

# Geometry of multiplicity-free representations of $SO(N)$ and visible actions

田中雄一郎\*

2013 年 11 月 27 日

## Abstract

For a connected compact simple Lie group  $G$  of type B or D, we find pairs  $(V_1, V_2)$  of irreducible representations of  $G$  such that the tensor product representation  $V_1 \otimes V_2$  is multiplicity-free by a geometric consideration based on a notion of visible actions on complex manifolds, introduced by T.Kobayashi. The pairs that we find exhaust all the multiplicity-free pairs by an earlier combinatorial classification due to Stembridge.

## 1 導入

### 1.1 主結果の簡単な紹介

始めに主結果の大まかな内容を紹介します。

**定理 1.1.**  $SO(N)$  と  $Spin(N)$  の無重複テンソル積表現は全て、1 次元表現、外積表現、スピン表現と可視的作用とを組み合わせ得られる。

用語の説明：コンパクト群  $G$  の既約ユニタリ表現  $V_1, V_2$  (表現は全て複素数体  $\mathbb{C}$  上で考えます) に対し、それらのテンソル積表現  $V_1 \otimes V_2$  が  $G$  の表現として無重複であるとき、 $V_1 \otimes V_2$  を無重複テンソル積表現と呼ぶことにします。また、局所コンパクト群  $H$  のユニタリ表現  $V$  が無重複であるとは、絡作用素の環  $\text{End}_H(V)$  が可換であることと定めます。 $H$  がコンパクト群のときは、 $V$  の既約分解  $V = \bigoplus_{\pi \in \hat{H}} n(\pi) V_\pi$  において、 $n(\pi) \leq 1 \ \forall \pi \in \hat{H}$  が成り立つことと同じです。ただし、 $\hat{H}$  は  $H$  のユニタリ双対とします。

この定理は、 $G = SO(N)$  もしくは  $Spin(N)$  の無重複テンソル積表現  $V_1 \otimes V_2$  を、 $G$  が強可視的に作用するような一般旗多様体  $X$  上の正則ベクトル束  $\mathcal{W} \rightarrow X$  の大域切断の空間  $\mathcal{O}(X, \mathcal{W})$  として実現することによって証明されます。このときのベクトル束のファイバーが 1 次元表現、外積表現またはスピン表現 (を 1 次元表現で捻ったもの) になっており、これが「組み合わせる」の意味になります。

### 1.2 動機付け

主結果の動機づけは、小林俊行氏によって導入された複素多様体への可視的な作用の理論です。

**定義 1.2** ([Ko3]). リー群  $G$  の複素多様体  $X$  への正則な作用が強可視的であるとは、次の 2 条件を満たすときをいう。

- $X$  の実部分多様体  $S$  が存在して、 $X' := G \cdot S$  が  $X$  の開集合である。
- $X'$  上の反正則微分同相写像  $\sigma$  が存在して、 $\sigma|_S = \text{id}_S$  及び  $\sigma(G \cdot x) \subset G \cdot x \ (\forall x \in X')$  が成り立つ。

**定義 1.3** ([Ko3]). 上の 2 条件が満たされるとき、 $G$  の  $X$  への作用は  $S$ -可視的であるという。この用語は  $S$  が実部分多様体でなく単に  $X$  の部分集合である場合にも用いる。

氏はこの理論を、リー群の無重複表現の統一的な扱いを目的として導入しました。無重複表現に対しこれまでどのような研究が成されているか、可視的作用の理論によって何が分かっているかということについては、[He]、[HW]、[Li]、[St1]、[St2]、[VK]、[Wo]、[Ko1, Ko2, Ko3, Ko4, Ko5, Ko6, Ko7] や [Sa1, Sa2] 等を参照して下さい。可視的作用の研究において「新しい無重複定理の発見」、「既知の無重複表現の幾何学的 (統一的) 構成」、「可視的作用の分類」等が行われていますが、今回の主題は構成と分類です。可視的作用による無重複表現の構成は次の無重複性の伝播定理によって成されます。

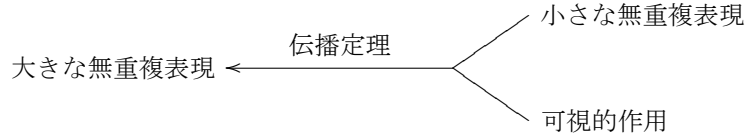
\*この研究は日本学術振興会特別研究員奨励費 (24-6877) と数物フロンティア・リーディング大学院からの助成を受けています。

†東京大学大学院数理科学研究科 [yuichiro@ms.u-tokyo.ac.jp](mailto:yuichiro@ms.u-tokyo.ac.jp)

**事実 1.4** ([Ko4]).  $G$  をリー群、 $\mathcal{W}$  を連結複素多様体  $X$  上の  $G$  同変な正則エルミートベクトル束とする。また、 $V$  を  $G$  のユニタリ表現とする。このとき、もし以下に挙げる (0) から (3) までの 4 つの条件が満たされるならば、 $V$  は  $G$  の表現として無重複である。

- (0)  $V$  から正則切断の空間  $\mathcal{O}(X, \mathcal{W})$  への連続な  $G$ -埋め込みが存在する。
- (1)  $G$  の  $X$  への作用は  $S$ -可視的である。即ち、ある  $X$  の部分集合  $S$  及び開部分集合  $X' = G \cdot S$  の反正則微分同相写像  $\sigma$  が存在して、定義 1.2 の条件を満たす。さらに、 $G$  の自己同型写像  $\tilde{\sigma}$  が存在して、 $\sigma(g \cdot x) = \tilde{\sigma}(g) \cdot \sigma(x)$  が  $g \in G$  と  $x \in X'$  に対して成立する。
- (2)  $x \in S$  に対し、ファイバー  $\mathcal{W}_x$  は固定化部分群  $G_x$  のユニタリ表現として無重複に分解する。 $\mathcal{W}_x = \bigoplus_{1 \leq i \leq n(x)} \mathcal{W}_x^{(i)}$  を既約分解とする。
- (3)  $\sigma$  はバンドル  $\mathcal{W}$  の反正則な endomorphism に持ち上がり、 $\sigma(\mathcal{W}_x^{(i)}) = \mathcal{W}_x^{(i)}$  ( $1 \leq i \leq n(x)$ ) が  $x \in S$  について成り立つ。

