

旗多様体の量子コホモロジー環のピエリ公式について

渡辺百合佳

(奈良女子大学人間文化研究科)

1 はじめに

旗多様体の整数係数コホモロジー群は，カップ積によって次数付環となるが，その $\mathbb{Z}$ 線形基底として Schubert 類がとれることが知られている [1]. したがって，Schubert 類の積は，また Schubert 類の整数係数の線形結合で表されることもわかる．この積の法則は完全には記述されていないものの，特別な元による積法則が Monk の公式として知られている．

他方，旗多様体のコホモロジー環は，対称群の余不変式環と同型であることも知られている [2] :

$$H^*(Fl_n, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}[x_1, x_2, \dots, x_n]/I_n$$

ただし Fl_n を旗多様体， I_n を定数項をもたない n 変数の基本対称式で生成されるイデアルとする．この同型対応によって Schubert 類に対応する余不変式環の元，およびその代表元として Schubert 多項式がとれることが Lascoux と Schützenberger により発見された [8].

その後，Givental, Kim [6], Cioncan-Fontanine [3] によって，旗多様体の量子コホモロジー環と量子化された多項式環の商環が同型であることが得られた :

$$QH^*(Fl_n, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}[q_1, q_2, \dots, q_{n-1}][x_1, x_2, \dots, x_n]/I_n^q$$

ただし I_n^q は定数項をもたない量子基本多項式で生成されるイデアルとする (量子基本多項式については 2.4 節参照).

Fomin と Gelfand, Postnikov はこの場合においても Schubert 類に対応する量子 Schubert 多項式が存在することを発見し，Monk の公式を得ている [4]. この量子 Schubert 多項式は，standard elementary monomials の和で表した Schubert 多項式を，standard elementary monomials をうまく量子化することによって定義される．

Schubert 多項式は、対称群の元に対応して定義されるが、特に、Grassmannian 置換と呼ばれる対称群の元に対応する Schubert 多項式は、Schur 多項式になる。本講演では、Grassmannian 置換に対応する量子 Schubert 多項式を Schur 多項式の量子化ととらえ、その積に関して Young 図形を用いた具体的な計算例を紹介する。

2 量子 Schubert 多項式

2.1 Divided differences

S_n を n 次対称群とする。 $s_i = (i \ i+1)$ で隣接互換を表し、 $t_{ij} = (i \ j)$ で互換を表す。

$w \in S_n$ は隣接互換の積で表すことができる。今、 $w = s_{i_1} s_{i_2} \cdots s_{i_l}$ を最少個数の隣接互換の積とすると、これを w の最短分解 (reduced decomposition) とよび、このとき l を w の長さと言ふ。 l は $l(w)$ で表す。

また、

$$l(w) = \#\{(i, j) \mid 1 \leq i < j \leq n, w(i) > w(j)\}$$

である。

S_n の多項式環 $\mathbb{Z}[x_1, x_2, \dots, x_n]$ への作用を

$$wf = f(x_{w^{-1}(1)}, x_{w^{-1}(2)}, \dots, x_{w^{-1}(n)})$$

で定める。ただし、 $w \in S_n$, $f = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{Z}[x_1, x_2, \dots, x_n]$ とする。

差分商作用素 $\partial_i (i = 1, 2, \dots, n-1)$ を $\mathbb{Z}[x_1, x_2, \dots, x_n]$ 上で次のように定める：

$$\partial_i f = \frac{f - s_i f}{x_i - x_{i+1}}.$$

$f - s_i f$ は $x_i - x_{i+1}$ で割り切れ、 f の次数が d のとき $\partial_i f$ の次数は $d-1$ となる。

差分商作用素は以下の性質を持つ：

$$\partial_i \partial_j = \partial_j \partial_i, \quad \text{for } |i - j| > 1$$

$$\partial_i \partial_{i+1} \partial_i = \partial_{i+1} \partial_i \partial_{i+1},$$

$$\partial_i^2 = 0.$$

$w = s_{i_1} s_{i_2} \cdots s_{i_l} \in S_n$ を w の最短分解としたとき、

$$\partial_w = \partial_{i_1} \partial_{i_2} \cdots \partial_{i_l}$$

と定める。これは、最短分解の表示の仕方によらない。

命題 2.1 ([9]). u, v を置換とする. このとき次が成り立つ :

$$\partial_u \partial_v = \begin{cases} \partial_{uv} & \text{if } l(uv) = l(u) + l(v), \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

