

有限体上の群不変フーリエ変換と q -超幾何多項式

q -Krawtchouk Polynomials as Kernel Functions of Group-invariant Fourier Transformation
over a Finite Field.

京都大学大学院 理学研究科 川村晃英

Kyoto University, Kawamura Koei

要約 (abstract)

有限アーベル群上の群不変関数は、フーリエ変換によって、その指標群上の群不変関数へ変換される。その核関数は有限群のゲルファント・ペアにおける球関数と関連があり、いくつかの例で、そこに q -Krawtchouk 多項式などの超幾何型の特殊多項式が現れることが知られている。本講演では、群作用をその部分群に制限した状況を併せて考察し、得られる核関数の相互関係について調べる。更にその理論的考察を利用して、有限体上の行列の群を対象として、核関数の具体形を求める。

By Fourier transformation, any group-invariant functions over finite Abelian groups are transformed into group-invariant functions over the character groups. The kernel functions of this are related with the spherical functions of the Gelfand pair of finite groups. In this talk, we restrict the group action to the subgroups, and study the relations among kernel functions. Further, by using this relations, we calculate some kernel functions of groups of matrices, where we see q -Krawtchouk polynomials.

1 導入：設定と考察対象

M を有限アーベル群（演算は $+$ ）とし、その指標群を $\hat{M}$ で表す。一般に M 上関数 $\varphi \in \mathbb{C}[M]$ は、次なるフーリエ変換により、 $\hat{M}$ 上関数 $\mathcal{F}\varphi \in \mathbb{C}[\hat{M}]$ へと変換される：

$$\mathcal{F}\varphi(\chi) = \frac{1}{\sqrt{|M|}} \sum_{x \in M} \varphi(x) \overline{\chi(x)} \quad (\chi \in \hat{M}).$$

また、逆フーリエ変換は次式で定義される： $\xi \in \mathbb{C}[\hat{M}]$ に対して、

$$\bar{\mathcal{F}}\xi(x) = \frac{1}{\sqrt{|M|}} \sum_{\chi \in \hat{M}} \xi(\chi) \chi(x) \quad (x \in M).$$

これらは互いに逆変換、つまり $\bar{\mathcal{F}}\mathcal{F}\varphi = \varphi$, $\mathcal{F}\bar{\mathcal{F}}\xi = \xi$ が常に成り立つ。

さて G を有限群とし、これが M へ群自己同型として作用しているとする。その作用を ρ で表す。この時、指標群 $\hat{M}$ に対しても、 G の作用 $\hat{\rho}$ が次のように自然に誘導される：

$$\hat{\rho}(g)\chi = \chi \circ \rho(g^{-1}) \quad (g \in G, \chi \in \hat{M}).$$

作用 ρ , $\hat{\rho}$ は、それぞれ関数空間 $\mathbb{C}[M]$, $\mathbb{C}[\hat{M}]$ へと持ち上がる。その時、フーリエ変換および逆変換 $\mathcal{F}$, $\bar{\mathcal{F}}$ との間に、次なる可換性が成り立つ：

$$\mathcal{F} \circ \rho(g) = \hat{\rho}(g) \circ \mathcal{F}, \quad \bar{\mathcal{F}} \circ \hat{\rho}(g) = \rho(g) \circ \bar{\mathcal{F}} \quad (\forall g \in G).$$

これにより、 G -不変関数の変換はまた G -不変となる。つまり $\mathcal{F}, \bar{\mathcal{F}}$ を G -不変関数の空間 $\mathbb{C}[M]^G, \mathbb{C}[\hat{M}]^G$ の間の変換に制限できる。これを群不変フーリエ変換と呼ぶこととする。

実際に書き下してみよう。 $M, \hat{M}$ の G -軌道全体をそれぞれ $G \backslash M, G \backslash \hat{M}$ と表すとする。 $\varphi \in \mathbb{C}[M]^G$ および $\mathcal{P} \in G \backslash \hat{M}$ に対して、

$$\mathcal{F}\varphi(\mathcal{P}) = \frac{1}{\sqrt{|M|}} \sum_{\mathcal{O} \in G \backslash M} \varphi(\mathcal{O}) \overline{\Phi(\mathcal{P}, \mathcal{O})},$$

ここに

$$\Phi(\mathcal{P}, \mathcal{O}) = \sum_{x \in \mathcal{O}} \chi(x), \chi \in \mathcal{P} \quad (1)$$

となる。この $\Phi: (G \backslash \hat{M}) \times (G \backslash M) \rightarrow \mathbb{C}$ を、群不変フーリエ変換の核関数と呼ぶ。

群不変関数の逆フーリエ変換とその核関数も同様に定義される。すなわち $\xi \in \mathbb{C}[\hat{M}]^G$ および $\mathcal{O} \in G \backslash M$ に対し、

$$\bar{\mathcal{F}}\xi(\mathcal{O}) = \frac{1}{\sqrt{|M|}} \sum_{\mathcal{P} \in G \backslash \hat{M}} \xi(\mathcal{P}) \Psi(\mathcal{P}, \mathcal{O}),$$

ここに核関数 $\Psi: (G \backslash \hat{M}) \times (G \backslash M) \rightarrow \mathbb{C}$ は

$$\Psi(\mathcal{P}, \mathcal{O}) = \sum_{\chi \in \mathcal{P}} \chi(x), x \in \mathcal{O} \quad (2)$$

となる。

球面調和解析の有限アナログにおける球関数との関連を述べておく。一般に、有限群とその部分群のペア $(\mathbb{G}, G)$ がゲルファント・ペアであるとは、次なる同値な条件を満たすことである [10] :

(i) 誘導表現 $\text{ind}_G^{\mathbb{G}} 1$ の既約 $\mathbb{G}$ 表現への分解が無重複である。

(ii) $\mathbb{G}$ 上の G -両側不変関数の空間 $\mathbb{C}[G \backslash \mathbb{G}/G]$ が、畳み込み積 (convolution) $*$ に関して可換代数となる。

ゲルファント・ペア $(\mathbb{G}, G)$ に対して、 G -両側不変関数 $\omega \in \mathbb{C}[G \backslash \mathbb{G}/G]$ で、次をみたすものを、その球関数という。すなわち、 $\omega(e) = 1$ (e は $\mathbb{G}$ の単位元)、かつ、任意の $\varphi \in \mathbb{C}[G \backslash \mathbb{G}/G]$ に対して $\lambda_\varphi \in \mathbb{C}$ が定まり、 $\varphi * \omega = \lambda_\varphi \omega$ をみたすもの (つまり同時固有関数) である。

我々の設定では、半直積群 $M \rtimes G$ と、その部分群としての G のペアがゲルファント・ペアとなる。 $\chi \in \hat{M}$ に対して、このゲルファント・ペアの球関数 $\omega_\chi \in \mathbb{C}[M]^G$ が次式で与えられる：

$$\omega_\chi(x) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi(\rho(g)x) \quad (x \in M).$$