この定理によって、大域切断の空間  $\mathcal{O}(X, \mathcal{W})$  という大きな表現の無重複性が、可視的作用を通じ、ファイバー  $\mathcal{W}_x$  という小さな表現の無重複性に帰着されます。



上の小さな無重複表現のことを、「無重複表現の元になるもの」という意味を込めて“seed”と呼ぶことにします。伝播定理から、次のような問いが浮かびます。

$V$  をリー群  $G$  のユニタリ表現とする。 $V$  を与えるような“seed”と可視的作用との組を求めよ。

この問いの特別な場合として、次の問題を考えます。

**問題 1.5.** コンパクトリー群  $G$  の全ての無重複テンソル積表現  $V_1 \otimes V_2$  に対し、 $V_1 \otimes V_2$  を与えるような“seed”と可視的作用との組を求めよ。

この問題の  $G = U(n)$  の場合は、小林氏によって以下に説明するような形で解かれています。

### 1.3 先行結果：ユニタリ群の場合

小林氏は [Ko5] において、A 型の一般旗多様体への可視的作用の分類を行いました：

$G = U(n)$  とその 2 つの Levi 部分群  $L_1 = U(n_1) \times \cdots \times U(n_k)$  と  $L_2 = U(m_1) \times \cdots \times U(m_l)$  に対し、次の 3 つの同値な条件の内少なくとも 1 つ（従って全て）を満たす 3 つ組  $(G, L_1, L_2)$  は、 $L_1$  と  $L_2$  の入れ替えを除き Table 1 にあるものに限る。

- $L_1 \curvearrowright G/L_2$  は強可視的
- $L_2 \curvearrowright G/L_1$  は強可視的
- $\Delta(G) \curvearrowright (G \times G)/(L_1 \times L_2)$  は強可視的

ただし、 $\Delta(G) := \{(x, y) \in G \times G : x = y\}$  とする。

Table 1: A 型の一般旗多様体への可視的作用の分類

| $G$    | $L_1$                           | $L_2$                                            |
|--------|---------------------------------|--------------------------------------------------|
| $U(n)$ | $U(n)$ または $U(1) \times U(n-1)$ | 任意の Levi 部分群                                     |
|        | $U(p) \times U(n-p)$            | $U(n_1) \times U(n_2) \times U(n - (n_1 + n_2))$ |

ただし、最後の行では  $\min\{p, n-p\} \leq 2$  または  $\min\{n_1, n_2, n - (n_1 + n_2)\} \leq 1$  の少なくとも一方が成り立つものとする。

Table 1 から得られる可視的作用と以下に挙げる“seed”とを伝播定理を用いて組み合わせることで、 $U(n)$  の全ての無重複テンソル積表現が [Ko2] において構成されました。

- 1次元表現
- 対称テンソル積表現  $S^i \mathbb{C}^n$  または外積表現  $\Lambda^i \mathbb{C}^n$  の極大トーラスへの制限
- 最高ウェイト  $2\varpi_i$  に対応する  $U(n)$  の既約表現の、 $U(n_1) \times U(n_2) \times U(n - (n_1 + n_2))$  への制限

ただし、 $\varpi_i$  ( $1 \leq i \leq n-1$ ) は  $U(n)$  の基本ウェイトとします。[Ko2] において構成された表現が  $U(n)$  の全ての無重複テンソル積表現を尽くすことは、J.R. Stembridge 氏が Littelwood–Richardson 係数の組み合わせ論を用いた評価を行うことで証明した、 $GL(n, \mathbb{C})$  の (有限次元) 無重複テンソル積表現の分類定理から従います [St1]。本稿では、無重複テンソル積表現の構成を、B 型及び D 型に対して行います。次節以降で用いるため、ここで Stembridge 氏による B 型と D 型の無重複テンソル積表現の分類を与えておきます。Dynkin 図形のラベル付けは Figure 1 の通りとし、 $\{\omega_i\}_{1 \leq i \leq n}$  で基本ウェイトの集合を表すことにします。

**事実 1.6** ([St2]).  $G = Spin(2n+1)$  とし、 $\lambda_1, \lambda_2$  をそれぞれ  $G$  の既約表現  $V_{\lambda_1}, V_{\lambda_2}$  の最高ウェイトとする。このときテンソル積表現  $V_{\lambda_1} \otimes V_{\lambda_2}$  が無重複になるのは、以下の 4 つの条件 (i), (ii), (iii) または (iv) の内少なくとも 1 つが満たされるときに限る (ただし、 $\lambda_1$  と  $\lambda_2$  の入れ替えを除く)。

- (i).  $(\lambda_1, \lambda_2) = (t\omega_n, s\omega_n)$  または  $(t\omega_1, s\omega_j)$ 。ただし  $1 \leq j \leq n$  かつ  $s, t \in \mathbb{N}$ 。
- (ii).  $\lambda_1 = 0, \omega_1$  または  $\omega_n$ ;  $\lambda_2$  は任意。
- (iii).  $\lambda_1 = \omega_i$  または  $2\omega_n$ ;  $\lambda_2 = t\omega_j$ 。ただし  $1 \leq i, j \leq n$  かつ  $t \in \mathbb{N}$ 。
- (iv).  $\lambda_1 = \omega_n + t\omega_j$ ;  $\lambda_2 = s\omega_1$ 。ただし  $1 \leq j \leq n$  かつ  $s, t \in \mathbb{N}$ 。

