

Zeta function of the braid of a special case, and its properties

岡本 健太郎 (九州大学・数理学府)

Okamoto Kentaro

Graduate School of Mathematics, Kyushu University

1 序文

対称群 S_n が有限集合 $\{1, 2, \dots, n\}$ に作用しているとき、 $\sigma \in S_n$ の置換表現を使って、よく知られているゼータ関数が定義される ([6])。本稿では、対称群の (ある意味で) 一般化である、組み紐群 B_n の元からゼータ関数を新しく定義し、その性質を紹介する。特に、トーラス型と呼ばれるタイプの組み紐に対して、代数体上のゼータ関数に関して知られている Dedekind 予想や、Riemann 予想などの類似を考察する。

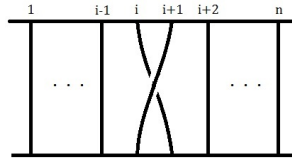
2 組み紐群とその表現

まずは、組み紐群の代数的な定義を行う。

定義 2.1(組み紐群) n 次組み紐群とは、次のような関係式を満たす $n-1$ 個の生成元 $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{n-1}$ により生成される群のことをいい、 B_n と書く。

$$\begin{aligned}\sigma_i \sigma_j &= \sigma_j \sigma_i & (|i - j| \geq 2) \\ \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i &= \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1} & (i = 1, 2, \dots, n-2)\end{aligned}$$

幾何学的には、 σ_i を



と定め、下に紐をつなげることを演算とし、ホモトピー同値を入れることで群になる。以後、組み紐群といえばこのような幾何学的な対象を考えることにする。

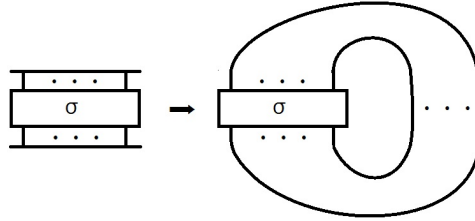
まず、定義から、次のような全射準同型が存在する。

$$\pi_n : B_n \rightarrow S_n \quad \pi_n(\sigma_i) := (i, i+1)$$

これにより、 B_n は S_n の一般化であると思える。

次に、組み紐群から絡み目の集合への写像を与える。任意の組み紐 $\sigma \in B_n$ に対し、図のように上と下の紐をつなげることで絡み目にする事ができる。これを $\hat{\sigma}$ と書くことにする。

$$B_n \rightarrow \{ \text{絡み目} \}$$



Alexander の定理により、この写像は全射であることが知られている ([2])。また、組み紐群に Markov 同値という同値関係を入れるかどで組み紐群と絡み目との間に 1:1 の写像を作ることができる。

次に、組み紐群の表現である Burau 表現を定義する。([1], [3] を参照)

定義 2.2 (Burau 表現) 表現 $\rho_n : B_n \rightarrow GL_n(\mathbb{Z}[q^{\pm 1}])$ を次で定める。

$$\rho_n(\sigma_i) := \begin{pmatrix} I_{i-1} & & & \\ & 1-q & q & \\ & 1 & 0 & \\ & & & I_{n-i-1} \end{pmatrix} \quad (i = 1, 2, \dots, n-1)$$

但し、 $\mathbb{Z}[q^{\pm 1}]$ は q を不定元とする $\mathbb{Z}$ 係数の 1 変数 Laurent 多項式環であり、この ρ_n を **Buaru** 表現という。

実際に ρ_n は準同型となっており、組み紐の関係式

$$\rho_n(\sigma_i)\rho_n(\sigma_j) = \rho_n(\sigma_j)\rho_n(\sigma_i) \quad (|i-j| \geq 2)$$

$$\rho_n(\sigma_i)\rho_n(\sigma_{i+1})\rho_n(\sigma_i) = \rho_n(\sigma_{i+1})\rho_n(\sigma_i)\rho_n(\sigma_{i+1}) \quad (i = 1, 2, \dots, n-2)$$

