

簡約型等質空間がコンパクト商を持つための位相的制約

森田陽介

2013 年 11 月 27 日

概要

等質空間をその不連続群の作用で割った商空間を Clifford–Klein 形という．簡約型等質空間が与えられたとき、それがいつコンパクトな Clifford–Klein 形を持つかという問題は、簡約 Lie 群の構造論、エルゴード理論、シンプレクティック幾何など様々な方法を用いて研究されている．本講演では、位相幾何的考察により得られるコンパクト Clifford–Klein 形の存在の必要条件と、それを用いて得られるコンパクト Clifford–Klein 形を持たない対称空間の新しい例について紹介する．

1 はじめに

G を Lie 群、 H を G の閉部分群とする（この講演において、Lie 群とは全て実 Lie 群のことである）． G の離散部分群 Γ が G/H 上に固有不連続かつ自由に作用するとき、 $\Gamma \backslash G/H$ には多様体の構造が自然に定まる．このとき、 $\Gamma \backslash G/H$ を G/H の Clifford–Klein 形と呼び、 Γ を G/H の不連続群と呼ぶ．

Remark 1.1. G の離散部分群 Γ の等質空間 G/H への作用が固有不連続でない場合には、 $\Gamma \backslash G/H$ は非 Hausdorff な、とても「汚い」空間になる．また、 Γ の G/H への作用が固有不連続だが自由でない場合、 $\Gamma \backslash G/H$ は佐武の V -多様体ないし Thurston の orbifold と呼ばれる、多様体を有限群の作用で割ったタイプの特異点を持った空間になる．

この講演では、次の問題を考える：

Problem 1.2. G を線型簡約 Lie 群、 H を G の簡約型部分群とする． G/H の Clifford–Klein 形で、コンパクトなものは存在するか？

H がコンパクトなときには、 G/H は常にコンパクト Clifford–Klein 形を持つことが、A. Borel [1] によって証明されている．一方 (G, H) の取り方によっては、固有不連続に作用する不連続群がほとんどないことも有り得る：

Fact 1.3. (Calabi–Markus 現象. Kobayashi [4]) G の無限離散部分群で、 G/H に固有不連続に作用するものが存在するための必要十分条件は、 $\text{rank}_{\mathbb{R}} G > \text{rank}_{\mathbb{R}} H$ である．

Clifford–Klein 形 $\Gamma \backslash G/H$ の局所的な幾何構造は、 G/H のみで決定される。一方 Γ は、 $\Gamma \backslash G/H$ の大域的なトポロジーを統制する。従って Problem 1.2 は、「局所的な幾何構造の条件から、大域的なトポロジーがどれだけ制約を受けるか？」というタイプの問題とみなせる。

Example 1.4. 例えば、 $(G, H) = (O(p, q+1), O(p, q))$ (ただし $q \neq 1$) の場合を考えよう。このとき G/H のコンパクト Clifford–Klein 形とは、完備、コンパクトで断面曲率が恒等的に -1 に等しい、符号 (p, q) の擬 Riemann 多様体のことに他ならない。 $q = 0$ の場合 (双曲多様体) には、A. Borel の結果より G/H はコンパクト Clifford–Klein 形を持つ。一方 $q \geq p > 0$ の場合、Fact 1.3 より G/H はコンパクト Clifford–Klein 形を持たない。

コンパクト Clifford–Klein 形の存在問題は様々な方法を用いて研究されており、

- 作用の固有不連続性を KAK -分解によって言い換えることで得られる必要条件および十分条件
- エルゴード理論から導かれる必要条件
- シンプレクティック幾何の理論から導かれる必要条件
- ユニタリ表現の行列要素の評価から得られる必要条件

などの結果が知られている。これらの手法・結果を解説した文献としては、[6], [8], [10], [3] などが挙げられる。本講演では、

- 位相幾何的考察により得られる必要条件

について紹介したい。

2 主結果のステートメント

以降、特に断らない限り、次の状況を仮定する：

Convention 2.1. G を線型簡約 Lie 群、 H を G の簡約型部分群とする。 G/H を簡約型等質空間と呼ぶ。一般性を失うことなく、 G, H は $GL(N, \mathbb{R})$ の閉部分群で、転置について閉じているものだと仮定してよい。