2.2 Schubert 多項式と Monk の公式

Schubert 多項式は差分商作用素を用いたアルゴリズムによって定められる.

S_n を n 次対称群とする. S_n の最長元 w_0 に対する Schubert 多項式 $\mathfrak{S}_{w_0}$ を

$$\mathfrak{S}_{w_0} = x_1^{n-1} x_2^{n-2} \cdots x_{n-1}$$

で定め, $w \in S_n$ に対して Schubert 多項式 $\mathfrak{S}_w$ を

$$\mathfrak{S}_w = \partial_{w^{-1}w_0} \mathfrak{S}_{w_0}$$

で定める.

$v, w \in S_n$ に対し,

$$\partial_v \mathfrak{S}_w = \begin{cases} \mathfrak{S}_{wv^{-1}} & \text{if } l(wv^{-1}) = l(w) - l(v), \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

特に $w \in S_n$ に対し

$$\mathfrak{S}_{ws_i} = \partial_i \mathfrak{S}_w \quad \text{if } l(ws_i) = l(w) - 1$$

が成り立つ.

命題 2.2 ([9]). 任意の $w \in S_n$ と, 群の自然な埋め込み $\iota : S_n \hookrightarrow S_m (n < m)$ に対して

$$\mathfrak{S}_w = \mathfrak{S}_{\iota(w)}$$

が成り立つ.

旗多様体に対する次の Pieri 型の公式が知られている :

定理 2.3 (Monk の公式 [11, 9]).

$$\mathfrak{S}_{s_r} \mathfrak{S}_w = (x_1 + x_2 + \cdots + x_r) \mathfrak{S}_w = \sum \mathfrak{S}_{wt_{ij}}$$

が成り立つ. ただし, 和は $i \leq r < j$ と $l(wt_{ij}) = l(w) + 1$ を満たす t_{ij} を渡る.

2.3 Standard elementary monomials

$$e_i^{(k)} = e_i(x_1, x_2, \dots, x_k) = \sum_{1 \leq r_1 < r_2 < \dots < r_i \leq k} x_{r_1} x_{r_2} \cdots x_{r_i}$$

を k 変数 i 次基本対称式と呼ぶ. ただし, $k \geq 0$ のとき $e_0^{(k)} = 1$ とし, $0 \leq i \leq k$ でない限り $e_i^{(k)} = 0$ とする.

基本対称式は以下の漸化式を持つ:

$$e_i^{(k)} = e_i^{(k-1)} + x_k e_{i-1}^{(k-1)}.$$

補題 2.4 ([4]). $l \neq k$ のとき, ∂_l と $e_i^{(k)}$ は可換である. また,

$$\partial_l e_i^{(k)} = \begin{cases} e_{i-1}^{(k-1)} & l = k, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

$0 \leq i_k \leq k$ を満たす $i_1, i_2, \dots, i_m$ に対し,

$$e_{i_1 i_2 \dots i_m} = e_{i_1}^{(1)} e_{i_2}^{(2)} \cdots e_{i_m}^{(m)}$$

とする. $e_{i_1 i_2 \dots i_m}$ を standard elementary monomial とよぶ.

命題 2.5 ([8, 9]). 以下はそれぞれ $\mathbb{Z}[x_1, x_2, \dots, x_n]/I_n$ の $\mathbb{Z}$ 線形基底になる:

- the monomials $x_1^{a_1} x_2^{a_2} \cdots x_{n-1}^{a_{n-1}}$, $0 \leq a_k \leq n - k$;
- the standard elementary monomials $e_{i_1 i_2 \dots i_{n-1}}$;
- the Schubert polynomials $\mathfrak{S}_w$ for $w \in S_n$.

