

局所関数等式, 超関数の保型対, ゼータ関数

佐藤文広 (立教大学理学部)

この講演では, 概均質ベクトル空間の既存の理論を越えようとする (互いに関係する) 2 つの試みを紹介する. その一つは概均質ベクトル空間の相対不変式とはならないような多項式に対する局所関数等式の存在についてであり, 二つ目は概均質ベクトル空間上の超関数の保型対とそれに付随するゼータ関数についてである. 第一の話題に登場する非概均質的な局所関数等式のある例に対し大域的なゼータ関数を構成することに第二の話題が利用されるという意味で, 両者は関係している. なお, この講演の内容は, 小木曾岳義, 田村敬太, 杉山和成, 宮崎直, 上野隆彦の各氏との共同研究に基づいている. また, §2 の最終節で簡単に触れた多変数の非概均質的な局所関数等式については, 伊師英之氏との議論に触発されたものである.

まず, 概均質ベクトル空間の標準的な理論の概略の紹介から始める.

1 概均質ベクトル空間のゼータ関数

1.1 Riemann ゼータ関数から概均質ベクトル空間のゼータ関数へ

概均質ベクトル空間のゼータ関数のもっとも簡単な例である Riemann ゼータ関数から始める. よく知られているように Riemann ゼータ関数は, Dirichlet 級数

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \quad (\Re(s) > 1)$$

によって定義される複素変数 s の関数で, $s = 1$ において 1 位の極を持つ以外は $\mathbb{C}$ 上で正則な関数に解析接続され, 関数等式

$$\pi^{-s/2} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s) = \pi^{(s-1)/2} \Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right) \zeta(1-s)$$

を満たす. その最も標準的な証明は, 積分表示

$$\begin{aligned} \pi^{-s/2} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s) &\stackrel{(a)}{=} \int_0^{\infty} t^{\frac{s}{2}-1} \frac{\vartheta(it) - 1}{2} dt \\ &\stackrel{(b)}{=} \frac{1}{s(s-1)} + \int_1^{\infty} \left(t^{\frac{s}{2}-1} + t^{\frac{1-s}{2}-1}\right) \frac{\vartheta(it) - 1}{2} dt \end{aligned}$$

に基づくもので, Riemann の第 2 証明としてよく知られている. ここで, $\vartheta(z)$ は Jacobi のテータ級数

$$\vartheta(z) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} e^{\pi i n^2 z}, \quad \operatorname{Im} z > 0$$

であり, 上の積分表示は

- ガンマ積分 $\int_0^\infty x^{s-1} e^{-\pi x^2} dx = \pi^{-s/2} \Gamma(s/2)$... 等号 (a) の部分
- テータ変換公式 $\vartheta\left(-\frac{1}{z}\right) = \sqrt{\frac{z}{i}} \vartheta(z)$... 等号 (b) の部分

という 2 つの等式を用いられる.

よく知られているように, テータ変換公式は $e^{-\pi x^2}$ という関数に Poisson の和公式を適用することにより証明するのだが, $e^{-\pi x^2}$ という関数を特別視せずに無限遠で急減少し Poisson の和公式が成立するような関数 $f(x)$ に対し,

$$Z(f, s) = \int_0^\infty t^{s-1} \sum_{n \in \mathbb{Z} - \{0\}} f(nt) dt$$

とおいてみると, この積分は

$$Z(f, s) = \zeta(s) \Phi(f, s), \quad \Phi(f, s) = \int_{\mathbb{R}^\times} |x|^{s-1} f(x) dx$$

と Riemann ゼータ関数の積分表示を与え, しかも, Poisson の和公式によって

$$Z(f^*, s) = Z(f, 1-s), \quad f^*(x) = \int_{\mathbb{R}} f(y) e^{2\pi i xy} dy$$

が成り立つことが示せる. Riemann ゼータ関数の関数等式を既知とすれば, これから,

$$\Phi(f^*, s) = \frac{\pi^{-s/2} \Gamma(s/2)}{\pi^{-(1-s)/2} \Gamma((1-s)/2)} \cdot \Phi(f, 1-s) \quad (1)$$

が導かれる. 逆にこの式が直接証明されれば Riemann ゼータ関数の関数等式が証明できることになる. この等式が, ゼータ関数の岩澤-Tate の理論における実素点での局所関数等式に他ならない.

Poisson の和公式は任意次元の実ベクトル空間上で成り立つから, 上の議論から類推すると, $\mathbb{Z}$ -係数の多項式 $P(x_1, \dots, x_n)$, $P^*(y_1, \dots, y_n)$ で局所関数等式

$$\int |P(x)|^{s-\kappa} f(x) dx = \gamma(s) \int |P^*(y)|^{-s} f^*(y) dy, \quad (2)$$

$f^* = f$ の Fourier 変換, $\gamma(s) = \text{ガンマ因子}$

を満たすようなものに対しては, 関数等式を満たすゼータ関数が定義できるのではないかと想像してもよいだろう. 概均質ベクトル空間の理論とは, このアイデアを見事に実現する理論である.

1.2 概均質ベクトル空間の定義

$\mathbb{C}$ 上の線型代数群 $\mathbf{G}$ の有限次元ベクトル空間 $\mathbf{V}$ の表現 ρ を考える. $\mathbf{V}$ を $\mathbf{G}$ の作用の下で軌道分解をすると, $\{0\}$ はつねに 1 つの軌道だから, $\mathbf{V}$ は “均質空間” ではありえない. そこで少し譲歩して, 「ほとんど均質である」 = 「概均質」ということを, 低次元の代数的集合を除いてやると均質である, すなわち,

代数的真部分集合 $\mathbf{S} \subset \mathbf{V}$ の補集合 $\Omega := \mathbf{V} - \mathbf{S}$ が $\mathbf{G}$ の単一の軌道となっていること

と定義する. この条件が満たされるとき $(\mathbf{G}, \rho, \mathbf{V})$ を概均質ベクトル空間といい, また $\mathbf{S}$ を特異集合という. ゼータ関数を考えるときには, さらに, $\mathbf{G}$, および, $\mathbf{G}$ の $\mathbf{V}$ への作用は $\mathbb{Q}$ 上定義されているものとする.

概均質ベクトル空間の例については, 5 頁の表に古典的ゼータ関数と結びつく典型的な例を挙げておく. それ以上の例については, 概均質ベクトル空間の分類を扱った [23] など参照のこと.

1.3 基本的な結果 (cf. [24])

1. (相対) 不変式が特異集合 $\mathbf{S}$ を見ることで決定できる: $(\mathbf{G}, \rho, \mathbf{V})$ に対し, ベクトル空間 $\mathbf{V}$ 上の有理関数 $P(x) \neq 0$ は, $\mathbf{G}$ の有理指標 χ があって

$$P(g \cdot x) = \chi(g)P(x) \quad (g \in \mathbf{G}, x \in \mathbf{V})$$

を満たすとき “相対不変式” と言われる. $(\mathbf{G}, \rho, \mathbf{V})$ の相対不変式は, $\mathbf{S}$ に含まれる既約超曲面の定義多項式の中積で尽くされる. また, 相対不変式 P は対応する指標 χ によって定数倍を除いて一意的に定まる.