を満たすことが簡単な計算によって示される。そのため、定義は生成元のみで十分となる。

3 組み紐のゼータ関数

まず、表現のゼータ関数といわれるクラスのゼータ関数を定義する。

定義 3.1(表現のゼータ関数) $\rho : G \rightarrow GL(V)$ を群 G の表現とする。
 $g \in G$ に対して

$$\zeta_g(s) := \det(I - \rho(g)s)^{-1}$$

を、 $g \in G$ に関する表現のゼータ関数と呼ぶ。

次に、組み紐のゼータ関数を Burau 表現を用いて定義する。

定義 3.2(Burau ゼータ関数) $\rho_n : B_n \rightarrow GL_n(\mathbb{Z}[q^{\pm 1}])$ を Burau 表現として、

$$\zeta_\sigma^{\text{Burau}}(s) := \det(I_n - \rho_n(\sigma)s)^{-1}$$

と定義し、これを **Burau ゼータ関数**と呼ぶ。

$\sigma \in B_n$ に対し、 $\pi_n(\sigma) \in S_n$ が長さ n のサイクルになるとき、 $\hat{\sigma}$ は結び目になることに注意し、以降このような σ を考える。Burau 表現の $n-1$ 次元の既約な部分表現で結び目の不変量である Alexander 多項式を表した Burau の結果を用いて、次の定理を得る。

定理 3.2 (Burau ゼータ関数の留数) 上のような $\sigma \in B_n$ に対して、

$$\text{Res}_{s=1} \zeta_\sigma^{\text{Burau}}(s) = -\frac{1}{[n]_q} \cdot \{\Delta_{\hat{\sigma}}(q)\}^{-1}$$

ここで、 $[n]_q$ は q 整数

$$[n]_q := \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

であり、 $\Delta_{\hat{\sigma}}(q)$ は結び目 $\hat{\sigma}$ に関する Alexander 多項式である。

proof: ρ_n は自明な 1 次元表現 **1** を部分表現として含んでおり、 $n-1$ 次元の既約な部分表現 $\rho_n^{(n-1)}$ との直和で表される。

$$\rho_n = \mathbf{1} \oplus \rho_n^{(n-1)}$$

これと Burau の結果 ([1], Theorem 3.11 を参照)

$$\det(I_{n-1} - \rho_n^{(n-1)}(\sigma)) = (1 + q + \cdots + q^{n-1}) \cdot \Delta_{\hat{\sigma}}(q)$$

から定理 3.2 は示される。

4 トーラス型組み紐に関するゼータ関数の性質

次は、閉包がトーラス結び目というタイプの結び目 ([4] を参照) となる、特殊な組み紐について考えていく。

定義 4.1(トーラス結び目) 自明な 2 次元トーラス上において、メリディアン方向とロンジチュード方向に向きを設定しておく。2 つの整数 (a, b) は互いに素であるとして、トーラス上の点からメリディアン方向に a 回、ロンジチュード方向に b 回まわって元の点に戻るにより得られる結び目を (a, b) 型トーラス結び目と呼び、 $T(a, b)$ と書く。

さらに、定義から閉包が (a, b) 型トーラス結び目となる組み紐は次で与えられる。

補題 4.2(トーラス型組み紐) (a, b) は互いに素であるとする。 $\sigma_{a,1} := \sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_{a-1} \in B_a$ と置くと、

$$\widehat{\sigma_{a,1}^b} = T(a, b)$$

が成り立つ。このような組み紐をトーラス型組み紐と呼ぶ。

$\sigma_{a,1}^b$ に関するBourauゼータ関数は次のように具体的に表すことができる。

命題 4.3(トーラス型組み紐の Bourau ゼータ関数) (a,b) は互いに素であるとする。このとき、 $\sigma_{a,1}^b$ に関するBourauゼータ関数は、

$$\phi_{a,b}(s, q) := \sum_{i=1}^a q^{(a-i)b} s^{i-1} = \frac{q^{ab} - s^a}{q^b - s}$$

と置くことにより、

$$\zeta_{\sigma_{a,1}^b}^{\text{Bourau}}(s) = \frac{1}{(1-s)\phi_{a,b}(s, q)}$$

となり、 $\xi_a := e^{\frac{2\pi i}{a}}$ とすると、極は $s = 1, q^b \xi_a, q^b \xi_a^2, \dots, q^b \xi_a^{a-1}$ となる。

proof: まず、Bourau 表現の定義より、

$$\rho_a(\sigma_{a,1}) = \begin{pmatrix} 1-q & q(1-q) & \cdots & q^{a-2}(1-q) & q^{a-1} \\ 1 & 0 & & & \\ & 1 & 0 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

となることがわかる。このとき、次のベクトル

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ q^{-1}\xi_a \\ \vdots \\ q^{-(a-1)}\xi_a^{a-1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ q^{-1}\xi_a^2 \\ \vdots \\ q^{-(a-1)}\xi_a^{2(a-1)} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 1 \\ q^{-1}\xi_a^{a-1} \\ \vdots \\ q^{-(a-1)}\xi_a^{(a-1)(a-1)} \end{pmatrix}$$