なお、 $\chi, \chi' \in \hat{M}$ が G の作用で移りあうとき、 $\omega_\chi = \omega_{\chi'}$ が成り立つ。したがって、軌道 $\mathcal{P} \in G \backslash \hat{M}$ ごとに球関数 $\omega_{\mathcal{P}}$ が定まると言える。群不変フーリエ変換の核関数 (1), (2) との間には、次の関係がある：

$$\omega_{\mathcal{P}}(\mathcal{O}) = \frac{1}{|\mathcal{O}|} \Phi(\mathcal{P}, \mathcal{O}) = \frac{1}{|\mathcal{P}|} \Psi(\mathcal{P}, \mathcal{O}) \quad (\mathcal{O} \in G \backslash M, \mathcal{P} \in G \backslash \hat{M}).$$

この関係式があるから、以後核関数 Φ を考察の主眼としよう。これと、 $\mathcal{F}, \bar{\mathcal{F}}$ が互いに逆変換なることから、次が成り立つことを注意しておく：

命題 1.1. 〈核関数の直交性〉

$\mathcal{P}, \mathcal{P}' \in G \backslash \hat{M}$ に対し、

$$\sum_{\mathcal{O} \in G \backslash M} \frac{1}{|\mathcal{O}|} \Phi(\mathcal{P}, \mathcal{O}) \overline{\Phi(\mathcal{P}', \mathcal{O})} = \delta_{\mathcal{P}, \mathcal{P}'} \frac{|M|}{|\mathcal{P}|}.$$

ここに δ はクロネッカーのデルタである。

さて具体例としては、主に有限体を成分とする行列の群を扱う。以下、 $\mathbb{F} = \mathbb{F}_q$ を位数 q の有限体とする。また、 $\text{Mat}_n(\mathbb{F})$, $\text{Alt}_n(\mathbb{F})$, $\text{Sym}_n(\mathbb{F})$ と書いて、それぞれ $\mathbb{F}$ 上の n 次行列全体、交代行列全体、対称行列全体のなすアーベル群を表す。 $\mathfrak{S}_n$ は n 次対称群を表す。本講演で扱われるほとんどの場合、係数体である有限体 $\mathbb{F}$ は固定されているので、 $\text{Mat}_n = \text{Mat}_n(\mathbb{F})$ などと略記する。

有限アーベル群 M および作用する群 G の組として、 $(M, G) = (\mathbb{F}^n, (\mathbb{F}^\times)^n \rtimes \mathfrak{S}_n)$, $(\text{Mat}_n, \text{GL}_n \times \text{GL}_n)$, $(\text{Alt}_n, \text{GL}_n)$, $(\text{Sym}_n, \text{GL}_n)$ などを考える。ただし作用 $\rho: G \curvearrowright M$ は次で定める：

$$\begin{aligned}\rho(a, \sigma)x &= (a_1 x_{\sigma^{-1}(1)}, \dots, a_n x_{\sigma^{-1}(n)}) \quad ((a, \sigma) \in (\mathbb{F}^\times)^n \rtimes \mathfrak{S}_n, x \in \mathbb{F}^n), \\ \rho(P, Q)X &= PX {}^tQ \quad ((P, Q) \in \text{GL}_n \times \text{GL}_n, X \in \text{Mat}_n), \\ \rho(P)X &= PX {}^tP \quad (P \in \text{GL}_n, X \in \text{Alt}_n \text{ または } \text{Sym}_n).\end{aligned}$$

この 4 例の群不変フーリエ変換から得られる核関数をそれぞれ、 ϕ^{Diag} , ϕ^{Mat} , ϕ^{Alt} , ϕ^{Sym} と表す。

これらの核関数には、超幾何型の多項式である Krawtchouk 多項式 $K_r(X; p, n)$ や、その q -analogue の一つである Affine q -Krawtchouk 多項式 $K_r^{\text{Aff}}(X; a, n; q)$ が現れる。それらの定義をここで述べておこう。

定義 1.2. 〈 Krawtchouk 多項式 〉

$r, n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $r \leq n$, およびパラメータ p に対し、

$$K_r(X; p, n) = {}_2F_1 \left(\begin{matrix} -r, -X \\ -n \end{matrix} ; \frac{1}{p} \right) = \sum_{i=0}^r \frac{(-r)_i (-X)_i}{(-n)_i i! p^i}$$

を Krawtchouk 多項式と言う (文字 X に関する多項式である)。

定義 1.3. 〈 Affine q -Krawtchouk 多項式 〉

$r, n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $r \leq n$, およびパラメータ a, q , 文字 X に対し、

$$K_r^{\text{Aff}}(X; a, n; q) = {}_3\varphi_2 \left(\begin{matrix} q^{-r}, q^{-X} \\ a, q^{-n} \end{matrix} ; q, q \right) = \sum_{i=0}^r \frac{(q^{-r}; q)_i (q^{-X}; q)_i}{(q^{-n}; q)_i (a; q)_i (q; q)_i} q^i$$

を Affine q -Krawtchouk 多項式と言う。

なお上の定義中の ${}_2F_1$ はガウスの超幾何級数、 ${}_3\varphi_2$ は q -超幾何級数である。記号 $(\cdot)_i$ および $(\cdot; \cdot)_i$ は、

$$(a)_i = \underbrace{a(a+1) \cdots (a+i-1)}_{i \text{ 個}}, \quad (a; q)_i = \underbrace{(1-a)(1-aq)(1-aq^2) \cdots (1-aq^{i-1})}_{i \text{ 個}}$$

で定められる ($i=0$ のときは 1)。

本講演の主結果は以下のものである：

主結果 1.

M とその部分群 N に、 G とその部分群 H がそれぞれ作用するとき、特別な設定のもとで、それぞれの群不変フーリエ変換の核関数のあいだの関係式を見出した (定理 2.3)。

主結果 2.

主結果 1 を用いた統一的方法によって、核関数 ϕ^{Diag} , ϕ^{Mat} , ϕ^{Alt} , ϕ^{Sym} を求めた (命題 3.1, 3.3, 3.6, 3.9)。

上に挙げた核関数のうち、すでに先行研究によって計算されているものがいくつかある。導入の最後に、それについて述べておく。

Dunkl[5] は、対称群の輪状積 (wreath product) $(\mathfrak{S}_{k+1})^n \rtimes \mathfrak{S}_n$ の球関数として、Krawtchouk 多項式の解釈を与えた。Koornwinder[6] はその拡張として、Hamming Scheme, すなわち $(\mathfrak{S}_{k+1})^n \rtimes \mathfrak{S}_n$ の作用する $\{0, 1, \dots, k\}^n$ 上の絡関数 (intertwining functions) として、Krawtchouk 多項式を解釈した。我々は、核関数 Φ^{Diag} に Krawtchouk 多項式が現れることを見るが (命題 3.1), その結果は本質的に [5],[6] と同じである。ただし、我々は $\mathfrak{S}_{k+1}$ ではなく有限体の乗法群 $\mathbb{F}^\times$ の輪状積を用いることで、上とは別種の自然な解釈を与える。さらに計算方法も [5], [6] とは異なる、我々の主定理 2.3 の利用によるものを与える。