簡単のため, 以下では, $\mathbf{G}$ は reductive とし, $\mathbf{S}$ が絶対既約超曲面の場合を考える. $\mathbf{V}^*$ を $\mathbf{V}$ の双対空間とすると, G は $\mathbf{V}^*$ に反傾表現 ρ^* によって自然に作用する. いまの仮定の下では $(\mathbf{G}, \rho^*, \mathbf{V}^*)$ も概均質ベクトル空間 (双対概均質ベクトル空間) となり, その特異点集合 $\mathbf{S}^*$ も絶対既約超曲面となる. $P(x)$, $P^*(y)$ を, それぞれ $\mathbf{S}$, $\mathbf{S}^*$ の定義多項式とする.

2. b -関数: 次の等式を満たす s の多項式 $b(s)$ が存在する.

$$P^*(\partial_x)P(x)^{s+1} = b(s)P(x)^s.$$

この $b(s)$ は b -関数 といわれ, ゼータ関数・局所ゼータ関数の極の位置, 関数等式に現われるガンマ因子の形を統制する重要な量である.

次に局所ゼータ関数を定義するために, 開軌道の実点の集合 $\Omega := \Omega_{\mathbb{R}}, \Omega^* := \Omega_{\mathbb{R}}^*$ を

$$\Omega = \Omega_1 \cup \cdots \cup \Omega_{\nu}, \quad \Omega^* = \Omega_1^* \cup \cdots \cup \Omega_{\nu}^*$$

と連結成分に分解する. ここで, 連結成分の個数は等しくなる. さて, 局所ゼータ関数は各連結成分に対応して

$$\Phi_i(f, s) = \int_{\Omega_i} |P(x)|^s f(x) dx, \quad \Phi_i^*(f^*, s) = \int_{\Omega_i^*} |P^*(y)|^s f^*(y) dy \quad (\Re(s) > 0)$$

と定義される. ここで, f (resp. f^*) は $V := \mathbf{V}_{\mathbb{R}}$ (resp. $V^* := \mathbf{V}_{\mathbb{R}}^*$) 上の急減少関数である.

3. (無限素点における) 局所関数等式: ガンマ因子 $\gamma(s)$ を b -関数を用いて

$$\gamma(s) = \prod_{i=1}^d \Gamma(s + \alpha_i), \quad b(s) = b_0 \prod_{i=1}^d (s + \alpha_i)$$

と定義すると, $\gamma(s)^{-1}\Phi_i(f, s)$, $\gamma(s)^{-1}\Phi_i^*(f^*, s)$ は, s について $\mathbb{C}$ 上に正則に解析接続される. また $f^* = \hat{f}$ が f の Fourier 変換のとき, 局所関数等式

$$\Phi_i(f, s) = \gamma(s) \sum_{j=1}^{\nu} u_{ij}(s) \Phi_j^* \left(\hat{f}, -\frac{n}{d} - s \right)$$

が成り立つ. ここで, $n = \dim V$, $d = \deg P$ であり, また $u_{ij}(s)$ は指数関数による簡単な表示を持つ有理型関数である.

$1 \leq i \leq \nu$ に対し, (大域的) ゼータ関数を

$$\xi_i(s) = \sum_{x \in \Gamma \backslash (\mathbf{V}_{\mathbb{Z}} \cap \Omega_i)} \frac{\mu(x)}{|P(x)|^s}, \quad \mu(x) = \text{vol}(\mathbf{G}_x^{\circ} / \Gamma_x) \quad (3)$$

によって定義する. ここで, Γ は $\mathbf{G}_{\mathbb{Z}}$ と実リー群 $\mathbf{G}_{\mathbb{R}}$ の単位元連結成分 $\mathbf{G}_{\mathbb{R}}^{\circ}$ との共通部分, $\mu(x)$ は “density” と呼ばれ $\Gamma \cdot x$ の大きさを反映した量である. 以下, すべての $x \in \mathbf{V}_{\mathbb{Z}} \cap \Omega$ に対して $\mu(x) < \infty$ であることを仮定する. このとき $\xi_i(s), \xi_i^*(s)$ は $\Re(s) \gg 0$ で絶対収束することが示される ([16]). 同様に $(G, \rho^* V^*)$ のゼータ関数 $\xi_i^*(s)$ も定義される.

4. 積分表示: f を $V_{\mathbb{R}}$ 上の急減少関数とすると, $\Re(s) \gg 0$ で次が成り立つ.

$$\int_{\mathbf{G}_{\mathbb{R}}^{\circ} / \Gamma} \chi(g)^s \sum_{x \in \mathbf{V}_{\mathbb{Z}} \cap \Omega} f(\rho(g)x) dg = \sum_{i=1}^{\nu} \xi_i(s) \Phi_i(f, s - n/d).$$

5. 関数等式: $b(s - \frac{n}{d} - 1)\xi_i(s)$, $b(s - \frac{n}{d} - 1)\xi_i^*(s)$ は整関数に解析接続される. 積分表示に Poisson の和公式を適用し, さらに局所関数等式を用いることで, ゼータ関数の関数等式

$$\xi_i^*\left(\frac{n}{d} - s\right) = \gamma\left(s - \frac{n}{d}\right) \sum_{j=1}^{\nu} u_{ji}\left(s - \frac{n}{d}\right) \xi_j(s) \quad (1 \leq i \leq \nu)$$

が証明される.

1.4 概均質的群作用の役割

局所関数等式の根拠: §1.3 の 3 の局所関数等式の両辺を Ω 上の distribution とみなすと同じ $\mathbf{G}_{\mathbb{R}}^{\circ}$ -相対不変性を持つ. したがって, $\mathbf{G}_{\mathbb{R}}^{\circ}$ -等質空間上の相対不変 distribution の一意性により Ω 上では局所関数等式が成り立っていることはほとんど自明である. 局所関数等式の証明の難しい部分は Ω 上の等式を $\mathbf{V}_{\mathbb{R}}$ 上の等式に拡張するところにある.

大域的ゼータ関数の定義: 簡単のため, $P(x)$ は $\mathbb{Z}$ -係数とし, ゼータ関数を

$$\xi_i(s) = \sum_{n=1}^{\infty} M_i(n) n^{-s}, \quad M_i(n) = \sum_{x \in \Gamma \backslash (\mathbf{V}_{\mathbb{Z}} \cap \Omega_i \cap \mathbf{V}(\pm n))} \mu(x)$$

と整理する. ここで, $\mathbf{V}(t) = \{x \in \mathbf{V} \mid P(x) = t\}$ とおいた. $\mathbf{V}(\pm n)$ の符号 $\pm$ は各開軌道 Ω_i 上の P の符号として定まる. 概均質性により, $\mathbf{G}^1$ を $\text{Ker}(\chi)$ の単位元連結成分とすると, $\mathbf{V}(t)$ ($t \neq 0$) は $\mathbf{G}^1$ -等質空間となる. これにより, $\mathbf{V}_{\mathbb{Z}} \cap \Omega_i \cap \mathbf{V}(\pm n)$ の Γ -同値類の個数は有限個となり $M_i(n)$ の和がとれる. $\mu(x)$ の定義も群 $\mathbf{G}$ の作用を利用して定義されていた. $\mathbf{V}(t) \cap \Omega_i$ がコンパクトでないような場合には, $\mathbf{V}_{\mathbb{Z}} \cap \Omega_i \cap \mathbf{V}(t)$ が一般には無限集合となるので, 概均質的群作用がないとゼータ関数を定義することすら困難となる.