ただし, I_n は $e_1^{(n)}, e_2^{(n)}, \dots, e_n^{(n)}$ によって生成される定数項を持たないイデアルである. さらに, これらの族はそれぞれ同じ部分空間 $L_n \subset \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]$ を張り, L_n は I_n の補空間となる.

上の命題より Schubert 多項式は standard elementary monomials の線形結合で一意的に表せることがわかる. つまり, $w \in S_n$ に対し, Schubert 多項式 $\mathfrak{S}_w$ は

$$\mathfrak{S}_w = \sum \alpha_{i_1 \dots i_{n-1}} e_{i_1 \dots i_{n-1}}$$

の形で表せる. 特に, w_0 を S_n の最長元とすると, $\mathfrak{S}_{w_0} = e_{12 \dots n-1}$.

2.4 量子 Schubert 多項式と量子 Monk 公式

定義 2.6. 行列

$$G_k = \begin{pmatrix} x_1 & q_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & x_2 & q_2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & x_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x_{k-1} & q_{k-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & x_k \end{pmatrix}$$

の特性多項式 $\det(1 + \lambda G_k)$ における λ^i の係数を $E_i^{(k)}$ で表し, 量子基本多項式とよぶ.

ただし, $E_0^{(k)} = 1$ とし, $0 \leq i \leq k$ でないとき, $E_i^{(k)} = 0$ とする.

量子基本多項式は対称式ではないことに注意する.

各変数 $x_j (1 \leq j \leq k)$ を singleton $\{j\}$, 各 $q_r (1 \leq r \leq k-1)$ を dimer $\{r, r+1\}$ とみなすことにより, 量子基本多項式 $E_i^{(k)}$ は, i 個の異なる数字を disjoint に覆う singleton と dimer に対応する x_j と q_r で作られる単項式の和になる. また, $E_k^{(k)}$ の項数は Fibonacci 数に等しい.

定義より, 量子基本多項式は次の漸化式を持つ:

$$E_i^{(k)} = E_i^{(k-1)} + x_k E_{i-1}^{(k-1)} + q_{k-1} E_{i-2}^{(k-2)}.$$

$E_i^{(k)}$ は $q_1 = 0, q_2 = 0, \dots, q_{k-1} = 0$ とすると, $e_i^{(k)}$ に一致する.

quantum standard elementary monomial を

$$E_{i_1 \dots i_m} := E_{i_1}^{(1)} \cdots E_{i_m}^{(m)}$$

により定める. ただし, $k = 1, \dots, m$ に対し, $0 \leq i_k \leq k$ とする.

$w \in S_n$ に対し, $\mathfrak{S}_w = \sum \alpha_{i_1 \dots i_{n-1}} e_{i_1 \dots i_{n-1}}$ であるとき, 量子 Schubert 多項式を

$$\mathfrak{S}_w^q := \sum \alpha_{i_1 \dots i_{n-1}} E_{i_1 \dots i_{n-1}}$$

で定める.

$\mathbb{Z}[q, x]$ で $\mathbb{Z}[q_1, \dots, q_{n-1}][x_1, \dots, x_n]$ を, $\mathbb{Z}[q]$ で $\mathbb{Z}[q_1, \dots, q_{n-1}]$ を表す. また, I_n^q は $E_1^{(n)}, E_2^{(n)}, \dots, E_n^{(n)}$ で生成される定数項を持たないイデアルとする.

命題 2.7 ([4]). 以下はそれぞれ $\mathbb{Z}[q, x]/I_n^q$ の $\mathbb{Z}[q]$ 線形基底になる:

- the monomials $x_1^{a_1} x_2^{a_2} \dots x_{n-1}^{a_{n-1}}$, $0 \leq a_k \leq n - k$;
- the quantum standard elementary monomials $E_{i_1 i_2 \dots i_{n-1}}$;

さらに, これらの族はそれぞれ $L_n^q \subset \mathbb{Z}[q, x]$ を張り. L_n^q は I_n^q の補空間となる.