**事実 1.7** ([St2]).  $G = Spin(2n)$  とする。テンソル積表現  $V_{\lambda_1} \otimes V_{\lambda_2}$  が無重複になるのは以下の 3 つの条件 (i'), (ii') または (iii') の内少なくとも 1 つが満たされるときに限る (ただし、 $\lambda_1$  と  $\lambda_2$  の入れ替えを除く)。

- (i').  $(\lambda_1, \lambda_2) = (s\omega_1, t\omega_{n+1-\epsilon} + u\omega_j)$ 。ただし  $\epsilon = 1$  または  $2$  かつ、 $s, t, u \in \mathbb{N}$ 。  
 $\lambda_1 = s\omega_{n+1-\epsilon}$ ;  $\lambda_2 = t\omega_3, t\omega_1 + u\omega_2, t\omega_{n-1} + u\omega_1, t\omega_n + u\omega_1$  または  $t\omega_{n-1} + u\omega_n$ 。ただし  $\epsilon = 1$  または  $2$  かつ、 $s, t, u \in \mathbb{N}$ 。もしくは  
 $\lambda_1 = s\omega_{5-\epsilon}$  かつ  $\lambda_2 = t\omega_{2+\epsilon} + u\omega_2$ 。ただし  $n = 4$  かつ  $\epsilon = 1$  または  $2$ 。
- (ii').  $\lambda_1 = 0, \omega_1, \omega_{n-1}$  または  $\omega_n$ ;  $\lambda_2$  は任意。
- (iii').  $(\lambda_1, \lambda_2) = (\kappa\omega_i, t\omega_j)$ 。ただし  $t \in \mathbb{N}$  であり、 $\kappa, i, j$  は以下の 3 つの条件の内少なくとも 1 つを満たす。
  - (iii')-1.  $\kappa = 1, 1 \leq i, j \leq n-2$  かつ  $i+j \leq n$ 。
  - (iii')-2.  $\kappa = 1, 1 \leq i \leq n-2$  かつ、 $j = n-1$  または  $n$ 。
  - (iii')-3.  $\kappa = 2, i = n-1$  または  $n$  かつ、 $1 \leq j \leq n-2$ 。



Figure 1: Dynkin 図形

## 1.4 主結果の紹介

小池–寺田両氏による指標公式と岡田氏による分岐則の公式を用いることによって次の命題が得られます。この命題にある表現が、B 型と D 型の無重複テンソル積表現の “seed” となります。

**命題 1.8.** 以下が成り立つ。

- (a) 1次元表現は無重複である。
- (b) 自明表現、 $SO(N)$  の自然表現  $\mathbb{C}^N$ 、 $Spin(N)$  のスピンの表現  $\text{Spin}_N$  はウェイト無重複 (つまり、極大トーラスの表現と見なしたときに無重複) である。

(c) 以下に挙げる条件 (c-o) または (c-e) の下で、 $SO(N)$  の外積表現  $\Lambda^i(\mathbb{C}^N)$  はレビ部分群  $U(j) \times SO(N-2j)$  の表現として無重複である (ただし、 $N = 2n$  かつ  $i = n$  のときは、 $\Lambda^n(\mathbb{C}^{2n})$  の代わりにその  $SO(2n)$ -既約な部分表現を考える)。

(c-o)  $N$  は奇数である。

(c-e)  $N$  は偶数であり、さらに以下の 3 つの条件の内少なくとも 1 つが成立する。

(c-e-1)  $i + j \leq N/2$ 。

(c-e-2)  $j = N/2$ 。

(c-e-3)  $i = N/2$ 。

(d)  $\mathbb{T} \times Spin(N)$  の表現  $(\chi_{t+1/2} \otimes Spin_N)$  は  $M_0 \simeq \{\pm 1\} \times Spin(N-2)$  の表現として無重複である ( $M_0$  の定義は次節の (2.1) 参照)。ただし  $N$  は奇数、 $t$  は整数で、 $\chi_{t+1/2}$  は 1 次元トーラス  $\mathbb{T}$  のウェイトを  $t + \frac{1}{2}$  とする 1 次元指標である。

命題について、(a) は自明、(b) は自然表現とスピンの表現のウェイト分解が無重複であることから従います。残る (c) と (d) の証明は次節で行います。他方、[Ta1, Ta2] より、B 型及び D 型の一般旗多様体に対する可視的作用の分類は Table 2 のようになります。即ち、Table 2 は、3 つの群作用  $L_1 \curvearrowright G/L_2$ 、 $L_2 \curvearrowright G/L_1$ 、 $\Delta(G) \curvearrowright (G \times G)/(L_1 \times L_2)$  が全て強可視的になるような  $(G, L_1, L_2)$  の分類です。

| Table 2: B 型と D 型の一般旗多様体への可視的作用の分類 |                                |                                                                                                                                             |
|------------------------------------|--------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $G$                                | $L_1$                          | $L_2$                                                                                                                                       |
| $SO(N)$                            | $SO(N)$                        | 任意のレビ部分群                                                                                                                                    |
|                                    | $U(j) \times SO(N-2j)$         | $U(1) \times SO(2N-2)$                                                                                                                      |
|                                    | $U([N/2])$ または $\xi(U([N/2]))$ | $U([N/2])$ または $\xi(U([N/2]))$                                                                                                              |
| $SO(2n)$                           | $U(1) \times SO(2n-2)$         | $U(j) \times U(n-j)$<br>$\xi(U(j) \times U(n-j))$                                                                                           |
|                                    | $U(n)$ または $\xi(U(n))$         | $U(1) \times U(n-1)$<br>$\xi(U(1) \times U(n-1))$<br>$U(1) \times U(1) \times SO(2n-4)$<br>$U(2) \times SO(2n-4)$<br>$U(3) \times SO(2n-6)$ |
|                                    |                                | $\xi(U(2) \times U(2))$                                                                                                                     |
|                                    | $U(4)$                         | $\xi(U(2) \times U(2))$                                                                                                                     |
|                                    | $\xi(U(4))$                    | $U(2) \times U(2)$                                                                                                                          |