また、Delsarte[3] は、 $\mathbb{F}$ 上有限次元ベクトル空間の双線型形式のなす association scheme の固有値 (eigenvalues) として、Affine q -Krawtchouk 多項式を見出した。続いて Delsarte and Goethals[4] では、 $\mathbb{F}$ 上有限次元ベクトル空間の交代双線型形式のなす association scheme の固有値として、やはり Affine q -Krawtchouk 多項式を見出した。これらはそれぞれ、我々の Φ^{Mat} , Φ^{Alt} と同一のものである。しかし我々は、やはり主定理 2.3 の利用で、 Φ^{Diag} と一貫性のある新たな証明を与える。

以上のように、これらの先行研究では、必ずしも‘有限体上の群不変フーリエ変換’という枠組みではないにせよ、それと関連深い、または本質的に同じと思える対象として、Krawtchouk 多項式や Affine q -Krawtchouk 多項式を見出している。我々はこれらを念頭に置きつつ、‘有限体上の群不変フーリエ変換’という枠組みでこれらを捉え直し、主定理の利用によるこれらの統一的な理解を与える。

2 群作用の制限における核関数の関係

前節での設定を引き継ぎ、有限群 G が有限アーベル群 M へ作用しているとする (作用を ρ で表す)。更にここでは、 M の部分アーベル群 N に対して、 G の部分群 H が、作用 ρ の制限で作用しているとする。また、群準同型 $\pi: M \rightarrow N$ で、 N 上では恒等写像なるものが存在し (射影と呼ぶ)、さらに H -作用との可換性 $\pi \circ \rho(h) = \rho(h) \circ \pi$ ($\forall h \in H$) をみたすとする。注意として、この時 H -作用に閉じた直和分解 $M = N \oplus \ker \pi$ が得られる。

以上の時、作用 $G \curvearrowright M$ および $H \curvearrowright N$ に関する群不変フーリエ変換の核関数の間に、どのような関係が見い出せるかを調べる。なお、前者の核関数を Φ^M , 後者のそれを Φ^N のように表して区別する。

これらの関係を記述するために、次の数が用いられる：

定義 2.1. 〈関係数〉

軌道 $\mathcal{O} \in G \backslash M$ と $\mathcal{Q} \in H \backslash N$ に対し、

$$R(\mathcal{Q}, \mathcal{O}) = \frac{|\mathcal{O} \cap \pi^{-1}(\mathcal{Q})|}{|\mathcal{Q}|}$$

と定め、これらの軌道に関する関係数と呼ぶ。

命題 2.2.

$b \in \mathcal{Q}$ を任意に固定して、

$$R(\mathcal{Q}, \mathcal{O}) = \#\{c \in \ker \pi \mid b + c \in \mathcal{O}\}$$

が成り立つ (ここで $\#$ は集合の要素数を表す)。

いくつかの例では、命題 2.2 を利用して、関係数を組み合わせ論的な考察で求めることができる (後の補題 3.4 など)。さて、次が本講演の主定理である。

定理 2.3. 〈核関数のあいだの関係式 (主定理)〉

$\mathcal{R} \in H \backslash \hat{N}$ に対し、 $\chi \circ \pi$ ($\chi \in \mathcal{R}$) を含む軌道を $\mathcal{P} \in G \backslash \hat{M}$ とする。また、 $\mathcal{O} \in G \backslash M$ とする。このとき、

$$\Phi^M(\mathcal{P}, \mathcal{O}) = \sum_{\mathcal{Q} \in H \backslash N} R(\mathcal{Q}, \mathcal{O}) \Phi^N(\mathcal{R}, \mathcal{Q})$$

が成り立つ.

さて便宜上, 次の名前を付けておく:

定義 2.4. 〈網羅型〉

全ての軌道 $\mathcal{P} \in G \backslash \hat{M}$ が $\{\chi \circ \pi \mid \chi \in \hat{N}\} \subset \hat{M}$ と交わる時, N, M の関係が網羅型であるという.

定理 2.3 の条件からわかるように, 網羅型の場合は, 本定理で全ての Φ^M の値が記述できる. そうでない場合の補強として, うまく $L \subset M$ を取って $N \oplus L \subset M$ が網羅型となるようにできれば, Φ^M の全ての値が Φ^N と Φ^L で記述できる. 以下それについて述べよう.

まず, 有限アーベル群の直和の核関数が積で与えられるという次の補題を指摘しておく:

補題 2.5.

N, L を有限アーベル群とし, 有限群 H, K がそれぞれに作用しているとする. このときの群不変フーリエ変換の核関数をそれぞれ Φ^N, Φ^L と表す.

このとき直和 $N \oplus L$ には, 直積群 $H \times K$ の作用が自然に誘導される (各直和因子への作用による). その核関数を $\Phi^{N \oplus L}$ と表す.

また, 軌道 $\mathcal{Q} \in H \backslash N$ と $\mathcal{Q}' \in K \backslash L$ に対して, $\mathcal{Q} \oplus \mathcal{Q}' = \{b + c \in N \oplus L \mid b \in \mathcal{Q}, c \in \mathcal{Q}'\}$ が $N \oplus L$ の $H \times K$ -軌道となる. 同様に, 軌道 $\mathcal{R} \in H \backslash \hat{N}$ と $\mathcal{R}' \in K \backslash \hat{L}$ に対して, $\mathcal{R} \times \mathcal{R}' = \{\chi \cdot \chi' \in (N \oplus L)^\wedge \mid \chi \in \mathcal{R}, \chi' \in \mathcal{R}'\}$ が $(N \oplus L)^\wedge$ の $H \times K$ -軌道となる.

以上の注意のもと,

$$\Phi^{N \oplus L}(\mathcal{R} \times \mathcal{R}', \mathcal{Q} \oplus \mathcal{Q}') = \Phi^N(\mathcal{R}, \mathcal{Q}) \Phi^L(\mathcal{R}', \mathcal{Q}')$$

が成り立つ.

主定理 2.3 と補題 2.5 を併せて用いることで, 次が得られる:

命題 2.6. 〈主定理の補強〉

$N, L \subset M$ を部分アーベル群で, $N \cap L = \{0\}$ をみたすとする. $H, K \subset G$ を部分群とし, それぞれが N, L へ $\rho: G \curvearrowright M$ の制限で作用していると, さらに次を満たすとする:

- (i) $H \cap K = \{1\}$ (1 は G の単位元), $hk = kh$ ($\forall h \in H, k \in K$),
- (ii) $\rho(h)c = c, \rho(k)b = b$ ($h \in H, k \in K, b \in N, c \in L$).

このとき条件 (i) より, 直積群 $H \times K$ が G の部分群として実現され, 条件 (ii) より, それが ρ の制限で $N \oplus L$ へ作用するが, さらに射影 $\pi: M \longrightarrow N \oplus L$ で $H \times K$ -作用と可換なものが存在するとする.