定理 2.8 (量子 Monk 公式 [4]). $w \in S_n, 1 \leq r \leq n$ に対して以下が成り立つ:

$$\mathfrak{S}_{s_r}^q \mathfrak{S}_w^q = (x_1 + \dots + x_r) \mathfrak{S}_w^q = \sum \mathfrak{S}_{wt_{ab}}^q + \sum q_{cd} \mathfrak{S}_{wt_{cd}}^q.$$

ただし, 最初の和は $a \leq r < b$ で $l(wt_{ab}) = l(w) + 1$ を満たす t_{ab} を, 二番目の和は $c \leq r < d$ で $l(wt_{cd}) = l(w) - 2(d - c) + 1$ を満たす t_{cd} を渡る.

3 量子 Schur 多項式

3.1 Schur 多項式と Schubert 多項式

以下, Young 図形 $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots)$ の共役を $\lambda' = (\lambda'_1, \lambda'_2, \dots)$ で表し, λ の長さを $l(\lambda)$ で表す. また, Young 図形と分割は同一視する. $(d_1^{m_1}, \dots, d_s^{m_s})$ により整数 $d_i (1 \leq i \leq s)$ が m_i 個出てくる分割を表すこともある.

定義 3.1. 分割 $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ に対して Schur 多項式を

$$s_\lambda(x_1, \dots, x_n) = \frac{\det(x_j^{\lambda_i + n - i})_{1 \leq i, j \leq n}}{\det(x_j^{n - i})_{1 \leq i, j \leq n}}.$$

で定める.

命題 3.2 ([9]). $w_0 = (n \ n - 1 \ \dots \ 2 \ 1) \in S_n$ に対して

$$\partial_{w_0} = \frac{1}{\prod_{i < j} (x_i - x_j)} \sum_{w \in S_n} \varepsilon(w) w$$

が成り立つ. ただし, $\varepsilon(w)$ は置換 w の符号 (± 1) とする.

命題 3.3 ([9]). $\delta := (n - 1, n - 2, \dots, 1, 0) \in \mathbb{N}^n$ とする. 任意の $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ に対して,

$$\partial_{w_0} x^\alpha = s_{\alpha - \delta}(x_1, \dots, x_n)$$

が成り立つ. さらにこれより, ∂_{w_0} は $\mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]$ から $\mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]^{S_n}$ への $\mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]^{S_n}$ 線形写像を与える.

定義 3.4. $w \in S_n$ とする. w に対し, $w(r) > w(r+1)$ であるような $r (1 \leq r \leq n-1)$ を w の descent といい, w がただ一つの descent を持つとき, w を Grassmannian 置換という. 形式的に, 単位元は 0 を descent とする Grassmannian 置換であるとする.

$w \in S_n$ が r を descent に持つ Grassmannian 置換であるとき,

$$\lambda(w) = (w(r) - r, w(r-1) - (r-1), \dots, w(1) - 1)$$

と置くと, これは Young 図形になる.

Schur 多項式は Schubert 多項式として以下のように表される.

命題 3.5 ([9]). $w \in S_n$ が descent r を持つ Grassmannian 置換であるとき,

$$\mathfrak{S}_w = s_{\lambda(w)}(x_1, x_2, \dots, x_r)$$

が成り立つ.

定理 3.6. 分割 $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots)$ に対して

$$s_\lambda(x_1, \dots, x_m) = \det(e_{\lambda'_i + j - i}^{(m)})_{1 \leq i, j \leq l(\lambda')}$$

が成り立つ.

上記のように, Schur 多項式は基本対称式を用いて表せることが知られているが, Kirillov により standard elementary monomials を用いて書き表せることが示された.