ただし  $\xi$  は  $\alpha_{n-1}$  と  $\alpha_n$  の入れ替えに対応する  $D_n$  型群の自己同型で、 $j$  は  $j \leq n$ ,  $[N/2]$  を満たす非負整数。

伝播定理によって Table 2 から得られる可視的作用と命題 1.8 にある無重複表現 (“seed”) とを組み合わせることで、次の主結果を得ます。

**定理 1.9** (定理 1.1). テンソル積表現  $V_{\lambda_1} \otimes V_{\lambda_2}$  が無重複となるような  $G = Spin(N)$  の既約表現の組  $(V_{\lambda_1}, V_{\lambda_2})$  は、下の Table 3 にある可視的作用  $\Delta(G) \curvearrowright (G \times G)/(L_{\lambda_1} \times L_{\lambda_2})$  と seed  $W_i$  ( $L_i$  の表現、 $i = 1, 2$ ) とから構成される。その対応は、 $V_{\lambda_i} = \mathcal{O}(G/L_i, G \times_{L_i} W_i)$  (正則切断の空間) で与えられる。ただし、 $\lambda_i$  は  $G$  の既約表現  $V_{\lambda_i}$  の最高ウェイトである ( $i = 1, 2$ )。

定理 1.9 で述べられている構成で全ての無重複テンソル積表現が尽くされることは、Stembridge 氏による分類定理から従います [St2]。同氏は A 型、B 型や D 型のみならず全ての複素単純リー環に対して (有限次元) 無重複テンソル積表現の分類を与えており、その証明は Littelwood–Richardson 係数や Brauer–Klimyk 則等、組み合わせ的な手法によります。

## 2 “Seed”の無重複性

この節では命題 1.8(c) と (d) を示します。

### 2.1 命題 1.8(d) の証明

まず、 $M_0$  を定義します。 $N = 2k+1$  とします。 $Spin(2) \times Spin(2k-1)$  を、 $G = Spin(2k+1)$  の部分群であって、そのルートの系が  $\{\alpha_i\}_{2 \leq i \leq k}$  で生成されるようなものとします。また、 $\mathbb{T}$  を、直積群  $Spin(2) \times Spin(2k-1)$

Table 3: 可視的作用と seed

| $(\lambda_1, \lambda_2)$ | $(L_1, L_2)$                     | $W_1$                                             | $W_2$  | $M^*$           |
|--------------------------|----------------------------------|---------------------------------------------------|--------|-----------------|
| (i) または (i') にある組        | $(L_{\lambda_1}, L_{\lambda_2})$ | 1 次元表現                                            | 1 次元表現 | $\{e\}$         |
| (ii) または (ii') にある組      | $(G, T)$                         | 自明表現、 $\mathbb{C}^N$ または $\text{Spin}_N$          | 1 次元表現 | $T$             |
| (iii) または (iii') にある組    | $(G, L_{\lambda_2})$             | $\Lambda^i(\mathbb{C}^N)$                         | 1 次元表現 | $L_{\lambda_2}$ |
| (iv) にある組                | $(L_{\omega_j}, L_{\lambda_2})$  | $\chi_{t+\frac{1}{2}} \otimes \text{Spin}_{N-2j}$ | 1 次元表現 | (2.1) の $M_0$   |

Table 3 に関するいくつかの注意

- $(\lambda_1, \lambda_2)$  の列にあるローマ数字は事実 1.6 と事実 1.7 にあるローマ数字に対応する。
- $L_\lambda$  はそのルート系が  $\{\alpha_i : m_i = 0 \text{ for } \lambda = \sum_{1 \leq j \leq [\frac{N}{2}]} m_j \omega_j\}$  で生成される  $G$  のレビ部分群であり、 $T$  は  $G$  の極大トーラスである。
- $N = 2n$  かつ  $i = n$  のときは、 $W_1$  の列の  $\Lambda^i(\mathbb{C}^N)$  をその  $SO(N)$ -既約な部分表現で置き換える。
- $W_2$  の列の一番下について、 $\chi_{t+1/2}$  は  $L_{\omega_j}$  のウェイトを  $t + \frac{1}{2}$  とする 1 次元表現、 $\text{Spin}_{N-2j}$  は  $L_{\omega_j}$  の  $B$  型の正規部分群のスピン表現である。
- $M^*$  は次のような性質を持つ。
  - (1)  $\Delta(M^*)$  は強可視的作用  $\Delta(G) \curvearrowright (G \times G)/(L_1 \times L_2)$  の生成的な点での固定化部分群に含まれる。
  - (2)  $W_1 \otimes W_2$  は  $\Delta(M^*)$  の表現として無重複である。

の第 1 成分  $\text{Spin}(2)$  のコピーとします。このとき、 $M_0$  を  $\mathbb{T} \times (\text{Spin}(2) \times \text{Spin}(2k-1)) \subset \mathbb{T} \times \text{Spin}(2k+1)$  の部分群として次のように定義します。

$$M_0 := \Delta(\{\exp(\sqrt{-1}m\pi H_1)\}_{m=1,2}) \times \text{Spin}(2k-1) \quad (2.1)$$