古典的ゼータ関数と概均質ベクトル空間

概均質ベクトル空間	相対不変式	関数等式の証明
$(GL(1), M(1))/\mathbb{Q}$	$P(x) = x$	Riemann ¹
$R_{K/\mathbb{Q}}(GL(1), M(1))$ $[K : \mathbb{Q}] < \infty$	$P(x) = N_{K/\mathbb{Q}}(x)$	Dedekind zeta Hecke ² が証明
$(GL(1) \times SO(n), V(n))$	$P(x) =$ a quadratic form	Epstein ³ (positive definite)
		Siegel ⁴ (indefinite)
$(A^\times, A)$ A : simple algebra	$P(x) =$ the reduced norm	Hey ⁵
$(SO(m) \times GL(n), M(m, n))$	$\det {}^t x x$	Koecher ⁶

¹ B.Riemann, 1859.

² E.Hecke, 1917.

³ P.Epstein, *Math. Ann.* **56**(1903), **63**(1907).

⁴ C.L.Siegel, *Math. Z.* **43**(1938), **44**(1939).

⁵ K. Hey, 1929.

⁶ M.Koecher, *J. reine angew. Math.* **192**(1953).

2 非概均質的局所関数等式

概均質ベクトル空間の理論の原点は

「局所関数等式を満たすような多項式 P, P^* を見出せ」

という問題に、その根拠は「等質空間上の相対不変超関数の一意性にあり」、という形で答えるところにある。これは (局所) 関数等式を満たす多項式を系統的に構成することを可能とし、大成功を収めた理論ではあったが、最近はっきりしてきたことは、それは単に十分条件に過ぎないということである。

● Euclidean Jordan 代数の表現と局所関数等式

まず, Faraut-Koranyi ([7], 1994) は, Euclidean Jordan 代数の表現に付随する局所ゼータ関数を考察し, 符号 $(1, n)$ の二次形式から得られる次数 2 の Jordan 代数の場合には, 概均質ベクトル空間の相対不変式ではないにもかかわらず局所関数等式を満たすような 4 次の多項式が得られることを発見した。

● 非退化双対二次写像による局所関数等式の引き戻し

Faraut-Koranyi の結果は, 群や Jordan 代数から離れて, 二次写像による局所関数等式を引き戻せるという現象として一般化される (表現論関係では何度かお話しさせていただいているのでいささか賞味期限切れだが, 後半との関係もあるので, 要点を復習しておく)。

$\mathbf{V}$ (resp. $\mathbf{W}$) を実構造 V (resp. W) をもつ n (resp. m) 次元複素ベクトル空間, $\mathbf{V}^*$ (resp. $\mathbf{W}^*$) を $\mathbf{V}$ (resp. $\mathbf{W}$) の双対空間とする。.. 実ベクトル空間 V (resp. W) の双対空間 V^* (resp. W^*) は $\mathbf{V}^*$ (resp. $\mathbf{W}^*$) の実構造を与える。Let P (resp. P^*) を $\mathbf{V}$ (resp. $\mathbf{V}^*$) 上の $\mathbb{R}$ 上定義された d 次斉次の多項式関数とする。..

$$\begin{aligned}\Omega &= \{v \in \mathbf{V} \mid P(v) \neq 0\}, \quad \Omega = \Omega \cap V, \\ \Omega^* &= \{v^* \in \mathbf{V}^* \mid P^*(v^*) \neq 0\}, \quad \Omega^* = \Omega^* \cap V^*.\end{aligned}$$

とおく。まず,

(A.1) $\mathbb{R}$ 上定義された双正則有理写像 $\phi: \Omega \rightarrow \Omega^*$ が存在する

と仮定する。 Ω, Ω^* の連結成分への分解を

$$\Omega = \Omega_1 \cup \cdots \cup \Omega_\nu, \quad \Omega^* = \Omega_1^* \cup \cdots \cup \Omega_\nu^*$$

と表す。仮定 (A.1) により, Ω, Ω^* の連結成分の個数は一致しており,

$$\Omega_j^* = \phi(\Omega_j) \quad (j = 1, \dots, \nu)$$

と対応しているとしてよい。

$\mathbb{R}$ 上定義された二次写像 $Q : \mathbf{W} \rightarrow \mathbf{V}$, $Q^* : \mathbf{W}^* \rightarrow \mathbf{V}^*$ が与えられているとする. 写像 $B_Q : \mathbf{W} \times \mathbf{W} \rightarrow \mathbf{V}$, $B_{Q^*} : \mathbf{W}^* \times \mathbf{W}^* \rightarrow \mathbf{V}^*$ を

$$B_Q(w_1, w_2) := Q(w_1 + w_2) - Q(w_1) - Q(w_2), \quad B_{Q^*}(w_1^*, w_2^*) := Q^*(w_1^* + w_2^*) - Q^*(w_1^*) - Q^*(w_2^*)$$

と定義すると, 双線形である. $v \in \mathbf{V}$, $v^* \in \mathbf{V}^*$ に対し,

$$Q_{v^*}(w) = \langle Q(w), v^* \rangle, \quad Q_v^*(w^*) = \langle v, Q^*(w^*) \rangle$$

と定義すると, $Q_{v^*} : \mathbf{W} \rightarrow \mathbb{C}$, $Q_v^* : \mathbf{W}^* \rightarrow \mathbb{C}$ は $\mathbf{W}$, $\mathbf{W}^*$ 上の二次形式を与え, W , W^* 上では実数値をとる. 次の仮定は, Q , Q^* が非退化で, (A.1) で存在を仮定した双正則写像 ϕ に関してたがいに双対的になっているということである. すなわち, Q , Q^* は次を満たすとする.

- (A.2) (i) (非退化性) 開集合 $\tilde{\Omega} := Q^{-1}(\Omega)$ (resp. $\tilde{\Omega}^* = Q^{*-1}(\Omega^*)$) は空ではなく, Q (resp. Q^*) の $w \in \tilde{\Omega}$ (resp. $w^* \in \tilde{\Omega}^*$) でのヤコビアン の階数は n に等しい. (特に $m \geq n$ である.)
- (ii) (双対性) 任意の $v \in \Omega$ に対し, 二次形式 $Q_{\phi(v)}$ と Q_v^* はたがいに双対的である. すなわち, W の基底とそれに双対的な W^* 基底をとり, それに関する二次形式 Q_{v^*} , Q_v^* の行列を S_{v^*} , S_v^* とすると, $S_{\phi(v)}$, S_v^* ($v \in \Omega$) は非退化であり, $S_{\phi(v)} = (S_v^*)^{-1}$ が成り立つ.