このとき, 各作用の群不変フーリエ変換の核関数 Φ^M, Φ^N, Φ^L の間に, 次の関係式が成り立つ:

$\mathcal{R} \in H \backslash \hat{N}$ と $\mathcal{R}' \in K \backslash \hat{L}$ に対し, $(\chi \cdot \chi') \circ \pi$ ($\chi \in \mathcal{R}, \chi' \in \mathcal{R}'$) を含む軌道を $\mathcal{P} \in G \backslash \hat{M}$ とするとき,

$$\Phi^M(\mathcal{P}, \mathcal{O}) = \sum_{\mathcal{Q} \in H \backslash N, \mathcal{Q}' \in K \backslash L} R(\mathcal{Q} \oplus \mathcal{Q}', \mathcal{O}) \Phi^N(\mathcal{R}, \mathcal{Q}) \Phi^L(\mathcal{R}', \mathcal{Q}').$$

3 有限体上の行列群での例

本節では, $\mathbb{F}$ を位数 q の有限体とする. アーベル群 M として, 全行列群 $\text{Mat}_n = \text{Mat}_n(\mathbb{F})$ の部分群を例にとる. また, M へ作用する有限群 G としては, $\text{GL}_n \times \text{GL}_n$ の部分群として実現できるものを取る. $\text{GL}_n \times \text{GL}_n$ の Mat_n への作用 ρ が,

$$\rho(P, Q)X = PX {}^tQ \quad ((P, Q) \in \text{GL}_n \times \text{GL}_n, X \in \text{Mat}_n) \quad (3)$$

で定まるが, 本節で扱われる例は全て, この作用の制限として実現できるものである.

また, M は $\mathbb{F}$ 上有限次元ベクトル空間である. この場合, 固定した非自明加法指標 $\theta \in \hat{\mathbb{F}} - \{1\}$ と M 上の対称非退化双線型形式 $\langle \cdot | \cdot \rangle : M \times M \rightarrow \mathbb{F}$ を用いて, M と $\hat{M}$ を対応付けることができる. すなわち, $x \in M$ に対して $\chi_x \in \hat{M}$ を,

$$\chi_x(y) = \theta(\langle x|y \rangle) \quad (y \in M). \quad (4)$$

で定めると, $M \rightarrow \hat{M}, x \mapsto \chi_x$ が群同型を与える.

さらに, $\forall g \in G$ について, $\rho(g)$ の $\langle \cdot | \cdot \rangle$ に関する随伴写像が, ある $g' \in G$ に関する $\rho(g')$ で与えられるとき, この対応付け $M \rightarrow \hat{M}$ は G -軌道を保つことがわかる. そこで, 式 (4) を介して対応する軌道に同じパラメータを与えて, 核関数を記述することにする.

3.1 $(\mathbb{F}^\times)^n \rtimes \mathfrak{S}_n \curvearrowright \mathbb{F}^n$ の核関数

有限アーベル群 M として $\mathbb{F}$ 上 n 次元空間 $\mathbb{F}^n$ を考える. 群 G として, 輪状積 (wreath product) $G_n = (\mathbb{F}^\times)^n \rtimes \mathfrak{S}_n$ を考える. G_n の $\mathbb{F}^n$ への作用 ρ を次式で定める:

$$\rho(a, \sigma)x = (a_1 x_{\sigma^{-1}(1)}, \dots, a_n x_{\sigma^{-1}(n)}) \quad ((a, \sigma) \in G_n, x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{F}^n).$$

注意として, $\mathbb{F}^n$ を対角行列のなすアーベル群 Diag_n と同一視し, G_n を $\text{GL}_n \times \text{GL}_n$ の部分群として埋め込んで, この作用を (4) の制限として実現することもできる. そうすれば他の例との関連も考察できるが, ここではせずにおく.

この例の核関数を, $\Phi_n^{\text{Diag}} : (G_n \setminus \hat{\mathbb{F}}^n) \times (G_n \setminus \mathbb{F}^n) \rightarrow \mathbb{C}$ と表す. ただし本小節では簡単に Φ_n と表す.

さて明らかなように, この作用の軌道は, 元 $x \in \mathbb{F}^n$ のウェイト $\text{wt } x = \#\{i \mid x_i \neq 0\}$ で特徴付けられる. すなわち, $G_n \setminus \mathbb{F}^n = \{\mathcal{O}_r \mid 0 \leq r \leq n\}$, ここに $\mathcal{O}_r = \{x \in \mathbb{F}^n \mid \text{wt } x = r\}$ となる.

一方, $\theta \in \hat{\mathbb{F}} - \{1\}$ (固定) と, $\mathbb{F}^n$ 上の標準的な対称非退化双線型形式 $\langle x|y \rangle = \sum_{j=1}^n x_j y_j$, $x, y \in \mathbb{F}^n$ を用いて, 式 (4) に述べた方法で, 指標群 $\hat{\mathbb{F}}^n$ と $\mathbb{F}^n$ を対応付ける. すなわち, $x \in \mathbb{F}^n$ に対して $\chi_x \in \hat{\mathbb{F}}^n$ を次式で定める:

$$\chi_x(y) = \theta(\langle x|y \rangle) = \prod_{j=1}^n \theta(x_j y_j) \quad (y \in \mathbb{F}^n).$$

$\langle \cdot | \cdot \rangle$ に関する $\rho(a, \sigma)$ の随伴写像は $\rho(\sigma^{-1}(a), \sigma^{-1})$ で与えられるから, 上の対応により $\mathbb{F}^n$ と $\hat{\mathbb{F}}^n$ の軌道も対応する. すなわち, $G_n \setminus \hat{\mathbb{F}}^n = \{\mathcal{P}_s \mid 0 \leq s \leq n\}$, $\mathcal{P}_s = \{\chi_x \mid x \in \mathcal{O}_s\}$ となる.

核関数 Φ_n の $(\mathcal{P}_s, \mathcal{O}_r) \in (G_n \setminus \hat{\mathbb{F}}^n) \times (G_n \setminus \mathbb{F}^n)$ での値を, 簡単に $\Phi_n(s, r)$ と書く.

例えば $n = 1$ のときの核関数の値 $\Phi_1(s, r)$ は, 定義式 (1) よりすぐ求められ, 次表を得る:

$s \quad r$	0	1
0	1	$q - 1$
1	1	-1

表 1: 核関数 $\Phi_1(s, r)$

一般の n の場合, 結論は次である.

命題 3.1. $\langle \Phi^{\text{Diag}}$ の一般項

$$\Phi_n^{\text{Diag}}(s, r) = (q - 1)^r \binom{n}{r} K_r(s; \frac{q-1}{q}, n).$$

以下, 我々の主定理 2.3 を用いた方法でこれを導こう.

群 G_n の部分群として,

$$G_{n-1} = \{(a, \sigma) \in G_n \mid a_n = 1, \sigma(n) = n\}, \quad G_1 = \{(a, 1) \in G_n \mid a_i = 1 (1 \leq i \leq n-1)\}$$

を考える. また, $\mathbb{F}^n = \mathbb{F}^{n-1} \oplus \mathbb{F}$ という直和分解を考える (ここでは, 射影 π は恒等写像 $\text{id}: \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^{n-1} \oplus \mathbb{F}$ である). $\rho: G_n \curvearrowright \mathbb{F}^n$ の制限で, G_{n-1}, G_1 が各直和因子へ作用していることに注意する. 直積群 $G_{n-1} \times G_1 \subset G_n$ による $\mathbb{F}^{n-1} \oplus \mathbb{F}$ の軌道は, $(i, j), 0 \leq i \leq n-1, j = 0, 1$ でパラメトライズされ,

$$\mathcal{Q}_{(i,j)} = \{(y, z) \in \mathbb{F}^{n-1} \oplus \mathbb{F} \mid \text{wt } y = i, \text{wt } z = j\}$$

と表される.