この講演では議論を簡単にするため、 G の複素化 $G_{\mathbb{C}}$ および H の複素化 $H_{\mathbb{C}}$ が $GL(N, \mathbb{C})$ の中で閉であることを仮定する。従って $G_U = (G_{\mathbb{C}} \cap U(N))_o$ はコンパクト Lie 群で、 $H_U = (H_{\mathbb{C}} \cap U(N))_o$ を閉部分群に持つ。 G_U/H_U を G/H に対応するコンパクト等質空間と呼ぶ。

$K_G = G \cap U(N)$ と $K_H = H \cap U(N)$ はそれぞれ、 G と H の極大コンパクト部分群である。この講演では H が連結であることを仮定する。すると Cartan 分解より K_H は連結で、 H_U の閉部分群になる。

Lie 群には大文字のローマ字を用い、その Lie 環には対応する小文字のフラクトゥール (ドイツ文字) を用いる。例えば Lie 群 G の Lie 環は $\mathfrak{g}$ である。

Remark 2.2. H が連結だと仮定したが、これは大した制約ではない。実際、次が成り立つことが知られている：

Fact 2.3. G_1 を線型 Lie 群, G_2 をその閉部分群とする。 G_2 の連結成分が有限個のとき, G_1/G_2 がコンパクト Clifford–Klein 形を持つための必要十分条件は, $G_1/(G_2)_o$ がコンパクト Clifford–Klein 形を持つことである。

今回紹介する主結果は次の定理である：

Theorem 2.4. もし, 準同型

$$\pi^* : H^\bullet(G_U/H_U; \mathbb{C}) \rightarrow H^\bullet(G_U/K_H; \mathbb{C})$$

が単射でないならば, G/H はコンパクト Clifford–Klein 形を持たない。

この定理の系として, コンパクト Clifford–Klein 形を持たない対称空間の新たな例が得られる：

Corollary 2.5. (G, H) が次のリスト中のいずれかであるとき, 対称空間 G/H はコンパクト Clifford–Klein 形を持たない：

- (1) $(GL(2n, \mathbb{R}), GL(n, \mathbb{C}))$ ($n > 1$)
- (2) $(SL(p+q, \mathbb{R}), SO(p, q))$ (p, q : 奇数)
- (3) $(O(n, n), O(n, \mathbb{C}))$ ($n > 1$)
- (4) $(O(p+r, q+s), O(p, q) \times O(r, s))$ (p, q : 奇数, $(r, s) \neq (0, 0)$)

Remark 2.6. Kulkarni [9] および Kobayashi–Ono [7] によって, p, q が奇数のとき, 完備, コンパクトで断面曲率が恒等的に -1 に等しい符号 (p, q) の擬 Riemann 多様体は存在しないことが証明されている。Corollary 2.5 (4) において特に $r = 0, s = 1$ とすれば, この結果の別証明が得られる。

また, 非対称な等質空間については, 例えば次のような新しい例がある：

Corollary 2.7. (G, H) が次のリスト中のいずれかであるとき, 等質空間 G/H はコンパクト Clifford–Klein 形を持たない：

- (1) $(SL(n_1 + \cdots + n_k, \mathbb{R}), SL(n_1, \mathbb{R}) \times \cdots \times SL(n_k, \mathbb{R}))$ ($n_1, n_2 > 2$)
- (2) $(SL(n_1 + \cdots + n_k, \mathbb{C}), SL(n_1, \mathbb{C}) \times \cdots \times SL(n_k, \mathbb{C}))$ ($n_1, n_2 > 1$)
- (3) $(SL(n_1 + \cdots + n_k, \mathbb{H}), SL(n_1, \mathbb{H}) \times \cdots \times SL(n_k, \mathbb{H}))$ ($n_1, n_2 > 1$)
- (4) $(O(p_1 + \cdots + p_k, q_1 + \cdots + q_k), O(p_1, q_1) \times \cdots \times O(p_k, q_k))$ (p_1, q_1 : 奇数, $(p_2, q_2) \neq (0, 0)$)

Remark 2.8. Corollary 2.5 (4) は Corollary 2.7 (4) の特別な場合である。

3 Theorem 2.4 の証明

Theorem 2.4 の証明の鍵は 2 つある. 1 つ目は, $\Gamma \backslash G/H$ と $\Gamma \backslash G/K_H$ が同じコホモロジー環を持つことであり, これは簡単な位相幾何的考察から従う. 2 つ目は, 小林俊行と小野薫が [7] で定義した準同型写像 η である. $\Gamma \backslash G/H$ のコホモロジー環の情報は, η によってより簡単な空間 G_U/H_U のコホモロジー環の情報と関連付けられる. これら 2 つの結果から, Theorem 2.4 はほとんど直ちに従う.