定理 3.7 ([7]). 分割 $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots)$ に対して

$$s_\lambda(x_1, \dots, x_m) = \det(e_{\lambda'_i + j - i}^{(m-i+j)})_{1 \leq i, j \leq l(\lambda')}$$

が成り立つ.

3.2 量子 Schur 多項式

量子 Schur 多項式を以下で定める.

定義 3.8. $w \in S_n$ を descent r をもつ shape λ の Grassmannian 置換としたとき,

$$s_\lambda^q(x_1, x_2, \dots, x_r) = \mathfrak{S}_w^q$$

により量子 Schur 多項式 s_λ^q を定める.

定理 3.7 より

定理 3.9 ([7]).

$$s_{\lambda}^q(x_1, \dots, x_m) = \det(E_{\lambda'_i + j - i}^{(m-i+j)})_{1 \leq i, j \leq l(\lambda')}$$

が成り立つ.

4 Young 図形を用いた計算例

以上の準備のもとに, Young 図形で書き表されるいくつかの積公式を紹介する.

定理 4.1. $1 \leq a \leq b$, $a + b \leq r$ とする.

$$\begin{aligned} s_{(1^a)}^q(x_1, \dots, x_r) s_{(1^b)}^q(x_1, \dots, x_r) &= \sum_{i=0}^a s_{(2^{a-i}, 1^{b-a+2i})}^q(x_1, \dots, x_r) \\ &\quad + q_r \sum_{i=0}^{a-1} s_{(2^{a-i-1}, 1^{b-a+2i})}^q(x_1, \dots, x_{r-1}) \end{aligned}$$

Schubert 多項式 $\mathfrak{S}_{s_r} = x_1 + x_2 + \dots + x_r$ は Schur 多項式で表すと $s_{(1)}(x_1, \dots, x_r)$ である.

$$\mathfrak{S}_{s_r}^q = \mathfrak{S}_{s_r} = s_{(1)}(x_1, \dots, x_r) = s_{(1)}^q(x_1, \dots, x_r).$$

従って, 定理 3.9 より次のようになる. 量子 Monk 公式 (定理 2.8) を Grassmannian 置換の場合に限定すると, 次の命題が得られる.

定理 4.2. $\mu = (1)$, $l(\lambda) < r$ とする.

$$s_{\mu}^q(x_1, \dots, x_r) s_{\lambda}^q(x_1, \dots, x_r) = \sum_{\nu} s_{\nu}^q(x_1, \dots, x_r) + q_r \det \left(E_{\lambda'_i - \mu'_j - i + j}^{(r+j-\mu'_j-1)} \right)_{1 \leq i, j \leq l(\lambda')}.$$

ただし右辺の最初の項の和は, λ に箱を 1 個加えて Young 図形になる ν 全体を渡るものとする.

そのほか, いくつかの計算例を紹介する.

命題 4.3. $a + 1 \leq r$ とする.

$$\begin{aligned} s_{(1^a)}^q(x_1, \dots, x_r) s_{(b)}^q(x_1, \dots, x_r) &= s_{(b+1, 1^{a-1})}^q(x_1, \dots, x_r) + s_{(b, 1^a)}^q(x_1, \dots, x_r) \\ &\quad + q_r s_{(1^{a-1})}^q(x_1, \dots, x_{r-1}) s_{(b-1)}^q(x_1, \dots, x_{r+1}) \end{aligned}$$

命題 4.4. $a + 2 \leq r$ とする.

$$\begin{aligned} & s_{(1^a)}^q(x_1, \dots, x_r) s_{(2,1)}^q(x_1, \dots, x_r) \\ &= \sum_{\lambda} s_{\lambda}^q(x_1, \dots, x_r) + q_r s_{(1)}^q(x_1, \dots, x_{r+1}) (s_{(1^a)}^q(x_1, \dots, x_{r-1}) + s_{(2,1^{a-2})}^q(x_1, \dots, x_{r-1})) \end{aligned}$$