はそれぞれ、固有値 $1, q\xi_a^{-1}, q\xi_a^{-2}, \dots, q\xi_a^{-(a-1)}$ に対応する固有ベクトルであることが容易に計算できる。この固有ベクトルを並べてできる行列を P と置いて、 $\rho_a(\sigma_{a,1})$ を対角化することで、

$$P^{-1}\rho_a(\sigma_{a,1})P = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & q^b \xi_a^{-b} & & & \\ & & q^b \xi_a^{-2b} & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & q^b \xi_a^{-(a-1)b} \end{pmatrix}$$

となり、 a, b は互いに素なので、

$\{1, q^b \xi_a^{-b}, q^b \xi_a^{-2b}, \dots, q^b \xi_a^{-(a-1)b}\}$ と $\{1, q^b \xi_a, q^b \xi_a^2, \dots, q^b \xi_a^{a-1}\}$ は集合として同じとなる。したがって、命題 4.3 は示された。

5 Dedekind 予想と Riemann 予想の類似

まず、代数体上のゼータ関数 (Dedekind ゼータ関数) に対して知られている、Dedekind 予想と (拡張された) Riemann 予想についての主張を述べる。

定義 5.1 (Dedekind ゼータ関数) K を代数体とする。このとき、 K における整数環を $\mathcal{O}_K$ とし、 $\mathcal{O}_K$ 内のすべての整イデアル $\mathfrak{a}$ についての和

$$\zeta_K(s) := \sum_{\mathfrak{a} \subset \mathcal{O}_K} \frac{1}{N(\mathfrak{a})^s}$$

で定義される関数を **Dedekind ゼータ関数** という。ここで $N(\mathfrak{a})$ は $\mathfrak{a}$ のノルムとする。([7])

Dedekind ゼータ関数には、次のような予想が知られている。([8])

予想 5.2 (Dedekind 予想) K を代数体とする。有限次拡大 L/K に関して、 $\zeta_L(s)/\zeta_K(s)$ は $\mathbb{C}$ 上の整関数となる。

この予想は一般の有限次拡大に関しては未解決である。

予想 5.3 (拡張された Riemann 予想) 代数体 K に関する Dedekind ゼータ関数 $\zeta_K(s)$ のすべての零点 s に関して、

$$\operatorname{Re}(s) = \frac{1}{2}$$

この予想の類似をトーラス型組み紐に関する Burau ゼータ関数に対して考察する。命題 4.3 により、このゼータ関数は極も明示的に表せている。したがって、直ちにに次の 2 つの命題が示される。

命題 5.4 (Dedekind 予想の類似) $\gcd(a, b) = 1$ とする。 $\gcd(m, b) = 1$ なる $m \in \mathbb{Z}$ に対して、 $\zeta_{\sigma_{ma,1}^b}^{\text{Burau}}(s)/\zeta_{\sigma_{a,1}^b}^{\text{Burau}}(s)$ は $\mathbb{C}$ 上に零点を持たない。

命題 5.5 (Riemann 予想の類似) Burau 表現の不定元 q を $q = e^{i\theta}$ と置く、この時、 $\gcd(a, b) = 1$ なる a, b に対して、 $\zeta_{\sigma_{a,1}^b}^{\text{Burau}}(e^{-s})$ の極はすべて、

$$\operatorname{Re}(s) = 0$$

となる。

参考文献

- [1] J. S. Birman, Braids, links, and mapping class groups, Annals of Mathematics Studies 82 Princeton University Press (1975).
- [2] J. W. Alexander, Topological invariants of knots and links, Trans. Amer. Math. Soc. 20 (1923), pp.275-306.
- [3] Kunio Murasugi and Bohdan I. Kurpita, A Study of Braid, Kluwer Academic Publishers (1999).

- [4] 村杉邦男, 結び目理論とその応用, 日本評論社 (1993).
- [5] 河野俊丈, 組みひもの数理, 遊星社 (2009).
- [6] 黒川信重, 小山信也 リーマン予想のこれまでとこれから, 日本評論社 (2009).
- [7] 小野孝, 数論序説, 裳華房 (1987).
- [8] Joshua M. Lansky and Kevin M. Wilson, A variation on the solvable case of the Dedekind conjecture, J.Ramanujan Math. Soc. 20, No.2 (2005) pp.1-10