$1 \leq s \leq n$ とする. $\mathcal{Q}_{(s-1,1)} \subset \mathcal{O}_s$ であることから, 命題 2.6(主定理の補強) により,

$$\Phi_n(s, r) = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0,1} R((i, j), r) \Phi_{n-1}(s-1, i) \Phi_1(1, j)$$

が成り立つ. ここで $R((i, j), r)$ は, 軌道 $\mathcal{Q}_{(i,j)}$ と $\mathcal{O}_r$ に関する関係数であり, 次式で与えられる.

$$R((i, j), r) = \frac{|\mathcal{O}_r \cap \mathcal{Q}_{(i,j)}|}{|\mathcal{Q}_{(i,j)}|} = \begin{cases} 1 & (\text{if } i+j = r) \\ 0 & (\text{otherwise}). \end{cases}$$

よって,

$$\Phi_n(s, r) = \Phi_{n-1}(s-1, r) - \Phi_{n-1}(s-1, r-1) \quad (1 \leq s \leq n, 0 \leq r \leq n) \quad (5)$$

を得る. これを Φ^{Diag} の ‘後退パスカル型漸化式’ とよぶ.

この漸化式を用いれば, もう一つの漸化式である次が帰納的に確認できる. こちらは Φ^{Diag} の ‘前進パスカル型漸化式’ と呼ぶ.

$$\Phi_n(s, r) - \Phi_n(s-1, r) = -q\Phi_{n-1}(s-1, r-1) \quad (1 \leq s, r \leq n). \quad (6)$$

この型の漸化式は一般に解くことができる. 以降の 3 例においても通用するように, 一般解を補題として述べておくと,

補題 3.2. 〈前進パスカル型漸化式の解〉

各 Φ_n が $\{0, 1, \dots, n\} \times \{0, 1, \dots, n\}$ で定義された核関数の族 $\{\Phi_n\}_{n \geq 1}$ があって, 次の漸化式をみたすとする:

$$\Phi_n(s, r) - a\Phi_n(s-1, r) = bq^{d(n,s)}\Phi_{n-1}(s-1, r-1).$$

ここで a, b は定数, $d(n, s)$ は n, s による非負整数値である.

このとき $\Phi_n(s, r)$ の一般項は, $|\mathcal{O}_r^n| = \Phi_n(0, r)$ を用いて, 次式で与えられる.

$$\Phi_n(s, r) = \sum_{i=0}^s a^{s-i} b^i |\mathcal{O}_{r-i}^{n-i}| \sum_{1 \leq k_1 < \dots < k_i \leq s} q^{D(k_1, \dots, k_i)},$$

ここで $D(k_1, \dots, k_i) = \sum_{j=1}^i d(n-i+j, k_j)$.

(6) を補題 3.2 にしたがって解くと, 命題 3.1 の式が得られる.

以下, この結果の解釈をいくつか述べよう. まず, Krawtchouk 多項式の次なる性質が知られているが [7], これを核関数の直交性 (命題 1.1) から得ることができる.

系 1. 〈Krawtchouk 多項式の直交性〉

$s, r, n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $s, r \leq n$ および $p \in \mathbb{C} - \{0, 1\}$ に対し,

$$\sum_{j=0}^n p^j (1-p)^{n-j} \binom{n}{j} K_s(j; p, n) K_r(j; p, n) = \delta_{s,r} \frac{(1-p)^r}{\binom{n}{r} p^r}.$$

次に, 考察の中で得られた ‘後退パスカル型漸化式’(5), ‘前進パスカル型漸化式’(6) について述べる. これらの式における Φ_n , Φ_{n-1} を, Krawtchouk 多項式で書き直す. なお, 上式は $\forall q \in \mathbb{C} - \{0, 1\}$ で成り立つことに注意し, パラメータを $p \in \mathbb{C} - \{0, 1\}$ に置き換えて整理することで,

$$K_r(s; p, n) = \frac{n-r}{n} K_r(s-1; p, n-1) - \frac{(1-p)r}{pn} K_{r-1}(s-1; p, n-1),$$

および

$$K_r(s; p, n) - K_r(s-1; p, n) = -\frac{r}{pn} K_{r-1}(s-1; p, n-1)$$

を得る. これらはそれぞれ Krawtchouk 多項式の ‘backward shift operator’, ‘forward shift operator’ として知られている式である [7].

3.2 $\mathrm{GL}_n \times \mathrm{GL}_n \curvearrowright \mathrm{Mat}_n$ の核関数

次に, Mat_n への $G_n = \mathrm{GL}_n \times \mathrm{GL}_n$ の (3) で与えられる作用 ρ に関する核関数 Φ_n^{Mat} を求める. ここでは Φ_n と略記する.

なお第 1 節で述べたように, この値そのものは, すでに Delsarte[3] によって求められている. [3] ではこれを求めるため, まず後出の (9)(前進パスカル型漸化式) がやや困難な数え上げによって示されるが, 我々は我々の主定理 2.3 を用いた, 前小節とも一貫性のある方法によって, これを簡単な数え上げに帰着させ, より見通しのよい証明を与えることを目標とする.

Mat_n の G_n -軌道は, $\mathcal{O}_r = \{X \in \mathrm{Mat}_n \mid \mathrm{rank} X = r\}$, $0 \leq r \leq n$ である. また, Mat_n における標準的な対称非退化双線型形式は, $\langle A|B \rangle = \mathrm{tr} {}^tAB$, $A, B \in \mathrm{Mat}_n$ で与えられる. ここで tr は行列のトレースを表し, tA は行列 A の転置行列である. $\theta \in \hat{\mathbb{F}} - \{1\}$ を固定し, 式 (4) による対応付け $\mathrm{Mat}_n \rightarrow (\mathrm{Mat}_n)^\wedge$, $A \mapsto \theta(\mathrm{tr} {}^tA \cdot)$ を行う. いま $(P, Q) \in G_n$ に対して, $\rho(P, Q)$ の随伴写像は $\rho({}^tP, {}^tQ)$ で与えられるので, この対応は G_n -軌道を保つ. $\mathcal{O}_s \in G_n \setminus \mathrm{Mat}_n$ に対応する軌道を $\mathcal{P}_s \in G_n \setminus (\mathrm{Mat}_n)^\wedge$ とおく. 核関数の値 $\Phi_n(\mathcal{P}_s, \mathcal{O}_r)$ を $\Phi_n(s, r)$ と書く. 定義 (1) どおり表せば,

$$\Phi_n(s, r) = \sum_{X \in \mathcal{O}_r} \theta(\mathrm{tr} {}^tAX) \quad (A \in \mathcal{O}_s)$$

である. ここでの結論として, これが次のように表される:

命題 3.3. 〈 Φ^{Mat} の一般項〉

$$\Phi_n^{\mathrm{Mat}}(s, r) = (-1)^r q^{\binom{r}{2}} (q^n; q^{-1})_r \begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix}_q K_r^{\mathrm{Aff}}(s, q^{-n}, n; q).$$

ここで $\begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix}_q$ はガウス多項式と呼ばれ, $\begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix}_q = \frac{(q^n; q^{-1})_r}{(q; q)_r}$ で定められている.

