_g g\right) = \sum_{g \in H_k} A_g g$ となる. A_g の次数は $[G : H_k]$ に一致することに注意しておく. $\prod_{\chi \in \overline{H_k}} \sum_{g \in H_k} \chi(g) A_g g = C e$ となるので,

$$\begin{aligned} \Theta(G) \neq 0 &\iff \sum_{g \in G} x_g g \text{ は可逆} \\ &\iff \sum_{g \in H_k} A_g g \text{ は可逆} \\ &\iff C \neq 0 \end{aligned}$$

がわかる. ここで次のような予想が成り立つと考えている.

$$\Theta(G) = C.$$

つまり判別式は正規鎖の取り方によらないという予想である. 上の議論をまとめておく.

Conjecture 22. 正規鎖 $G = H_0 \supset H_1 \supset H_2 \supset \cdots \supset H_r = \{e\}$ において, 可換群 H_k が存在すれば,

$$\Theta(G) = \sum_{\chi \in \overline{H_k}} \sum_{g \in H_k} \chi(g) A_g,$$

$\deg A_g = [G : H_k]$ となる $A_g \in K[x_g]$ が存在する.

この予想と下に述べる Frobenius の定理より, G の既約表現の次数に関する予想が得られる.

Theorem 23 (Frobenius). $\widehat{G}$ を有限群 G の既約なユニタリ表現の同値類の代表元の完全集合とすると, 群行列式 $\Theta(G)$ の既約分解は次で与えられる.

$$\Theta(G) = \prod_{\varphi \in \widehat{G}} \det \left(\sum_{g \in G} \varphi(g) x_g \right)^{\deg \varphi}.$$

Conjecture 24. 正規鎖 $G = H_0 \supset H_1 \supset H_2 \supset \cdots \supset H_r = \{e\}$ において, H_k が可換群ならば, G の既約表現の次数は $[G : H_k]$ を超えない.

参考文献

- [1] Helmer Aslaksen, Quaternionic Determinant, The Mathematical Intelligencer. Vol. 18, pp. 57–65, 1996.
- [2] K. W. Johnson, On the group determinant, Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society. Vol. 109, pp. 299–311, 1991.
- [3] 清田正夫, 群指標とその応用. 数理解析研究所講究録 1214 (2001 年), 76–82.
- [4] Z. Qingxia, Y. Hong, On the Structure of Augmentation Quotient Groups for the Generalized Quaternion Group, Algebra Colloquium. Vol. 19, pp. 137–148, 2012.
- [5] C. Shan, C. Hong, T. Guoping, Augmentation quotients for complex representation rings of dihedral groups, Frontiers of Mathematics in China. Vol. 7, pp. 1–18, 2012.
- [6] Benjamin Steinberg, *Representation Theory of Finite Groups*. Springer, 2012.
- [7] 鈴木達夫, 非可換行列式とその応用. 数理解析研究所講究録 1500 (2006 年), 26–45.
- [8] N. Yamaguchi, Factorization of Group Determinant in Some Group Algebra. arXiv:1405.1900, 2014.