注意 1 以上の仮定の下で,

$$\det(Q_v^*) = \alpha P(v)^{m/d}, \quad \det\left(\frac{\partial \phi(v)_i}{\partial v_j}\right) = \beta P(v)^{-2n/d}$$

を満たす 0 でない定数 α, β が存在する.

二次写像による局所関数等式の引き戻しとは, 上記の設定の下で, $P(v)$, $P^*(v^*)$ が局所関数等式を満たせば, その引き戻し $\tilde{P}(w) := P(Q(w))$, $\tilde{P}^*(w^*) := P^*(Q^*(w^*))$ も局所関数等式を満たすということである.

$\mathcal{S}(V)$, $\mathcal{S}(V^*)$ で実ベクトル空間 V , V^* 上の急減少関数の空間を表す. $f \in \mathcal{S}(V)$, $f^* \in \mathcal{S}(V^*)$ に対し, 局所ゼータ関数を

$$\Phi_i(s, f) = \int_V |P(v)|_i^s f(v) dv, \quad \Phi_i^*(s, f^*) = \int_{V^*} |P^*(v^*)|_i^s f^*(v^*) dv^* \quad (i = 1, \dots, \nu)$$

によって定義する. よく知られているように, 局所ゼータ関数 $\Phi_i(s, f)$, $\Phi_i^*(s, f^*)$ は少なくとも $\Re(s) > 0$ で絶対収束し, s の有理型関数として $\mathbb{C}$ 全体に解析接続される. 次を仮定する.

(A.3) 任意の $f \in \mathcal{S}(V)$ に対し, 局所関数等式

$$\Phi_i^*(s, \hat{f}) = \sum_{j=1}^{\nu} \Gamma_{ij}(s) \Phi_j(-\frac{n}{d} - s, f) \quad (i = 1, \dots, \nu) \quad (4)$$

が成り立つ. ここで, $\Gamma_{ij}(s)$ は f に無関係な $\mathbb{C}$ 上の有理型関数であり, $\det(\Gamma_{ij}(s)) \neq 0$ を満たすとする. また,

$$\hat{f}(v^*) := \int_V f(v) \exp(-2\pi\sqrt{-1}\langle v, v^* \rangle) dv,$$

は f のフーリエ変換である.

ここで,

$$\begin{aligned} \tilde{P}(w) &= P(Q(w)), \quad \tilde{P}^*(w^*) = P^*(Q^*(w^*)) \\ \tilde{\Omega}_i &= Q^{-1}(\Omega_i), \quad \tilde{\Omega}_i^* = Q^{*-1}(\Omega_i^*) \quad (i = 1, \dots, \nu) \end{aligned}$$

とおく. $\tilde{\Omega}_i, \tilde{\Omega}_i^*$ のうちのいくつかは空であっても構わない. $F \in \mathcal{S}(W)$, $F^* \in \mathcal{S}(W^*)$ に対し, $\tilde{P}, \tilde{P}^*$ に付随する局所ゼータ関数を

$$\tilde{\Phi}_i(s, F) = \int_W \left| \tilde{P}(w) \right|_i^s F(w) dw, \quad \tilde{\Phi}_i^*(s, F^*) = \int_{W^*} \left| \tilde{P}^*(w^*) \right|_i^s F^*(w^*) dw^*$$

と定義する.

F のフーリエ変換 $\hat{F}$ は

$$\hat{F}(w^*) = \int_W F(w) \exp(2\pi\sqrt{-1}\langle w, w^* \rangle) dw$$

で定義される. このとき, P, P^* に対する局所関数等式 (4) は $\tilde{P}, \tilde{P}^*$ に対する局所関数等式を引き起こし, 新しい関数等式のガンマ因子はもとの関数等式のガンマ因子を用いて明示的に与えることができる.

定理 1 ([19], Theorem 4) 仮定 (A.1), (A.2), (A.3) の下で, 局所ゼータ関数 $\tilde{\Phi}_i(s, F)$, $\tilde{\Phi}_i^*(s, F^*)$ は関数等式

$$\tilde{\Phi}_i^*(s, \hat{F}) = \sum_{j=1}^{\nu} \tilde{\Gamma}_{ij}(s) \tilde{\Phi}_j\left(-\frac{m}{2d} - s, F\right)$$

を満たす. ここで, ガンマ因子 $\tilde{\Gamma}_{ij}(s)$ は

$$\tilde{\Gamma}_{ij}(s) = 2^{2ds+m/2} |\alpha|^{1/2} |\beta|^{-1} \sum_{k=1}^{\nu} \mathbf{e} \left[\frac{p_k - q_k}{8} \right] \Gamma_{ik}(s) \Gamma_{kj} \left(s + \frac{m - 2n}{2d} \right)$$

で与えられる. ただし, α, β は注意 1 で与えられた定数であり, (p_k, q_k) は二次形式 Q_v^* ($v \in \Omega_k$) の符号である.

注意 2 (1) Ω_k は連結なので, $Q_v^*(w^*)$ の符号 (p_k, q_k) は $v \in \Omega_k$ の取り方に依存しない.

(2) [19] では, 多変数のゼータ関数について定理は証明されているが, ここでは, 簡単のため 1 変数で説明した.

(3) ここでは証明は与えないが, P, P^* に関する局所関数等式を 2 回と Weil [30] による二次指標のフーリエ変換が双対的な二次指標に戻るという結果を組み合わせると, 定理 1 は示される.

● 概均質ベクトル空間への適用例

P が §1 の条件を満たす概均質ベクトル空間 (G, ρ, V) の既約相対不変式のとき, (A.1) の条件を満たす ϕ として $\phi(v) = \text{grad}(\log P(v))$ をとることができる, (A.3) は §1.3.3 の局所関数等式そのものである. したがって, 上の定理 1 により, V (とその双対の) 上に (A.2) を満たす非退化双対二次写像が構成できれば, 関数等式を満たす新しい多項式が得られる. 多くの例では, そのようにして得られる多項式はまた, 概均質ベクトル空間の相対不変式になっている. しかし, 上の定理はそのような概均質ベクトル空間に対しても関数等式の明示式を統一的に与えている点で興味なしとしない.