まず, $\Gamma \backslash G/H$ と $\Gamma \backslash G/K_H$ が同じコホモロジー環を持つことを証明しよう. その前に, 次のことを注意しておく:

Lemma 3.1. G_1 を Lie 群, G_2 を G_1 の閉部分群, G_3 を G_2 の閉部分群とする. Γ を G_1 の離散部分群とする.

- (1) もし Γ が G_1/G_2 に固有不連続に作用するならば, Γ は G_1/G_3 にも固有不連続に作用する.
- (2) もし Γ が G_1/G_2 に自由に作用するならば, Γ は G_1/G_3 にも自由に作用する.
- (3) Γ が G_1/G_2 に固有不連続かつ自由に作用するとき, 自然な射影

$$\pi : \Gamma \backslash G_1/G_3 \rightarrow \Gamma \backslash G_1/G_2$$

は G_2/G_3 をファイバーに持つファイバーバンドルになる.

Proof. (1) Γ が G_1/G_2 に固有不連続に作用するための必要十分条件は, 任意の G_1 のコンパクト部分集合 S に対して $S\Gamma S^{-1} \cap G_2$ が相対コンパクトになることである (Kobayashi [5] 参照). このことから主張はすぐに従う.

(2) Γ が G_1/G_2 に自由に作用するための必要十分条件は, 任意の $x \in G_1$ に対して $x(\Gamma - \{1\})x^{-1} \cap G_2 = \emptyset$ が成り立つことである. このことから主張はすぐに従う.

(3) は (1), (2) より明らかである. □

以下, $\Gamma \backslash G/H$ を G/H の Clifford–Klein 形とする (ここではまだコンパクト性を仮定しない). このとき, Lemma 3.1 より, $\Gamma \backslash G/K_H$ も Clifford–Klein 形である. さらに, (先に述べた通り) 次が成り立つ:

Proposition 3.2. 自然な射影 $\pi : \Gamma \backslash G/K_H \rightarrow \Gamma \backslash G/H$ は, コホモロジー環の同型

$$\pi^* : H^\bullet(\Gamma \backslash G/K_H; \mathbb{C}) \xrightarrow{\sim} H^\bullet(\Gamma \backslash G/H; \mathbb{C})$$

を誘導する.

Proof. Lemma 3.1 (3) と Cartan 分解より, $\pi : \Gamma \backslash G/K_H \rightarrow \Gamma \backslash G/H$ は可縮な空間をファイバーに持つファイバーバンドルである. 従って, π^* が同型であることは Leray–Serre スペクトル系列から直ちに従う. □

次に, Kobayashi-Ono の準同型写像 η を定義しよう.

G/H 上の G -不変な p 次微分形式全体のなす空間 $\mathcal{A}^p(G/H)^G$ は, $(\Lambda^p(\mathfrak{g}/\mathfrak{h})^*)^H$ と自然に同一視できる. H は連結であるから, これは $(\Lambda^p(\mathfrak{g}/\mathfrak{h})^*)^{\mathfrak{h}}$ と等しい. 同様に, $\mathcal{A}^p(G_U/H_U)^{G_U}$ は自然に $(\Lambda^p(\mathfrak{g}_U/\mathfrak{h}_U)^*)^{\mathfrak{h}_U}$ と同一視される. 自然な同型

$$(\Lambda^p(\mathfrak{g}_U/\mathfrak{h}_U)^*)^{\mathfrak{h}_U} \otimes \mathbb{C} \simeq (\Lambda^p(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}/\mathfrak{h}_{\mathbb{C}})^*)^{\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}} \simeq (\Lambda^p(\mathfrak{g}/\mathfrak{h})^*)^{\mathfrak{h}} \otimes \mathbb{C}$$

は,

$$\eta : \mathcal{A}^p(G_U/H_U)^{G_U} \otimes \mathbb{C} \xrightarrow{\sim} \mathcal{A}^p(G/H)^G \otimes \mathbb{C} \hookrightarrow \mathcal{A}^p(\Gamma \backslash G/H) \otimes \mathbb{C}$$