ただし、 $\{H_i\}_{1 \leq i \leq k}$  は  $\{\omega_i\}_{1 \leq i \leq k}$  の双対基底です。それでは  $\mathbb{T} \times \text{Spin}(2k+1)$  の表現  $\chi_{t+\frac{1}{2}} \otimes \text{Spin}_{2k+1}$  の  $M_0$  への制限を考えます。簡単のため  $\{\pm 1\}$  によって  $\Delta(\{\exp(\sqrt{-1}m\pi H_1)\}_{m=1,2})$  を表し、 $\text{triv.}\{\pm 1\}$  と  $\text{non-triv.}\{\pm 1\}$  によってそれぞれ  $\{\pm 1\}$  の自明な表現と非自明な表現を表すことにすると、 $\chi_{t+\frac{1}{2}} \otimes \text{Spin}_{2k+1}$  の  $M_0$  への制限は次のようになります。

$$\chi_{t+\frac{1}{2}} \otimes \text{Spin}_{2k+1} = \text{triv.}\{\pm 1\} \otimes \text{Spin}_{2k-1} \oplus \text{non-triv.}\{\pm 1\} \otimes \text{Spin}_{2k-1} \quad (2.2)$$

これは無重複になっているので、命題 1.8(d) が示されました。

## 2.2 命題 1.8(c) の証明

$L$  によって  $SO(N)$  のレビ部分群  $U(j) \times SO(N-2j)$  を表すこととします。ただし  $U([\frac{N}{2}])$  と書いたときは、ルート系が  $\{\alpha_i\}_{1 \leq i \leq n-1}$  で生成されている方を表すものとします (D 型のときは 2 種類あるので)。  $i < \frac{N}{2}$

または  $N$  が奇数のとき、 $SO(N)$  の外積表現  $\Lambda^i \mathbb{C}^N$  の最高ウェイトを  $(\overbrace{1, \dots, 1}^i, 0, \dots, 0)$  と書き、 $N$  が偶数かつ  $i = \frac{N}{2}$  のとき、 $\Lambda^i \mathbb{C}^N$  の 2 つの  $SO(N)$ -既約な部分表現の最高ウェイトを  $(1, \dots, 1, 1)$ ,  $(1, \dots, 1, -1)$  と書きます。簡単のため、最高ウェイト  $\lambda$  とそれに対応する既約表現  $V_\lambda$  を同一視し、 $\lambda_G$  によって  $\lambda$  が群  $G$  の表現であることを表すことにします。以下では、 $\lambda = (\overbrace{1, \dots, 1}^i, 0, \dots, 0)$  または  $(1, \dots, 1, -1)$  に対し、 $\lambda_{SO(N)}$  の  $L$  への制限が無重複になることを示します。

### 2.2.1 $N$ が偶数、 $j = \frac{N}{2}$ かつ $i < \frac{N}{2}$ のとき

このとき、 $\lambda = (\overbrace{1, \dots, 1}^i, 0, \dots, 0)_{SO(N)}$  の  $L$  への制限が無重複になることは [KT, Theorem A.1] から分かります。

### 2.2.2 $N$ が偶数で $\lambda = (1, \dots, 1, \pm 1)$ のとき

このとき、 $\lambda = (1, \dots, 1, \pm 1)_{SO(N)}$  の  $L$  への制限が無重複になることは、[Ok, Theorem 2.2]、[KT, Theorem A.1] と [Ok, Theorem 2.3] とから分かります。

### 2.2.3 $N = 2n + 1$ のとき

記号について： $a \leq b$  であってかつ  $a$  と  $b$  のパリティが一致するとき、 $a \leq, \equiv b$  と書くことにします。例えば、 $2 \leq, \equiv 4$  は成り立ちますが  $2 \leq, \equiv 3$  は成り立ちません。また、 $\lambda$  の長さが負になる場合は、 $V_\lambda = \{0\}$  と考えます。

**命題 2.1.**  $i$  と  $j$  を  $1 \leq i, j \leq n$  なる整数とすると、次が成り立つ。

$$\begin{aligned} & \overbrace{(1, \dots, 1, 0, \dots, 0)}^i_{SO(2n+1)} \downarrow_{U(j) \times SO(2n-2j+1)} = \\ & \sum_{\substack{0 \leq s \leq i, \\ \xi + \eta \leq, \equiv \min\{i-s, s''\}}} \overbrace{(1, \dots, 1, 0, \dots, 0, -1, \dots, -1)}^{\xi}_{U(j)} \otimes \overbrace{(1, \dots, 1, 0, \dots, 0)}^{\eta}_{SO(2n-2j+1)} \end{aligned} \quad (2.3)$$