たとえば,

V	P	$\tilde{P}$	$(\tilde{G}, \tilde{\rho}, W)$
$\text{Sym}(m)$	$\det(v)$	$\det({}^t w Y w)$	$(GL(m) \times SO(Y), \square \otimes \square, M(m, n))$
$\text{Alt}(2m)$	$\text{Pf}(v)$	$\text{Pf}({}^t w A w)$	$(GL(2m) \times Sp(A), \square \otimes \square, M(2m, 2n))$
$\text{Mat}(m)$	$\det(v)$	$\det({}^t w_1 B w_2)$	$(GL(m) \times GL(m) \times SL(n),$ $(\square \otimes 1 \otimes \square) \oplus (1 \otimes \square \otimes \square^*), M(m, n)^2)$
$\dim V = 10$	$\deg P = 2$	$\deg \tilde{P} = 4$	$(GL(2) \times Spin(10), \square \otimes \text{half-spin})$
$\dim V = 11$	$\deg P = 2$	$\deg \tilde{P} = 4$	$(GL(1) \times Spin(12), \text{half-spin})$

Spin 表現に関係する最後の 2 例は, split form に対しては鈴木利明による Micro local calculus を用いた計算があったが, 任意の real form に対しての明示的計算は新しいと思われる.

● 非概均質的局所関数等式の例

P が二次形式のとき, 条件 (A.2) を満たす非退化 (自己) 双対二次写像を分類することができる

p, q を非負整数, $\dim V = p + q$, $P(v)$ を符号 (p, q) の二次形式とし, V の標準的基底 $\{e_1, \dots, e_{p+q}\}$ を

$$P\left(\sum_{i=1}^{p+q} v_i e_i\right) = \sum_{i=1}^p v_i^2 - \sum_{j=1}^q v_{p+j}^2$$

となるように定め, V を $\mathbb{R}^{p+q}$ と同一視する. また, 双対空間も, 内積 $(x, y) = x_1 y_1 + \dots + x_{p+q} y_{p+q}$ によって, $V = \mathbb{R}^{p+q}$ と同一視する. (A.1) を満たす双正則写像 $\phi: \Omega \rightarrow \Omega$ を

$$\phi(v) := \frac{1}{2} \text{grad} \log P(v) = \frac{1}{P(v)} (v_1, \dots, v_p, -v_{p+1}, \dots, -v_{p+q})$$

で与える. このとき, 正定値二次形式 $v_1^2 + \dots + v_p^2$ の Clifford 代数 C_p と正定値二次形式 $v_{p+1}^2 + \dots + v_{p+q}^2$ の Clifford 代数 C_q のテンソル積 $R_{p,q} := C_p \otimes C_q$ の任意の有限次元表現 $\rho: R_{p,q} \rightarrow M(m, \mathbb{R})$ を考える. 必要ならば同値な表現に移ると, 標準的基底 e_i の ρ による像は対称行列にとることができるので,

$$S_i = \rho(e_i) \in \text{Sym}(m, \mathbb{R}), \quad 1 \leq i \leq p + q$$

として, 二次写像

$$Q : W = \mathbb{R}^m \rightarrow V = \mathbb{R}^{p+q}, \quad Q(w) = (S_1[w], \dots, S_{p+q}[w])$$

が定義できる. このようにして得られる二次写像は, 上で定義した ϕ に対し自己双対的で (非退化ならば), (A.2) を満たす. 逆に, (A.2) を満たす自己双対的な二次写像はすべてこのようにして得られることが分かる.

注意 3 この構成は, 本節の冒頭で触れた Faraut-Koranyi [7] による階数 2 の Euclidean Jordan 代数から得られるものを含んでいる. その場合, $(p, q) = (1, q)$ であり, $C_1 \cong \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$ and $R_{1,q} = C_1 \otimes C_q \cong C_q \oplus C_q$ となる. よって, $R_{1,q}$ の表現は 2 つの C_q -加群 W_+ , W_- の直和となる. ここで, W_+ (resp. W_-) には e_1 が $+1$ 倍 (resp. -1 倍) として作用している. Faraut-Koranyi で構成されているのは, $W_- = \{0\}$ となる場合である.

上で構成された二次写像を用いて得られる

$$\tilde{P}(w) = P(Q(w)) = \sum_{i=1}^t {}^t w S_i w - \sum_{j=1}^q {}^t w S_{p+j} w$$

を **Clifford 4 次形式**と呼ぶことにしよう. Clifford 4 次形式は定理 1 により局所関数等式を持つが, そのほとんどは, 概均質ベクトル空間の相対不変式とはならない. 実際,

定理 2 ([21], Theorem 4.2) $\tilde{P}(w)$ が概均質ベクトル空間の相対不変式となるのは,

$$\left\{ \begin{array}{l} p+q \leq 4; \\ p+q = 5, \ m = 8; \\ p+q = 6, \ m = 16 \text{ または } \rho \text{ が } pure; \\ p+q = 7, 8, 9, \ m = 16; p+q = 10, \ m = 32 \text{ で } \rho \text{ が } pure; \\ p+q = 11, \ m = 32; \end{array} \right.$$

の場合に限る. ここで, $R_{p,q}$ の表現 ρ は, 偶部分代数 $R_{p,q}^+$ に制限したとき含まれる既約表現がすべて同値のときに, **pure** といわれる.

ここで, (簡単のため $p, q \geq 2$ の条件下で) Clifford 4 次形式の満たす局所関数等式の具体的な形を書いておこう.

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{c} \tilde{\Phi}_+ \left(s, \hat{F} \right) \\ \tilde{\Phi}_- \left(s, \hat{F} \right) \end{array} \right) &= 2^{4s+m/2} \pi^{-4s-2-m/2} \Gamma(s+1) \Gamma\left(s + \frac{n}{2}\right) \Gamma\left(s+1 + \frac{m-2n}{4}\right) \Gamma\left(s + \frac{m}{4}\right) \\ &\quad \times \sin \pi s \begin{pmatrix} \sin \pi \left(s + \frac{q-p}{2}\right) & -2 \sin \frac{\pi p}{2} \cos \frac{\pi q}{2} \\ -2 \sin \frac{\pi q}{2} \cos \frac{\pi p}{2} & \sin \pi \left(s + \frac{p-q}{2}\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\Phi}_+ \left(-\frac{m}{4} - s, F \right) \\ \tilde{\Phi}_- \left(-\frac{m}{4} - s, F \right) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

前項で例に挙げたスピン表現に関係する 2 つの概均質ベクトル空間は, 定理 2 の $(p+q, m) = (10, 32), (11, 32)$ の場合である.