これを主定理 2.3 の利用で求めたい．ここでは，

$$\text{Mat}_{n-1} \oplus \text{Mat}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} Y & 0 \\ 0 & z \end{pmatrix} \middle| Y \in \text{Mat}_{n-1}, z \in \text{Mat}_1 \right\} \subset \text{Mat}_n$$

という埋め込みを考える．また， Mat_{n-1} ， Mat_1 それぞれへ作用する G_{n-1} ， G_1 を，上と同様に G_n に‘対角に’埋め込む形で取る．

$\text{Mat}_{n-1} \oplus \text{Mat}_1$ の $G_{n-1} \times G_1$ -軌道は， (i, j) ， $0 \leq i \leq n-1$ ， $j = 0, 1$ でパラメトライズされ，

$$\mathcal{Q}_{(i,j)} = \left\{ \begin{pmatrix} Y \\ z \end{pmatrix} \middle| \text{rank } Y = i, \text{wt } z = j \right\}$$

である． $1 \leq s \leq n$ に対し，軌道 $\mathcal{O}_s$ は軌道 $\mathcal{Q}_{(s-1,1)}$ を含むことから，命題 2.6(主定理の補強) より，

$$\begin{aligned} \Phi_n(s, r) &= \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0,1} R((i, j), r) \Phi_{n-1}(s-1, i) \Phi_1(1, j) \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \left(R((i, 0), r) - R((i, 1), r) \right) \Phi_{n-1}(s-1, i) \end{aligned} \quad (7)$$

が成り立つ．

次に関係数 $R((i, j), r)$ を求めるが，上式より，我々が必要とするのは次のような差の値のみである．

補題 3.4.

軌道 $\mathcal{Q}_{(i,j)}$ ， $\mathcal{O}_r$ に関する関係数 $R((i, j), r)$ は，次式をみたす．

$$R((i, 0), r) - R((i, 1), r) = \begin{cases} -q^r & (\text{if } i = r-1) \\ q^r & (\text{if } i = r) \\ 0 & (\text{otherwise}). \end{cases}$$

証明. 命題 2.2 より，

$$R((i, j), r) = \# \left\{ x, y \in \mathbb{F}^{n-1} \middle| \text{rank} \begin{pmatrix} \overbrace{1 \cdots 1}^{i \text{ 個}} & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 0 & \ddots & x \\ & & & & 0 & \\ & y & & & & j \end{pmatrix} = r \right\}$$

である．右辺の数え上げを，適当な場合分けをして行う（初等的に数えられる）．

□

補題 3.4 の結果を (7) へ代入することで，次が得られる（ Φ^{Mat} の‘後退パスカル型漸化式’）：

$$\Phi_n(s, r) = q^r \Phi_{n-1}(s-1, r) - q^{r-1} \Phi_{n-1}(s-1, r-1) \quad (1 \leq s \leq n, 0 \leq r \leq n). \quad (8)$$

これより，次が確かめられる（ Φ^{Mat} の‘前進パスカル型漸化式’）：

$$\Phi_n(s, r) - \Phi_n(s-1, r) = -q^{2n-s} \Phi_{n-1}(s-1, r-1) \quad (1 \leq s, r \leq n). \quad (9)$$

補題 3.2 を用いてこれを解き，命題 3.3 を得る（その際，比較的知られている事実であるランク r の行列の個数

$$|\mathcal{O}_r| = (-1)^r q^{\binom{r}{2}} (q^n; q^{-1})_r \begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix}_q \text{ を用いる}.$$

3.3 $\mathrm{GL}_n \curvearrowright \mathrm{Alt}_n$ の核関数

ここでは、係数体 $\mathbb{F}$ の標数は奇数とする． $\mathbb{F}$ 上 n 次交代行列全体 Alt_n への GL_n の作用 ρ を次で定める：

$$\rho(P)X = PX^tP \quad (P \in \mathrm{GL}_n, X \in \mathrm{Alt}_n).$$

これについての核関数を Φ_n^{Alt} とおく．ただし Φ_n と略記する．

まず、 $\mathbb{F}$ 上交代行列に関して知られている次の事実を述べておく (例えば [8]).

事実 3.5. $\langle \mathrm{Alt}_n \text{ の } \mathrm{GL}_n \text{ 軌道分解} \rangle$

(1) 交代行列のランクは偶数に限る．また、同じランクを持つ交代行列は GL_n 作用 ρ で移り合う．

(2) Alt_n におけるランク $2v$ の行列の個数は、 $n = 2m$ のとき、 $(-1)^v q^{v(v-1)} (q^{2m-1}; q^{-2})_v \begin{bmatrix} m \\ v \end{bmatrix}_{q^2}$ 、 $n = 2m+1$

のとき、 $(-1)^v q^{v(v-1)} (q^{2m+1}; q^{-2})_v \begin{bmatrix} m \\ v \end{bmatrix}_{q^2}$ で与えられる．

以下、 $m = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ とおく (ここで $\lfloor \cdot \rfloor$ はガウス記号)．事実 3.5 より、 $\mathcal{O}_v = \{X \in \mathrm{Alt}_n \mid \mathrm{rank} X = 2v\}$ ($0 \leq v \leq m$) が Alt_n の GL_n -軌道となる．やはり $\theta \in \hat{\mathbb{F}} - \{1\}$ と Alt_n 上の非退化対称双線型形式 (Mat_n 上のその制限) を用いて、 Alt_n と $(\mathrm{Alt}_n)^\wedge$ の軌道が対応するので、 $\mathcal{O}_u$ ($0 \leq u \leq m$) に対応するものを $\mathcal{P}_u$ とおく．

以下、 $\Phi_n(u, v) = \Phi_n(\mathcal{P}_u, \mathcal{O}_v)$ の求め方は、先の 2 例と一貫した方法で行われる．すなわち、ここでは $\mathrm{Alt}_{n-2} \oplus \mathrm{Alt}_2 \subset \mathrm{Alt}_n$ という埋め込みを考えると、軌道の関係数 R が補題 3.4 と同様の数え上げにより求まり、主定理 2.3 の利用で、 Φ^{Alt} の‘後退パスカル型漸化式’として次が導かれる：

$$\Phi_n(u, v) = q^{2v} \Phi_{n-2}(u-1, v) - q^{2v-2} \Phi_{n-2}(u-1, v-1) \quad (1 \leq u \leq m, 0 \leq v \leq m). \quad (10)$$

これより、‘前進パスカル型漸化式’として次が確かめられる：

$$\Phi_n(u, v) - \Phi_n(u-1, v) = -q^{2n-2u-1} \Phi_{n-2}(u-1, v-1) \quad (1 \leq u, v \leq m). \quad (11)$$

これを用いて核関数 Φ_n の一般項を求める際、 n の偶奇によって 2 つの族にわけて考える．すなわち、

$$\Phi_m^{\mathrm{Alt}(\mathrm{even})} = \Phi_{2m}, \quad \Phi_m^{\mathrm{Alt}(\mathrm{odd})} = \Phi_{2m+1} \quad (m = 1, 2, \dots)$$