ただし上で  $s' = 2n - 2j + 1 - s$ 、 $s'' = 2j - i + s$  とした。

$\xi + \eta$  のパリティに注目することで、上の和が無重複であることが分かります。

*Proof.* [KT, Theorem 2.5] より、

$$\begin{aligned} & \overbrace{(1, \dots, 1, 0, \dots, 0)}^i_{SO(2n+1)} = \\ & \sum_{0 \leq s \leq n-j, 0 \leq i-s \leq j} \overbrace{(1, \dots, 1, 0, \dots, 0)}^{i-s}_{SO(2j)} \otimes \overbrace{(1, \dots, 1, 0, \dots, 0)}^s_{SO(2n-2j+1)} \\ & \quad + (1, \dots, 1, -1)_{SO(2j)} \otimes \overbrace{(1, \dots, 1, 0, \dots, 0)}^{i-j}_{SO(2n-2j+1)} \\ & + \sum_{n-j < s, 0 \leq i-s \leq j} \overbrace{(1, \dots, 1, 0, \dots, 0)}^{i-s}_{SO(2j)} \otimes \overbrace{(1, \dots, 1, 0, \dots, 0)}^{2(n-j)+1-s}_{SO(2n-2j+1)} \\ & + \sum_{0 \leq s \leq n-j, j < i-s} \overbrace{(1, \dots, 1, 0, \dots, 0)}^{2j-i+s}_{SO(2j)} \otimes \overbrace{(1, \dots, 1, 0, \dots, 0)}^s_{SO(2n-2j+1)} \\ & = \sum_{0 \leq s \leq i} \overbrace{(1, \dots, 1, 0, \dots, 0)}^{\min\{i-s, s''\}}_{SO(2j)} \otimes \overbrace{(1, \dots, 1, 0, \dots, 0)}^{\min\{s, s'\}}_{SO(2n-2j+1)} \\ & \quad + (1, \dots, 1, -1)_{SO(2j)} \otimes \overbrace{(1, \dots, 1, 0, \dots, 0)}^{i-j}_{SO(2n-2j+1)} \end{aligned} \quad (2.4)$$

を得ます。ただし上で  $s' = 2(n-j) + 1 - s$ 、 $s'' = 2j - i + s$  とおきました。他方 [KT, Theorem A.1] より、 $1 \leq k < j$  に対して

$$\overbrace{(1, \dots, 1, 0, \dots, 0)}^k_{SO(2j)} = \sum_{\xi + \eta \leq, \equiv k} \overbrace{(1, \dots, 1, 0, \dots, 0, -1, \dots, -1)}^{\xi}_{U(j)} \quad (2.5)$$

となります。また、やはり [KT, Theorem A.1] から

$$(1, \dots, 1)_{SO(2j)} + (1, \dots, 1, -1)_{SO(2j)} = \sum_{\xi + \eta \leq, \equiv j} \overbrace{(1, \dots, 1, 0, \dots, 0, -1, \dots, -1)}^{\xi}_{U(j)} \quad (2.6)$$

を得ます。(2.4)、(2.5)、(2.6) を組み合わせると

$$\begin{aligned}
& \overbrace{(1, \dots, 1, 0, \dots, 0)}^i_{SO(2n+1)} \downarrow_{U(j) \times SO(2n-2j+1)} = \\
& \sum_{\substack{0 \leq s \leq i, \\ i-s \neq j, \\ \xi + \eta \leq \min\{i-s, s'\}}} \overbrace{(1, \dots, 1, 0, \dots, 0, -1, \dots, -1)}^{\xi}_{U(j)} \otimes \overbrace{(1, \dots, 1, 0, \dots, 0)}^{\min\{s, s'\}}_{SO(2n-2j+1)} \\
& + \sum_{\xi + \eta \leq j} \overbrace{(1, \dots, 1, 0, \dots, 0, -1, \dots, -1)}^{\xi}_{U(j)} \otimes \overbrace{(1, \dots, 1, 0, \dots, 0)}^{i-j}_{SO(2n-2j+1)}
\end{aligned} \tag{2.7}$$

が得られます。これを整理すると

$$\sum_{\substack{0 \leq s \leq i, \\ \xi + \eta \leq \min\{i-s, s'\}}} \overbrace{(1, \dots, 1, 0, \dots, 0, -1, \dots, -1)}^{\xi}_{U(j)} \otimes \overbrace{(1, \dots, 1, 0, \dots, 0)}^{\min\{s, s'\}}_{SO(2n-2j+1)} \tag{2.8}$$

となるので、示されました。  $\square$

## 2.2.4 $N = 2n$ で $i + j \leq n$ のとき

**命題 2.2.**  $i$  と  $j$  を  $i + j \leq n$  を満たす整数とすると、次が成り立つ。

$$\begin{aligned}
& \overbrace{(1, \dots, 1, 0, \dots, 0)}^i_{SO(2n)} \downarrow_{U(j) \times SO(2n-2j)} \\
& = \sum_{\substack{0 \leq s \leq i, \\ \xi + \eta \leq \min\{i-s, s'\}}} \overbrace{(1, \dots, 1, 0, \dots, 0, -1, \dots, -1)}^{\xi}_{U(j)} \otimes \overbrace{(1, \dots, 1, 0, \dots, 0)}^s_{SO(2n-2j)} \\
& \quad + \delta_{i+j, n} \cdot (0, \dots, 0)_{U(j)} \otimes (1, \dots, 1, -1)_{SO(2n-2j)}
\end{aligned} \tag{2.9}$$

ただし上で、 $i + j = n$  ならば  $\delta_{i+j, n} = 1$ 、そうでなければ  $\delta_{i+j, n} = 0$  とする。また、 $s' = 2j - i + s$  とおいた。

$SO(2n-2j)$  の最高ウェイトに重複が無いので、和は無重複です。

*Proof.* 証明は先ほどと同様なので省略します。  $\square$

これで命題 1.8 の証明は終わりです。

## 3 主結果の証明

Table 2 から得られる強可視的作用と命題 1.8 (無重複表現の “seed”) とを伝播定理によって組み合わせることで主結果を示します。事実 1.6 と 1.7 の (i), (i'), (ii), (ii'), (iii), (iii') 及び (iv) に属する組  $(\lambda_1, \lambda_2)$  に対して伝播定理を用いて無重複性を示していきますが、

- Borel–Weil 理論により、伝播定理の条件 (0) は満たされる。また、
- $\sigma$  として Chevalley–Weyl 対合を用いることで、条件 (3) も満たされる

ということに注意すると、確かめるべきことは条件 (1) 「底空間の可視性」と条件 (2) 「ファイバーの無重複性」の 2 つになります。以下では、これら 2 つの条件が成立することを見ていきます。