● 局所関数等式と関連する条件

局所ゼータ関数を多変数化すると、さらに多くの非概均質的な関数等式を得る可能性がある。一例をあげると、

$$|4x_3x_6 - x_4^2 - x_5^2|_{\pm}^{s_1} |4x_1x_3x_6 - x_1x_4^2 - x_1x_5^2 - 4x_2^2x_6|_{\pm}^{s_2} |x_6|_{\pm}^{s_3}$$

のフーリエ変換は

$$|y_1|_{\pm}^{s_1} |y_1y_3 - y_2^2|_{\pm}^{-(s_1+s_2+1/2)} \left| \frac{y_3y_6 - y_4^2 - y_5^2}{y_3} \right|_{\pm}^{s_2-s_3+1} \cdot \frac{\text{sgn}(y_3)}{|y_3|}$$

の一次結合で表される。この例の場合、フーリエ変換側には本質的に有理関数が現れており、正則概均質ベクトル空間からは得られない形になっている。（このような関数等式は、「2つの関数等式の貼りあわせ」によって得られる。同様の例は [20] で報告したが、その結果には不正確なところがあった。）

このように、まだ具体例が多いとは言えないが、局所関数等式を満たす多項式が概均質ベクトル空間の相対不変式の枠をはみ出ていることは確かである。したがって、局所関数等式を持つ斉次多項式を特徴づけることは重要な問題と考えられるが、現在のところ、講演者にはその結論を見通すこともできていない。ここでは、局所関数等式の成立と強く関係していると考えられる条件について、コメントしておく。

(1) b -関数の存在

概均質ベクトル空間の場合に b -関数とよばれる不変量が存在し、関数等式のガンマ因子や極の位置などを記述することはすでに触れた。概均質ベクトル空間の場合に限らず、 b -関数の存在は局所関数等式の存在の必要条件であり、局所関数等式から b -関数の存在が従う。すなわち、次の結果が成り立つ：

仮定 (A.3) がなりたつとき、

$$P^*(\partial_v)P(v)^{s+1} = b(s)P(v)^s$$

を満たす s の多項式が存在する。さらに、 $b(s)$ は関数等式のガンマ因子 $\Gamma_{ij}(s)$ から計算できる。

$\mathbb{C}[v, \partial_v, s]$ の元の P^{s+1} への作用を考えれば b -関数（Bernstein-Sato 多項式）が存在することは一般的な結論であるが、上のように b -関数を与える微分作用素を定数係数でとれるという条件は、かなり強い条件のように思われる。

(2) Projective Semiclassical Condition

[6] において、Etingof-Kazhdan-Polishchuk は多項式の複素べきにさらに、 $\exp(2\pi i Q(v))$ の形の関数をかけたものを "elementary function" と呼び、局所関数等式の特徴づけという問題を

「elementary function のフーリエ変換はいつまた elementary となるか」

という形で定式化した。そこで、彼らは、条件

(PSC) $\text{grad log } P(v) : V \rightarrow V^*$ が双有理写像となる

に注目し, Projective Semiclassical Condition (PSC) と呼び, $P^*(\text{grad log } P(v)) = 1/P(v)$ となる有理関数 P^* を P の乗法的 Legendre 変換と呼んだ. 概均質ベクトル空間の理論では, この条件を満たす相対不変式を持つ概均質ベクトル空間を正則といい, (A.3) の形の関数等式が成立するための条件となる⁷. また, 乗法的 Legendre 変換 P^* は双対概均質ベクトル空間の相対不変式となる. 定理 1 においても, 仮定 (A.1) として $\text{grad log } P(v)$ に類似の双有理写像の存在を仮定した.

さて, [6] では, PSC を満たす 3 次形式 P で, P^* も 3 次形式となるものは, 正則概均質ベクトル空間から得られるもののみであることを示されており ([6, Theorem 3.10], [4]), PSC を満たす多項式で乗法的 Legendre 変換 P^* も多項式となるものは, 概均質ベクトル空間の相対不変式に限るか, という問いを立てられている. しかし, 定理 2 で扱った Clifford 代数の表現から得られる Clifford 4 次形式 $\tilde{P}$ は, 一般には概均質ベクトル空間の相対不変式ではないが, その乗法的 Legendre 変換は $\tilde{P}$ と一致することが容易に示せる. したがって, [6] の問いは, 4 次以上では否定的であることが分かる.

3 概均質ベクトル空間上の超関数の保型対とゼータ関数

概均質ベクトル空間 (G, ρ, V) への非退化双対二次写像 $Q : W \rightarrow V$ により相対不変式を引き戻して得られる多項式に対して, 定理 1 の局所関数等式に対応する大域的関数等式を持つゼータ関数を構成することを問題にする. 基本的な考え方は, 通常の概均質ベクトル空間のゼータ関数についての議論に現れる Poisson の和公式を, W 上のテータ級数 (のような対象) を Q によるファイバー上で積分して出てくる V 上の対象が満たす変換公式で置き換えることである. そのような考察は, $(GL(n), \square, \square, \text{Sym}(n))$ という概均質ベクトル空間の場合に, 鈴木利明 [28] によって行われていた. 鈴木の結果を一般の正則概均質ベクトル空間に拡張した田村敬太 [29] の結果から説明する.

3.1 超関数の保型対

概均質ベクトル空間 (G, ρ, V) については, §1 の記号を踏襲する.

L, L^* を, それぞれ, $V_{\mathbb{Q}}, V_{\mathbb{Q}}^*$ 上の格子とする. ただし, L^* が L の双対格子であるとは仮定しない. 格子 L, L^* 上の高々多項式増大度の関数 $\alpha : L \rightarrow \mathbb{C}, \beta : L^* \rightarrow \mathbb{C}$ を考える. 多項式増大度とは, ある正定数 c_1, c_2, c_1^*, c_2^* を適当に取れば,

$$|\alpha(x)| < c_1(1 + \|x\|^2)^{c_2}, \quad |\beta(y)| < c_1^*(1 + \|y\|^2)^{c_2^*}.$$

⁷ G が reductive である概均質ベクトル空間では, この正則性条件が成り立たなくとも, 局所関数等式の理論が構成される (Gyoja [8]). ただし, この場合, 関数等式の一方には, 低次元軌道に台を持つ超関数が現れる.

となることと理解する. このとき, $V = \mathbf{V}_{\mathbb{R}}, V^* = \mathbf{V}_{\mathbb{R}}^*$ 上の緩増加超関数 T_{β}, T_{α}^* を

$$T_{\beta}(f) = \sum_{y \in L^*} \beta(y) \hat{f}(y) \quad (f \in \mathcal{S}(V)),$$

$$T_{\alpha}^*(f^*) = \sum_{x \in L} \alpha(x) \check{f}^*(x) \quad (f^* \in \mathcal{S}(V^*))$$

によって定義することができる. ここで, $\hat{f}$ は f のフーリエ変換, $\check{f}^*$ は f^* の逆フーリエ変換である.

定義 1 $k, \sigma_1, \dots, \sigma_{\nu} \in \mathbb{C}$ を複素定数とし,

$$J(x) = \sigma_i |P(x)|^{k-2n/d} \quad (x \in \Omega_i)$$

で定まる Ω 上の関数 $J(x)$ を考える. 緩増加超関数 T_{α}^*, T_{β} は, 以下の 3 条件を満たすとき, $(\mathbf{G}, \rho, \mathbf{V}), (\mathbf{G}, \rho^*, \mathbf{V}^*)$ 上の $J(x)$ を保型因子とする超関数の保型対といわれる:

- (i) $G_{\mathbb{Q}} \cap G^+$ の数論的部分群 Γ で L, L^* が, それぞれ, $\rho(\Gamma), \rho^*(\Gamma)$ の作用で閉じており, α は $\rho(\Gamma)$ -不変, β は $\rho^*(\Gamma)$ -不変である.
- (ii) ある正定数 r に対し

$$\alpha(x) = O(|P(x)|^r) \quad (x \in L \cap \Omega), \quad \beta(y) = O(|P^*(y)|^r) \quad (y \in L^* \cap \Omega^*)$$

が成り立つ.