を誘導する. この η が外微分 d と可換であることは定め方より明らかだろう. さらに, 今 G_U は連結かつコンパクトであるから, コチェイン複体 $(\mathcal{A}^\bullet(G_U/H_U)^{G_U} \otimes \mathbb{C}, d)$ のコホモロジーは, 等質空間 G_U/H_U のコホモロジー $H^\bullet(G_U/H_U; \mathbb{C})$ と自然に同型である. 以上を纏めて, コホモロジー環の間の準同型

$$\eta : H^p(G_U/H_U; \mathbb{C}) \rightarrow H^p(\Gamma \backslash G/H; \mathbb{C})$$

を得る.

Proposition 3.3. ([7, Proposition 3.9]) $\Gamma \backslash G/H$ がコンパクトならば, η は単射.

Proof. 証明の概略のみ述べる. G_U/H_U は向き付け可能なコンパクト多様体であるから, Poincaré 双対性が成り立つ. すなわち, G_U -不変 p 次微分形式 $\alpha \in \mathcal{A}^p(G_U/H_U)^{G_U} \otimes \mathbb{C}$ が $d\alpha = 0$ かつ $[\alpha] \neq 0 \in H^p(G_U/H_U; \mathbb{C})$ を満たすとき, $d\beta = 0$ なる $\beta \in \mathcal{A}^{n-p}(G_U/H_U)^{G_U} \otimes \mathbb{C}$ ($n = \dim G - \dim H$) であって

$$\int_{G_U/H_U} \alpha \wedge \beta \neq 0$$

を満たすものが取れる. このとき η の定め方から,

$$\int_{\Gamma \backslash G/H} \eta(\alpha) \wedge \eta(\beta) \neq 0$$

が分かる. 特に, $[\eta(\alpha)] \in H^p(\Gamma \backslash G/H; \mathbb{C})$ は non-zero でなければならない. $\square$

以上で, Theorem 2.4 を証明する準備が整った.

Proof of Theorem 2.4. 先ほどと同様にして, $\eta : H^\bullet(G_U/K_H; \mathbb{C}) \rightarrow H^\bullet(\Gamma \backslash G/K_H; \mathbb{C})$ も定義できる. 定め方より,

$$\begin{array}{ccc} H^\bullet(G_U/H_U; \mathbb{C}) & \xrightarrow{\eta} & H^\bullet(\Gamma \backslash G/H; \mathbb{C}) \\ \downarrow \pi^* & & \downarrow \pi^* \\ H^\bullet(G_U/K_H; \mathbb{C}) & \xrightarrow{\eta} & H^\bullet(\Gamma \backslash G/K_H; \mathbb{C}) \end{array}$$

は可換図式になる. Proposition 3.2 より右側の π^* は同型. さらにもし $\Gamma \backslash G/H$ がコンパクトならば, Proposition 3.3 より上側の η は単射となり, 従って左側の π^* も単射. これが示すべきことであった. $\square$

4 Chern–Weil 準同型と π^* の非単射性

Theorem 2.4 を使うためには, $\pi^* : H^\bullet(G_U/H_U; \mathbb{C}) \rightarrow H^\bullet(G_U/K_H; \mathbb{C})$ が単射でないような (G, H) の例を見つけなければならない. この節では特性類を用いて, π^* が単射でないための (容易に確認可能な) 十分条件を与える.

$\pi : G_U \rightarrow G_U/H_U$ は主 H_U -バンドルであるから, 主バンドルの特性類に関する Chern–Weil 理論により,

$$w : (S^p(\mathfrak{h}_U)^*)^{H_U} \rightarrow H^{2p}(G_U/H_U; \mathbb{R}) \subset H^{2p}(G_U/H_U; \mathbb{C})$$

が定義される. 図式

$$\begin{array}{ccc} (S(\mathfrak{h}_U)^*)^{H_U} & \xrightarrow{w} & H^\bullet(G_U/H_U; \mathbb{C}) \\ \downarrow \text{rest} & & \downarrow \pi^* \\ (S(\mathfrak{k}_H)^*)^{K_H} & \xrightarrow{w} & H^\bullet(G_U/K_H; \mathbb{C}) \end{array}$$

が可換であることは簡単に確かめられる. ただし, $\text{rest} : (S(\mathfrak{h}_U)^*)^{H_U} \rightarrow (S(\mathfrak{k}_H)^*)^{K_H}$ は制限写像.