記号について:  $G, L_{\lambda_i} (i = 1, 2), T, \omega_j (1 \leq j \leq n)$  は定理 1.9 と Table 3 の通りとします。また、 $\alpha_i (1 \leq i \leq n)$  は Dynkin 図形 Figure 1 のラベル付けに従います。

### 3.1 $(\lambda_1, \lambda_2)$ が (i) または (i') に属すときに $V_{\lambda_1} \otimes V_{\lambda_2}$ が無重複となること

Borel–Weil 理論より、テンソル積表現  $V_{\lambda_1} \otimes V_{\lambda_2}$  は  $\mathcal{O}(G/L_{\lambda_1}, G \times_{L_{\lambda_1}} \chi_{\lambda_1}) \otimes \mathcal{O}(G/L_{\lambda_2}, G \times_{L_{\lambda_2}} \chi_{\lambda_2})$  というように、ユニタリ指標  $\chi_{\lambda_1}$  と  $\chi_{\lambda_2}$  とを用いて表すことができます。Table 2 を参照すると、 $(\lambda_1, \lambda_2)$  が (i) または (i') に属すときは  $\Delta(G)$  の  $(G \times G)/(L_{\lambda_1} \times L_{\lambda_2})$  への自然な作用が強可視的であることが分かります。すると、ファイバーが 1 次元 (命題 1.8(a)) であることから  $\mathcal{O}(G/L_{\lambda_1}, G \times_{L_{\lambda_1}} \chi_{\lambda_1}) \otimes \mathcal{O}(G/L_{\lambda_2}, G \times_{L_{\lambda_2}} \chi_{\lambda_2})$  に伝播定理が適用できて、 $V_{\lambda_1} \otimes V_{\lambda_2}$  が無重複であることが分かります。

### 3.2 $(\lambda_1, \lambda_2)$ が (ii) または (ii') に属すときに $V_{\lambda_1} \otimes V_{\lambda_2}$ が無重複となること

Borel–Weil 理論によって、 $V_{\lambda_1} \otimes V_{\lambda_2}$  は  $\mathcal{O}(G/G, G \times_G V_{\lambda_1}) \otimes \mathcal{O}(G/T, G \times_T \chi_{\lambda_2})$  と表すことができます。 $\Delta(G)$  の  $(G \times G)/(G \times T)$  への自然な作用は推移的であることから、この作用が強可視的であることが分かります。また、ファイバー  $V_{\lambda_1} \otimes \chi_{\lambda_2}$  を固定化部分群  $\Delta(T)$  の表現と見なしたときに無重複であることは命題 1.8(b) から分かります。ゆえに、伝播定理が適用できて  $V_{\lambda_1} \otimes V_{\lambda_2}$  の無重複性が従います。

### 3.3 $(\lambda_1, \lambda_2)$ が (iii) または (iii') に属すときに $V_{\lambda_1} \otimes V_{\lambda_2}$ が無重複となること

Borel–Weil によって、テンソル積表現  $V_{\lambda_1} \otimes V_{\lambda_2}$  は  $\mathcal{O}(G/G, G \times_G V_{\lambda_1}) \otimes \mathcal{O}(G/L_{\lambda_2}, G \times_{L_{\lambda_2}} \chi_{\lambda_2})$  と表すことができます。このとき、 $\Delta(G)$  の  $(G \times G)/(G \times L_{\lambda_2})$  への自然な作用は推移的、よって強可視的になります。また、ファイバー  $V_{\lambda_1} \otimes \chi_{\lambda_2}$  を固定化部分群  $\Delta(L_{\lambda_2})$  の表現と見たときに無重複となることは、命題 1.8(c) より従います。よって、伝播定理が適用できて  $V_{\lambda_1} \otimes V_{\lambda_2}$  が無重複となることが分かります。

### 3.4 $(\lambda_1, \lambda_2)$ が (iv) に属すときに $V_{\lambda_1} \otimes V_{\lambda_2}$ が無重複となること

$(\lambda_1, \lambda_2)$  が (iv) に属すときは、Borel–Weil 理論によって  $V_{\lambda_1} \otimes V_{\lambda_2}$  を  $\mathcal{O}(G/L_{\omega_j}, G \times_{L_{\omega_j}} (\chi_{t+1/2} \otimes \text{Spin}_{2(n-j)+1})) \otimes \mathcal{O}(G/L_{\lambda_2}, G \times_{L_{\lambda_2}} \chi_{\lambda_2})$  と表すことができます。ただし、 $\chi_{t+1/2}$  は  $L_{\omega_j}$  のウェイトを  $t + \frac{1}{2}$  とするユニタリ指標です。Table 2 より、 $\Delta(G)$  の  $(G \times G)/(L_{\omega_j} \times L_{\lambda_2})$  への自然な作用が強可視的になることが分かります。また、[Ta1] より、この強可視的作用のスライス  $S$  を  $B \times \{\mathbf{o}\}$  と取ることができます。ただし、 $B$  は次のように与えられます。

$$B := \exp \left( \mathbb{R} Z_{\sum_{k=1}^j \alpha_k} + \mathbb{R} Z_{(\sum_{k=1}^j \alpha_k + 2 \sum_{k=j+1}^n \alpha_k)} \right) \cdot \exp \left( \mathbb{R} Z_{(\sum_{k=1}^j \alpha_k + 2 \sum_{k=j}^n \alpha_k)} \right) \quad (3.1)$$