と定めれば、各々の族 $\{\Phi_m^{\mathrm{Alt}(\mathrm{even})}\}_{m \geq 1}$ 、 $\{\Phi_m^{\mathrm{Alt}(\mathrm{odd})}\}_{m \geq 1}$ が、補題 3.2 に当てはまる前進パスカル型漸化式を持つこととなる．したがって、事実 3.5 による $|\mathcal{O}_v|$ の値も用いれば漸化式が解け、単純な計算により次の一般項を得る．

命題 3.6. $\langle \Phi^{\mathrm{Alt}}$ の一般項 $\rangle$

$$\begin{aligned} \Phi_{2m}^{\mathrm{Alt}}(u, v) &= \Phi_m^{\mathrm{Alt}(\mathrm{even})}(u, v) = (-1)^v q^{v(v-1)} (q^{2m-1}; q^{-2})_v \begin{bmatrix} m \\ v \end{bmatrix}_{q^2} K_v^{\mathrm{Aff}}(u, q^{-2m+1}, m; q^2), \\ \Phi_{2m+1}^{\mathrm{Alt}}(u, v) &= \Phi_m^{\mathrm{Alt}(\mathrm{odd})}(u, v) = (-1)^v q^{v(v-1)} (q^{2m+1}; q^{-2})_v \begin{bmatrix} m \\ v \end{bmatrix}_{q^2} K_v^{\mathrm{Aff}}(u, q^{-2m-1}, m; q^2). \end{aligned}$$

3.4 $\mathrm{GL}_n \curvearrowright \mathrm{Sym}_n$ の核関数

ここでは、係数体 $\mathbb{F}$ の標数は奇数とする．最後の例として¹、 $\mathbb{F}$ 上 n 次対称行列全体 Sym_n への GL_n の作用に関する核関数 $\phi_n^{\mathrm{Sym}} = \phi_n$ を求める．その作用 ρ は次で定める：

$$\rho(P)X = PX {}^tP \quad (P \in \mathrm{GL}_n, X \in \mathrm{Sym}_n).$$

まず、ここで用いる記号をまとめておく． $\mathbb{F}$ の平方元全体を S 、非平方元全体を S^c と表す (0 はいずれでもないとする)． $\mathbb{F}$ の非自明加法指標 $\theta \in \hat{\mathbb{F}}, \theta \neq 1$ を取り、これに依る数として、 $\alpha = \sum_{x \in S} \theta(x)$ 、 $\beta = \sum_{x \in S^c} \theta(x)$ とおく．さらに、 $\gamma = \alpha - \beta$ とし、(θ に関する) ガウス和と呼ぶ．また、 $x \in S$ のとき $\tau_x = 1$ 、 $x \in S^c$ のとき $\tau_x = -1$ とする ($\mathbb{F}$ の乗法指標である平方剰余のルジャンドル記号である)．また、 $\mathbb{F}$ の位数 q によって定まる符号 $\epsilon = (-1)^{\frac{q-1}{2}}$ を用いる．

本節を通して、 $\mathbb{F}$ の非平方元 $\delta \in S^c$ をひとつ固定しておく．

作用 ρ の軌道分解に関して次が知られている [8]．

事実 3.7. $\langle \mathrm{Sym}_n$ の GL_n 軌道分解 $\rangle$

任意の対称行列は、 GL_n 作用によって、 $\mathrm{diag}(1, \dots, 1, 0, \dots, 0)$ または $\mathrm{diag}(1, \dots, 1, \delta, 0, \dots, 0)$ のいずれか一方とのみ移り合う (ここで $\mathrm{diag}(a_1, \dots, a_n)$ は、 $a_1, \dots, a_n$ を対角成分に持つ対角行列を表す)．

これにより、 Sym_n の GL_n 軌道への分解は次のようになる．ランク 0 の対称行列 (ゼロ行列のみ) は 1 つの軌道 $\mathcal{O}_0$ を成すが、 $r \geq 1$ について、ランク r の対称行列はちょうど 2 つの軌道に分かれる．そのうち $\mathrm{diag}(\underbrace{1, \dots, 1}_{r \text{ 個}}, 0, \dots, 0)$ を代表元とする軌道を、文字 r_1 でパラメトライズして $\mathcal{O}_{r_1}$ と表す．一方 $\mathrm{diag}(\underbrace{1, \dots, 1}_{r \text{ 個}}, \delta, 0, \dots, 0)$ を代表元とする軌道を、文字 r_δ でパラメトライズして $\mathcal{O}_{r_\delta}$ と表す．すなわち、軌道をパラメトライズする集合は

$$\Lambda = \{0\} \sqcup \{r_y \mid 1 \leq r \leq n, y = 1, \delta\}$$

となる．前例までと全く同様に、 $(\mathrm{Sym}_n)^\wedge$ の軌道は Sym_n のそれと対応し、同じパラメータで $\mathcal{P}_\lambda$ 、 $\lambda \in \Lambda$ と表される． $\Phi_n(\mathcal{P}_\lambda, \mathcal{O}_\mu)$ ($\lambda, \mu \in \Lambda$) を $\Phi_n(\lambda, \mu)$ と書く．

例えば $n = 1$ のとき、軌道は $\mathcal{O}_0 = \{0\}$ 、 $\mathcal{O}_{1_1} = S$ 、 $\mathcal{O}_{1_\delta} = S^c$ の 3 つである．また参考までに、 $n = 1, 2$ のときの核関数の値を表にしておく (行列のランクによる区切りを、太線で入れてある)：

$\lambda \quad \mu$	0	1_1	1_δ
0	1	$\frac{q-1}{2}$	$\frac{q-1}{2}$
1_1	1	α	β
1_δ	1	β	α

表 2: 核関数 $\Phi_1(\lambda, \mu)$

さて、一般の n の場合を考える方針は、基本的には先の 3 例と同様である．すなわち、 $\mathrm{Sym}_{n-1} \oplus \mathrm{Sym}_1 \subset \mathrm{Sym}_n$ という埋め込みを考え、これに主定理 2.3 を適用して Φ_{n-1} と Φ_n の関係式を導く．ただし一つ目の注意として、関係数 R の数え上げは、 Mat_n の場合 (補題 3.4) などよりは困難である．二つ目の注意として、得られる関係式は

¹ Sym_n へ作用させる群としては GL_n 以外に、 $\mathbb{F}^\times \times \mathrm{GL}_n$ を考えることもできるが、ここでは取り上げない．

$\lambda \quad \mu$	0	1_1	1_δ	2_1	2_δ
0	1	$\frac{1}{2}(q^2 - 1)$	$\frac{1}{2}(q^2 - 1)$	$\frac{1}{2}q(q-1)(q+\epsilon)$	$\frac{1}{2}q(q-1)(q-\epsilon)$
1_1	1	$\frac{1}{2}(q-1) + q\alpha$	$\frac{1}{2}(q-1) + q\beta$	$\frac{1}{2}\epsilon q(q-1)$	$-\frac{1}{2}\epsilon q(q-1)$
1_δ	1	$\frac{1}{2}(q-1) + q\beta$	$\frac{1}{2}(q-1) + q\alpha$	$\frac{1}{2}\epsilon q(q-1)$	$-\frac{1}{2}\epsilon q(q-1)$
2_1	1	$\frac{1}{2}(\epsilon q - 1)$	$\frac{1}{2}(\epsilon q - 1)$	$-\epsilon q$	0
2_δ	1	$\frac{1}{2}(-\epsilon q - 1)$	$\frac{1}{2}(-\epsilon q - 1)$	0	ϵq