Fact 4.1. (see [2, §10]) Chern–Weil 準同型 w の核

$$J_{G_U/H_U} := \ker(w : (S(\mathfrak{h}_U)^*)^{H_U} \rightarrow H^\bullet(G_U/H_U; \mathbb{C}))$$

は, $(S(\mathfrak{h}_U)^*)^{H_U}$ のイデアルとして

$$\bigoplus_{p=1}^{\infty} \text{im}(\text{rest} : (S^p(\mathfrak{g}_U)^*)^{G_U} \rightarrow (S^p(\mathfrak{h}_U)^*)^{H_U})$$

によって生成される.

Proposition 4.2.

$$\ker(\text{rest} : (S(\mathfrak{h}_U)^*)^{H_U} \rightarrow (S(\mathfrak{k}_H)^*)^{K_H}) \not\subset J_{G_U/H_U}$$

のとき, 準同型 $\pi^* : H^\bullet(G_U/H_U; \mathbb{C}) \rightarrow H^\bullet(G_U/K_H; \mathbb{C})$ は単射でない (従って, G/H はコンパクト Clifford–Klein 形を持たない).

Proof. 仮定より, $w(P) \neq 0$ および $P|_{\mathfrak{k}_H} = 0$ を満たす $P \in (S(\mathfrak{h}_U)^*)^{H_U}$ が存在するはずである. このとき $w(P) \in H(G_U/H_U; \mathbb{C})$ は $\ker(\pi^* : H(G_U/H_U; \mathbb{C}) \rightarrow H(G_U/K_H; \mathbb{C}))$ の non-zero な元になる. $\square$

Convention 4.3. G_U, H_U, K_H の極大トーラス $T_{G_U}, T_{H_U}, T_{K_H}$ を $T_{G_U} \supset T_{H_U} \supset T_{K_H}$ を満たすように取る. 対応する Weyl 群をそれぞれ $W_{G_U}, W_{H_U}, W_{K_H}$ で表す.

よく知られている通り, 制限写像 $(S(\mathfrak{g}_U)^*)^{G_U} \rightarrow (S(\mathfrak{k}_{G_U})^*)^{W_{G_U}}$ は同型である. これを用いて, Proposition 4.2 を書き直しておく:

Corollary 4.4.

$$\ker(\text{rest} : (S(\mathfrak{t}_{\mathfrak{h}_U})^*)^{W_{H_U}} \rightarrow (S(\mathfrak{t}_{\mathfrak{h}})^*)^{W_{K_H}}) \not\subset I_{G_U/H_U}$$

のとき, 準同型 $\pi^* : H^\bullet(G_U/H_U; \mathbb{C}) \rightarrow H^\bullet(G_U/K_H; \mathbb{C})$ は単射でない (従って, G/H はコンパクト Clifford–Klein 形を持たない).

ここで,

$$\bigoplus_{p=1}^{\infty} \text{im}(\text{rest} : (S^p(\mathfrak{t}_{\mathfrak{g}_U})^*)^{W_{G_U}} \rightarrow (S^p(\mathfrak{t}_{\mathfrak{h}_U})^*)^{W_{H_U}})$$

の生成する $(S(\mathfrak{t}_{\mathfrak{h}_U})^*)^{W_{H_U}}$ のイデアルを I_{G_U/H_U} と書いた. (別の言い方をすれば I_{G_U/H_U} とは, $(S(\mathfrak{t}_{\mathfrak{h}_U})^*)^{W_{H_U}} = (S(\mathfrak{h}_U)^*)^{H_U}$ という同一視のもとで J_{G_U/H_U} に対応するイデアルである).