上で  $Z_\alpha = X_\alpha + \theta X_\alpha$  とおきました。ただし  $X_\alpha$  はルート  $\alpha$  に対応する  $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$  の零でないルートベクトルで、 $\theta$  は  $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$  の  $\mathfrak{g}$  に関する複素共役 (即ちカルタン対合) です。直接計算により、以下に挙げる  $(L_{\lambda_2} \cap L_{\omega_j})$  の部分群が  $B$  と可換であることが分かります。

$$\begin{aligned} M_0 &:= \{ \exp(\sqrt{-1} m \pi H_{j+1}) \}_{m=1,2} \times \text{Spin}(2(n-j)-1) \\ &\subset (Z(L_{\omega_j})^0 \times \text{Spin}(2)) \times \text{Spin}(2(n-j)-1) \end{aligned} \quad (3.2)$$

ただし  $Z(L_{\omega_j})^0$  は、 $L_{\omega_j}$  の中心の単位元を含む連結成分です。このとき、ファイバー  $(\chi_{t+1/2} \otimes \text{Spin}_{2N-2j+1})$  を  $\Delta(M_0)$  の表現と見なすと、命題 1.8(d) より無重複であることが分かります。すると伝播定理が適用できて、 $V_{\lambda_1} \otimes V_{\lambda_2}$  は無重複になります。

Stembridge 氏による分類定理 (事実 1.6 と 1.7) により、以上で  $SO(N)$  及び  $\text{Spin}(N)$  の全ての無重複テンソル積表現に対して可視的作用の伴う一般旗多様体とファイバーの無重複表現 (“seed”) とを与えたことになります。

## 謝辞

講演の機会を与えてくださった世話人の小木曾先生と飯田先生に心より感謝申し上げます。

## References

- [He] S. HELGASON, Groups and geometric analysis. Integral geometry, invariant differential operators, and spherical functions. Corrected reprint of the 1984 original. Mathematical Surveys and Monographs, 83. American Mathematical Society, Providence, RI, 2000. xxii+667 pp. ISBN: 0-8218-2673-5.
- [HW] A. HUCKLEBERRY AND T. WURZBACHER, Multiplicity-free complex manifolds, Math. Ann., 286 (1990), 261–280.

- [Ko1] 小林俊行, Multiplicity free theorem in branching problems of unitary highest weight modules, 表現論シンポジウム 1997 報告集, (1998), 9–17.
- [Ko2] T. Kobayashi, Geometry of multiplicity-free representations of  $GL(n)$ , visible actions on flag varieties, and triunity, *Acta Appl. Math.*, **81**, (2004), 129–146.
- [Ko3] T. Kobayashi, Multiplicity-free representations and visible actions on complex manifolds, *Publ. Res. Inst. Math. Sci.*, **41**, (2005), 497–549, special issue commemorating the fortieth anniversary of the founding of RIMS.
- [Ko4] T. Kobayashi, Propagation of multiplicity-freeness property for holomorphic vector bundles, in: *Lie Groups: Structure, Actions, and Representations (In Honor of Joseph A. Wolf on the Occasion of his 75th Birthday)*, in: *Progr. Math.* vol.306, Birkhäuser, Boston, (2013), 113–140, arXiv:math.RT/0607004.
- [Ko5] T. Kobayashi, A generalized Cartan decomposition for the double coset space  $(U(n_1) \times U(n_2) \times U(n_3)) \backslash U(n) / (U(p) \times U(q))$ , *J. Math. Soc. Japan*, **59**, (2007), 669–691.
- [Ko6] T. Kobayashi, Visible actions on symmetric spaces, *Transform. Groups*, **12**, (2007), 671–694.
- [Ko7] T. Kobayashi, Multiplicity-free theorems of the restriction of unitary highest weight modules with respect to reductive symmetric pairs, in: *Representation Theory and Automorphic Forms*, *Progr. Math.*, Birkhäuser, Boston, (2007), 45–109, math. RT/0607002.
- [KT] K. Koike and I. Terada, Young Diagrammatic Methods for the Restriction of Representations of Complex Classical Lie Groups to Reductive Subgroups of Maximal Rank, *Adv. Math.*, **79**, (1990), 104–135.
- [Li] P. Littelmann, On spherical double cones, *J. Algebra*, **166**, (1994), 142–157.
- [Ok] S. OKADA, Applications of minor summation formulas to rectangular shaped representations of classical groups, *J. Algebra* **205** (1998), no. 2, 337–367.
- [Sa1] A. Sasaki, A characterization of non-tube type Hermitian symmetric spaces by visible actions, *Geom. Dedicata*, **145**, (2010), 151–158.
- [Sa2] A. Sasaki, Visible action on irreducible multiplicity-free spaces, *Int. Math. Res. Not. IMRN*, (2009), no. **18**, 3445–3466.
- [St1] J. R. Stembridge, Multiplicity-free products of Schur functions, *Ann. Comb.*, **5**, (2001), 113–121.
- [St2] J. R. Stembridge, Multiplicity-free products and restrictions of Weyl characters, *Represent. Theory*, **7**, (2003), 404–439 .
- [Ta1] Y. TANAKA, Visible actions on flag varieties of type B and a generalization of the Cartan decomposition, *Bull. Aust. Math. Soc.*, published online: 20 August 2012, pp1–17, doi:10.1017/S0004972712000615.
- [Ta2] Y. TANAKA, Visible actions on flag varieties of type D and a generalization of the Cartan decomposition, *J. Math. Soc. Japan* **65** no. 3 (2013), 931–965.
- [VK] E. VINBERG AND B. KIMEL’FEL’D, Homogeneous domains on flag manifolds and spherical subgroups of semisimple Lie groups, *Funct. Anal. Appl.*, 12 (1978), no. 3, 168–174.
- [Wo] J. A. Wolf, *Harmonic Analysis on Commutative Spaces*, *Mathematical Surveys and Monographs*, Amer. Math. Soc., (2007).