ただし、右辺の最初の項の和は、Young 図形 $(2, 1)$ に a 個の箱を、一行に高々 1 個付け加えて得られる Young 図形 λ 全体を渡る．また、 $a = 1$ のとき、右辺の最後の項は 0 とする．

命題 4.5. $a + 3 \leq r$ とする.

$$\begin{aligned} & s_{(1^a)}^q(x_1, \dots, x_r) s_{(2,1,1)}^q(x_1, \dots, x_r) \\ &= \sum_{\lambda} s_{\lambda}^q(x_1, \dots, x_r) + q_r s_{(1)}^q(x_1, \dots, x_{r+1}) (s_{(1^{a+1})}^q(x_1, \dots, x_{r-1}) \\ &\quad + s_{(2,1^{a-1})}^q(x_1, \dots, x_{r-1}) + s_{(2,2,1^{a-3})}^q(x_1, \dots, x_{r-1})) \end{aligned}$$

ただし、右辺の最初の項の和は、Young 図形 $(2, 1, 1)$ に a 個の箱を、一行に高々 1 個付け加えて得られる Young 図形 λ 全体を渡る．また、 $a = 1$ のとき、右辺に現れる $s_{(2,1^{a-1})}^q(x_1, \dots, x_{r-1})$, $s_{(2,2,1^{a-3})}^q(x_1, \dots, x_{r-1})$ を 0, $a = 2$ のとき、 $s_{(2,2,1^{a-3})}^q(x_1, \dots, x_{r-1})$ を 0 とする．

参考文献

- [1] I. N. Bernšteĭn, I. M. Gel'fand, and S. I. Gel'fand. Schubert cells, and the cohomology of the spaces G/P . *Uspehi Mat. Nauk*, Vol. 28, No. 3(171), pp. 3–26, 1973.
- [2] A. Borel. Sur la cohomologie des espaces fibrés principaux et des espaces homogènes de groupes de Lie compacts. *Ann. of Math. (2)*, Vol. 57, pp. 115–207, 1953.
- [3] I. Ciocan-Fontanine. Quantum cohomology of flag varieties. *Internat. Math. Res. Notices*, No. 6, pp. 263–277, 1995.
- [4] S. Fomin, S. Gelfand, and A. Postnikov. Quantum Schubert polynomials. *J. Amer. Math. Soc.*, Vol. 10, No. 3, pp. 565–596, 1997.

- [5] W. Fulton. *Young tableaux*, Vol. 35 of *London Mathematical Society Student Texts*. Cambridge University Press, Cambridge, 1997. With applications to representation theory and geometry.
- [6] A. Givental and B. Kim. Quantum cohomology of flag manifolds and Toda lattices. *Comm. Math. Phys.*, Vol. 168, No. 3, pp. 609–641, 1995.
- [7] A.N. Kirillov. Quantum Schubert polynomials and quantum Schur functions. *Internat. J. Algebra Comput.*, Vol. 9, No. 3-4, pp. 385–404, 1999. Dedicated to the memory of Marcel-Paul Schützenberger.
- [8] A. Lascoux and M. P. Schützenberger. Polynômes de Schubert. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, Vol. 294, No. 13, pp. 447–450, 1982.
- [9] I.G. Macdonald. *Notes on Schubert Polynomials*. Publications du Laboratoire de combinatoire et d’informatique mathématique. Dép. de mathématiques et d’informatique, Université du Québec à Montréal, 1991.
- [10] I.G. Macdonald. *Symmetric functions and Hall polynomials*. Oxford Mathematical Monographs. The Clarendon Press Oxford University Press, New York, second edition, 1995. With contributions by A. Zelevinsky, Oxford Science Publications.
- [11] D. Monk. The geometry of flag manifolds. *Proc. London Math. Soc. (3)*, Vol. 9, pp. 253–286, 1959.
- [12] R. Winkel. On the expansion of Schur and Schubert polynomials into standard elementary monomials. *Adv. Math.*, Vol. 136, No. 2, pp. 224–250, 1998.