- (iii) $\phi(x) = \text{grad log } P(x)$ とし, $f_{\infty}^*(x) = J(x)f^*(\phi(x)) \quad (x \in \Omega)$ とおくと, 和公式 $T_{\alpha}^*(f^*) = T_{\beta}(f_{\infty}^*)$, すなわち,

$$\sum_{x \in L} \alpha(x) \check{f}^*(x) = \sum_{y \in L^*} \beta(y) \widehat{f_{\infty}^*}(y) \quad (5)$$

が, 任意の $f^* \in C_0^{\infty}(\Omega^*)$ に対して成り立つ.

保型対 T_{α}^*, T_{β} に付随する L 関数は

$$\xi_i(\alpha, s) = \sum_{x \in \Gamma \backslash L \cap \Omega_i} \alpha(x) \mu(x) |P(x)|^{-s},$$

$$\xi_i^*(\beta, s) = \sum_{y \in \Gamma \backslash L^* \cap \Omega_i^*} \beta(y) \mu(y) |P^*(y)|^{-s}$$

と定義される. ここで $\mu(x)$ は §1.3.3 の (3) で導入されたゼータ関数の係数 density である. 定義 1 の条件 (ii) と概均質ベクトル空間のゼータ関数の収束定理 ([16, Theorem 1.1]) により, L 関数 $\xi_i(\alpha, s), \xi_i^*(\beta, s)$ は $\Re(s)$ が十分大きいとき絶対収束する. このように L 関数は実開軌道 Ω_i, Ω_i^* に対応して定義されるが, これらを成分とした行ベクトルを

$$\xi(\alpha, s) = (\xi_1(\alpha, s), \dots, \xi_{\nu}(\alpha, s)), \quad \xi^*(\beta, s) = (\xi_1^*(\beta, s), \dots, \xi_{\nu}^*(\beta, s))$$

とおく.

次の補題は, §1.3.4 の積分表示とまったく同様に, いわゆる, unfolding によって容易に得られる.

補題 3 $f \in \mathcal{S}(V_{\mathbb{R}})$, $f^* \in \mathcal{S}(V_{\mathbb{R}}^*)$ に対して, ゼータ積分

$$Z(\alpha, f; s) = \int_{G^+/\Gamma} \chi(g)^s \sum_{x \in L \cap \Omega} \alpha(x) f(\rho(g)x) dg,$$

$$Z^*(\beta, f^*; s) = \int_{G^+/\Gamma} \chi^*(g)^s \sum_{y \in L^* \cap \Omega^*} \beta(y) f^*(\rho^*(g)y) dg$$

は $\Re(s)$ が十分大きいとき絶対収束して正則関数を定め, さらに次の等式が成り立つ:

$$Z(\alpha, f^*; s) = \xi(\alpha, s) \cdot \Phi(f; s - n/d), \quad Z^*(\beta, f^*; s) = \xi^*(\beta, s) \cdot \Phi^*(f^*; s - n/d).$$

ここで, 等式の右辺は L 関数からなる行ベクトルと局所ゼータ関数からなる列ベクトルの積である.

L 関数の関数等式と解析接続は, 補題 3 の積分表示と変換公式を用いて, 通常の概均質ベクトル空間のゼータ関数の理論 (例えば, [9], [24] を見よ) と同様に示されるが, 一般論としては, 特異集合 S, S^* に含まれる格子点の変換公式への寄与の計算が難しく, 次の補題のように, そのフーリエ変換が特異軌道上で消える特殊な試験関数を用いる必要がある.

補題 4 $f^* \in C_0^\infty(\Omega^*)$ が

$$\check{f}^*|_{S_{\mathbb{R}}} \equiv 0, \quad \widehat{f^*}|_{S_{\mathbb{R}}^*} \equiv 0 \quad (6)$$

を満たすとき, $Z(\alpha, \check{f}^*; s)$, $Z^*(\beta, \widehat{f^*}; s)$ は s の整関数に解析接続され, 関数等式

$$Z(\alpha, \check{f}^*; s) = Z^*(\beta, \widehat{f^*}; k - s)$$

が成り立つ.

この補題は, 通常の概均質ベクトル空間のゼータ関数の理論において Poisson の和公式を利用するところを保型対が満たす変換公式 (5) を用いれば, まったく同様に証明される.

次に, 補題 4 の条件 (6) を満たす関数 $f^* \in C_0^\infty(\Omega^*)$ を構成する. このような関数の構成には,

$$(\sharp) \quad \Omega_i^* \ (i = 1, \dots, \nu) \text{ 上の } G^+-\text{不変線形微分作用素の環は可換である}$$

という仮定を必要とする. この仮定は, 例えば, (G, ρ, V) がいわゆる可換放物型の概均質ベクトル空間などでは成立する.

一般に $\Omega_{\mathbb{R}}$ 上の微分作用素 D に対し, $\Omega_{\mathbb{R}}^*$ 上の微分作用素 ϕD を

$$\phi D f^*(y) = D(\phi f^*)(\phi^{-1}(y))$$

によって定義する. D が G^+ -不変ならば, ϕD も G^+ -不変である.

補題 5 (i) 微分作用素 M_1, M_2 を

$$M_1 = P(\partial_y)P^*(y), \quad M_2 = \phi(J(x)^{-1}P^*(\partial_x)P(x)J(x))$$

と定義すると, M_1, M_2 は $\Omega_{\mathbb{R}}^*$ 上の G^+ -不変線形微分作用素である.

- (ii) $f_0^* \in C_0^\infty(\Omega_{\mathbb{R}}^*)$ に対し, 関数 $M_1 M_2 f_0^*(y)$ は条件 (6) を満たす.
 (iii) $f_0^* \in C_0^\infty(\Omega_{\mathbb{R}}^*)$ に対し,

$$\Phi_i^*(M_1 M_2 f_0^*; -s) = (-1)^d b(s - n/d) b(s - k - 1) \Phi_i^*(f_0^*; -s)$$

が成り立つ. ここで, $b(s)$ は §1.3.2 で説明した b -関数である.

以上の準備のもとで, L 関数の関数等式が通常の概均質ベクトル空間のゼータ関数の場合と類似の方法で証明される.

定理 6 (K. Tamura [29]) L 関数 $\xi_i(\alpha, s), \xi_j^*(\beta, s)$ ($1 \leq i, j \leq \nu$) は s の有理型関数として $\mathbb{C}$ 上に解析接続され, Σ を保型因子 $J(x)$ の定義に現れた定数 σ_i を対角成分とする対角行列, すなわち,

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sigma_\nu \end{pmatrix}$$

とすると, 関数等式

$$\gamma(s - n/d) \xi(\alpha, s) U(s - n/d) = \gamma(k - n/d - s) \xi^*(\beta, k - s) {}^t U^{-1}(k - n/d - s) \Sigma$$

が成り立つ. ここで, $\gamma(s)$ は §1.3.3 で定義したガンマ因子であり, $U(s) = (u_{ij}(s))$ は局所関数等式の係数 u_{ij} を並べて得られる行列である.