表 3: 核関数 $\Phi_2(\lambda, \mu)$

以下のようなものであるが、複雑であり、直接漸化式として用いて一般解を求めることができない：

$$\Phi_n(s_x, r_y) = \tau_y \gamma^{r-1} \left(\frac{\gamma-1}{2} \Phi_{n-1}(s-1_x, r-1_y) + \frac{\gamma+1}{2} \Phi_{n-1}(s-1_x, r-1_{\bar{y}}) + \gamma \Phi_{n-1}(s-1_x, r_y) \right) \quad (12)$$

(ここで、 $2 \leq s, r \leq n$, x, y は 1 または δ , $\bar{y}$ はそのうち y と異なる方)。

そこでもう一工夫として、軌道 $\mathcal{O}_{r_1}$ と $\mathcal{O}_{r_\delta}$ での核関数の値を‘結合’させるという手段を取る。すなわち、次のように定義する： $\lambda \in \Lambda$ と $1 \leq r \leq n$ に対し、

$$\Phi_n(\lambda, r) = \Phi_n(\lambda, r_1) + \Phi_n(\lambda, r_\delta), \quad \Psi_n(\lambda, r) = \Phi_n(\lambda, r_1) - \Phi_n(\lambda, r_\delta).$$

すると、これらのパスカル型漸化式が、(12) から導かれる。それを補題 3.2 で解き、次を得る：

命題 3.8. 〈結合型 Ψ の一般解〉

本命題では $0_x = 0$ と解釈する。 $0 \leq u, v \leq m$, $x = 1, \delta$ に対し、

(1)

$$\begin{aligned} \Psi_{2m}(2u_x, 2v) &= (-\epsilon)^v q^{v^2} (q^{2m-1}; q^{-2})_v \begin{bmatrix} m \\ v \end{bmatrix}_{q^2} K_v^{\text{Aff}}(u; q^{-2m+1}, m; q^2), \\ \Psi_{2m}(2u_x, 2v+1) &= 0, \\ \Psi_{2m}(2u+1_x, 2v) &= (-\epsilon)^v q^{v^2} (q^{2m-1}; q^{-2})_v \begin{bmatrix} m \\ v \end{bmatrix}_{q^2} K_v^{\text{Aff}}(u; q^{-2m+1}, m; q^2), \\ \Psi_{2m}(2u+1_x, 2v+1) &= (-1)^v \epsilon^{u+v} \tau_x \gamma q^{2m+v^2-u-1} (q^{2m-1}; q^{-2})_v \begin{bmatrix} m-1 \\ v \end{bmatrix}_{q^2} K_v^{\text{Aff}}(u; q^{-2m+1}, m-1; q^2). \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned} \Psi_{2m+1}(2u_x, 2v) &= (-\epsilon)^v q^{v^2} (q^{2m+1}; q^{-2})_v \begin{bmatrix} m \\ v \end{bmatrix}_{q^2} K_v^{\text{Aff}}(u; q^{-2m-1}, m; q^2), \\ \Psi_{2m+1}(2u_x, 2v+1) &= 0, \\ \Psi_{2m+1}(2u+1_x, 2v) &= (-\epsilon)^v q^{v^2} (q^{2m+1}; q^{-2})_v \begin{bmatrix} m \\ v \end{bmatrix}_{q^2} K_v^{\text{Aff}}(u; q^{-2m-1}, m; q^2), \\ \Psi_{2m+1}(2u+1_x, 2v+1) &= (-1)^v \epsilon^{u+v} \tau_x \gamma q^{2m+v^2-u} (q^{2m-1}; q^{-2})_v \begin{bmatrix} m \\ v \end{bmatrix}_{q^2} K_v^{\text{Aff}}(u; q^{-2m+1}, m; q^2). \end{aligned}$$

これを用いて、本来の核関数 Φ_n も復元され、次を得る：

命題 3.9. 〈 核関数 ϕ^{Sym} の一般解 〉

$1 \leq s, r \leq n$, $x, y = 1, \delta$ に対し, 命題 3.8 での Ψ の値を用いて,

$$\phi_n^{\text{Sym}}(s_x, r_y) = \frac{1}{2} \left(\gamma^r \Psi_{n-1}(s - 1_x, r) - \gamma^{r-1} \Psi_{n-1}(s - 1_x, r - 1) + \tau_y \Psi_n(s_x, r) \right).$$

4 今後の課題

最後に, 残された課題を挙げる. 我々は作用 $\text{GL}_n \curvearrowright \text{Sym}_n$ の核関数の一般項を得たが, その意味付けは十分にできていない. 考察の中で見られたように, これはガウス和などの数論的な概念と深く関連している. その点から見ても, この意味付けは興味深い.

また, 触れられなかった例として, $\rho: \text{GL}_n \curvearrowright \text{Mat}_n$, $\rho(P)X = PXP^{-1}$ という作用がある. これは行列を共役類に分け, そのため GL_n の表現論の中心的内容に結びつくと思われる. また, 他の典型群 O_n , Sp_{2n} に関わる例も, 今後の課題である.

最後に, 有限アーベル群への有限群の作用という設定自体の一般化がある. 例えば, 局所コンパクトなアーベル群へのコンパクト群の作用に関して, 数え上げの代わりに Haar 測度を用いて, 同様の考察が行えるであろう.

引用・参考文献

- [1] 梅田亨, 森毅の主題による変奏曲 集合篇 (3), 数学セミナー 2013 年 10 月号, 73-79.
- [2] 川村晃英, 有限体上の群不変フーリエ変換と q -超幾何多項式, 修士論文.
- [3] Ph. Delsarte, *Bilinear Forms over a Finite Field, with Applications to Coding Theory*, J. Comb. Theory, Series A **25** (1978), 226-241.
- [4] P. Delsarte and J.M. Goethals, *Alternating Bilinear Forms over $GF(q)$* , J. of Comb. Theory, Series A **19** (1975), 26-50.
- [5] C.F. Dunkle, *A Krawtchouk Polynomial Addition Theorem and Wreath Product of Symmetric Groups*, Indiana Univ. Math. J., **25** (1976), 335-358.
- [6] T.H. Koornwinder, *Krawtchouk Polynomials, a Unification of Two Different Group Theoretic Interpretations*, S.I.A.M. J. Math. Anal., **13** (1982), 1011-1023.
- [7] R. Koekoek, P.A. Lesky and R.F. Awarttouw, *Hypergeometric Orthogonal Polynomials and Their q -Analogues*, Springer Monographs in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2010.
- [8] J. MacWilliams, *Othogonal Matrices Over Finite Fields*, Amer. Math. Monthly, **76**, no.2 (1969), 152-164.
- [9] D. Stanton, *A Partially Ordered Set and q -Krawtchouk Polynomials*, J. Comb. Theory, Series A **30** (1981), 276-284.
- [10] A. Terras, *Fourier Analysis on Finite Groups and Applications*, London Mathematical Society Student Text **43**, University of California, San Diego, 1999.