5 Corollary 2.5, Corollary 2.7 の証明の概略

Proof of Corollary 2.5. (1) $(G, H) = (GL(2n, \mathbb{R}), GL(n, \mathbb{C}))$ が Proposition 4.2 の (あるいは, 同値な) ことであるが, Corollary 4.4 の) 仮定を満たすことを確かめればよい.

$$G_U = U(2n), \quad H_U = U(n) \times U(n), \quad K_H = \left\{ \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & \bar{A} \end{pmatrix} : A \in U(n) \right\}$$

であるから,

$$\begin{aligned} (S(\mathfrak{g}_U)^*)^{G_U} &= (S(\mathfrak{u}(2n))^*)^{U(2n)} \\ &\simeq S(\text{Span}_{\mathbb{R}}\{c_1, \dots, c_{2n}\}), \\ (S(\mathfrak{h}_U)^*)^{H_U} &= (S(\mathfrak{u}(n))^*)^{U(n)} \otimes (S(\mathfrak{u}(n))^*)^{U(n)} \\ &\simeq S(\text{Span}_{\mathbb{R}}\{c_1 \otimes 1, \dots, c_n \otimes 1, 1 \otimes c_1, \dots, 1 \otimes c_n\}), \\ (S(\mathfrak{k}_{\mathfrak{h}})^*)^{K_H} &= (S(\mathfrak{u}(n))^*)^{U(n)} \\ &\simeq S(\text{Span}_{\mathbb{R}}\{c_1, \dots, c_n\}) \end{aligned}$$

となる (ここで $c_i \in (S^i(\mathfrak{u}(n))^*)^{U(n)}$ は $U(n)$ の第 i Chern 類). さらに, 制限写像は

$$\begin{aligned} \text{rest} : (S(\mathfrak{g}_U)^*)^{G_U} &\rightarrow (S(\mathfrak{h}_U)^*)^{H_U}, \quad c_i \mapsto \sum_{k+l=i} c_k \otimes c_l, \\ \text{rest} : (S(\mathfrak{h}_U)^*)^{H_U} &\rightarrow (S(\mathfrak{k}_{\mathfrak{h}})^*)^{K_H}, \quad c_i \otimes 1 \mapsto c_i, \quad 1 \otimes c_i \mapsto (-1)^j c_j \end{aligned}$$

で与えられる. 従って

$$\begin{aligned} c_2 \otimes 1 - 1 \otimes c_2 &\in \ker(\text{rest} : (S(\mathfrak{h}_U)^*)^{H_U} \rightarrow (S(\mathfrak{k}_{\mathfrak{h}})^*)^{K_H}), \\ c_2 \otimes 1 - 1 \otimes c_2 &\notin J_{G_U/H_U} \end{aligned}$$

が成り立つ. これが示すべきことであった.

(2) (3) (4) の証明も同様である. それぞれ $e, p_1 \otimes 1 - 1 \otimes p_1, e \otimes 1$ を考えればよい. □

Corollary 2.7 の証明も同様であるから省略する.

参考文献

- [1] A. Borel, Compact Clifford–Klein forms of symmetric spaces, *Topology* **2** (1963), 111–122.
- [2] H. Cartan, La transgression dans un groupe de Lie et dans un espace fibré principal, *Colloque de Topologie (espaces fibrés), Bruxelles, 1950*, George Thone, Liège (1951), 57–71.
- [3] D. Constantine, Compact Clifford–Klein forms — geometry, topology and dynamics, arXiv:1307.2183 (2013), to appear in *Proceedings of the conference Geometry, Topology and Dynamics in Negative Curvature (Bangalore 2010)*, London Mathematical Society Lecture Notes Series.
- [4] T. Kobayashi, Proper action on a homogeneous space of reductive type, *Math. Ann.* **285** (1989), 249–263.
- [5] T. Kobayashi, Criterion for proper actions on homogeneous spaces of reductive groups, *J. Lie Theory* **6** (1996), 147–163.
- [6] 小林俊行, 非リーマン等質空間の不連続群について, 数学 **57** (2005) 267–281; English translation in: *Sugaku Expositions* **22** (2009), 1–19, translated by M. Reid.
- [7] T. Kobayashi and K. Ono, Note on Hirzebruch’s proportionality principle, *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math.* **37** (1990), 71–87.
- [8] T. Kobayashi and T. Yoshino, Compact Clifford–Klein forms of symmetric spaces — revisited, *Pure Appl. Math. Q.* **1** (2005), 591–663.
- [9] R. Kulkarni, Proper actions and pseudo-Riemannian space forms, *Adv. Math.* **40** (1981), 10–51.
- [10] F. Labourie, Quelques résultats récents sur les espaces localement homogènes compacts, *Manifolds and geometry (Pisa, 1993)*, *Sympos. Math.*, XXXVI (1996), 267–283, Cambridge Univ. Press, Cambridge.