L 関数の極とそこにおける主要部を決定することは, 一般論としては困難である. しかし, 概均質ベクトル空間のゼータ関数の場合に極の位置は b -関数の零点によって統制されることの類似として, 次の結果を得ることができる.

定理 7 整数 $m \geq 0$ を十分大きく取れば, L 関数 $\xi_1(\alpha, s), \dots, \xi_\nu(\alpha, s), \xi_1^*(\beta, s), \dots, \xi_\nu^*(\beta, s)$ に

$$b(s - k - 1) \prod_{r=0}^m b(s - n/d - r)$$

をかけたものは整関数である. とくに, L 関数の極は有限個しかない.

3.2 保型対と主系列表現 (($\mathbf{GL}(1), \mathbf{V}(1)$) の場合)

超関数の保型対の意味を分かりやすく説明するために, もっとも簡単な概均質ベクトル空間である $\mathbf{GL}(1)$ の 1 次元表現の場合を調べてみる.

L, L^* を $\mathbb{Q}$ に含まれる格子, すなわち, ある有理数 q, q^* に対し, $L = q\mathbb{Z}$, $L^* = q^*\mathbb{Z}$ だとする. 保型因子として,

$$J(x) = \begin{cases} x^{\lambda-2} & (x > 0) \\ \sigma_- |x|^{\lambda-2} & (x < 0) \end{cases}$$

を考える（保型因子は定数倍しても実質的な影響はないので、 $\sigma_+ = 1$ と正規化した）． $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^\times)$ に対し、 $f_\infty(x) = J(x)f(-1/x)$ とおく．このとき、フーリエ級数によって定義される $\mathbb{R}$ 上の緩増加超関数

$$T_\alpha(x) = \sum_{\ell \in L} \alpha(\ell) e^{2\pi\sqrt{-1}\ell x}, \quad T_{\alpha^*}(x) = \sum_{\ell^* \in L^*} \alpha^*(\ell^*) e^{2\pi\sqrt{-1}\ell^* x} \quad (7)$$

は、和公式

$$\sum_{\ell \in L} \alpha(\ell) \widehat{f}(\ell) = \sum_{\ell^+ \in L^*} \alpha^*(\ell^+) \widehat{f_\infty}(\ell^+) \quad (f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^\times)) \quad (8)$$

を満たすとき、概均質ベクトル空間 $(\mathbf{GL}(1), \mathbf{V}(1))$ 上の超関数の保型対を与える．

この和公式は、 $G := SL_2(\mathbb{R})$ の普遍被覆群 $\tilde{G}$ の主系列表現に属す distribution vector を定めていると見ることができることを説明しよう．

$\mathcal{H}$ を複素上半平面とし、 $S^1 = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ とおくと、群 $G = SL_2(\mathbb{R})$ は $\mathcal{H} \times S^1$ と同相である．同相写像は

$$\mathcal{H} \times S^1 \ni (x + iy, \theta) \mapsto p(x + iy)k(\theta) \in G,$$

$$p(x + iy) = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{y} & 0 \\ 0 & \sqrt{y}^{-1} \end{pmatrix}, \quad k(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

で与えられる．ここで $p(z)k(\theta) \cdot i = z$ ($z \in \mathcal{H}$) であることに注意する．普遍被覆群 $\tilde{G}$ は $\mathcal{H} \times \mathbb{R}$ と同相である． $(z, \theta) \in \mathcal{H} \times \mathbb{R}$ を $\tilde{G}$ の元とみなしたとき、 $\tilde{p}(z)\tilde{k}(\theta)$ と表す．このとき、 $\tilde{G}$ に $\pi: \tilde{G} \rightarrow G$, $\pi(\tilde{p}(z)\tilde{k}(\theta)) = p(z)k(\theta)$ が $\tilde{M}_0 := \{\tilde{k}(2n\pi) \mid n \in \mathbb{Z}\}$ を核とする中心拡大となるような群構造が与えられる． $\tilde{P}_0 := \{\tilde{p}(z) \mid z \in \mathcal{H}\}$ は $P_0 := \{p(z) \mid z \in \mathcal{H}\}$ と同型な $\tilde{G}$ の部分群、 $\tilde{K} := \{\tilde{k}(\theta) \mid \theta \in \mathbb{R}\}$ は $\mathbb{R}$ の加法群と同型な $\tilde{G}$ の部分群である． $\tilde{G}$ の群演算は、 $\tilde{k}(\theta)$ ($-\pi < \theta \leq \pi$) と $\tilde{p}(z)$ との交換関係

$$\tilde{k}(\theta)\tilde{p}(z) = p(k(\theta) \cdot \sqrt{-1})\tilde{k}(-\arg(-z \sin \theta + \cos \theta))$$

で定まる．ただし、偏角 $\arg$ は $(-\pi, \pi]$ の間にとるものとする． $\tilde{M} = \{\tilde{k}(n\pi) \mid n \in \mathbb{Z}\}$ が $\tilde{G}$ の中心を与える．

群 $\tilde{P} = \tilde{M}\tilde{P}_0$ から $\mathbb{C}^\times$ への連続準同型 $\psi_{\lambda, \mu}$ ($\lambda, \mu \in \mathbb{C}$) を

$$\psi_{\lambda, \mu}(\tilde{k}(n\pi)\tilde{p}(z)) = e^{-n\mu\pi i} |y|^{\lambda/2} \quad (\tilde{k}(n\pi) \in \tilde{M}, \tilde{p}(z) \in \tilde{P}_0)$$

によって定める．関数空間

$$C^\infty(\tilde{G}/\tilde{P}, \psi_{\lambda, \mu}) = \left\{ \phi \in C^\infty(\tilde{G}) \mid \phi(\tilde{g}\tilde{p}) = \psi_{\lambda, \mu}(\tilde{p})\phi(\tilde{g}) \quad (\forall \tilde{g} \in \tilde{G}, \forall \tilde{p} \in \tilde{P}) \right\}$$

を考える． $\tilde{w} := \tilde{k}(\pi/2)$ とおき、 $\tilde{n}(x) = \tilde{p}(x + \sqrt{-1})$ ($x \in \mathbb{R}$)、 $\tilde{n}(y) = \tilde{w}\tilde{n}(x)\tilde{w}^{-1}$ とする． $\phi \in C^\infty(\tilde{G}/\tilde{P}, \psi_{\lambda, \mu})$ に対し、 $\phi_0, \phi_\infty \in C^\infty(\mathbb{R})$ を

$$\phi_0(x) = \phi(\tilde{n}(x)\tilde{w}), \quad \phi_\infty(x) = \phi(\tilde{n}(x))$$

によって定義する. $\tilde{N} = \{\tilde{n}(x) \mid x \in \mathbb{R}\}$, $\tilde{\tilde{N}} = \{\tilde{\tilde{n}}(x) \mid x \in \mathbb{R}\}$ とすると, $\tilde{G} = \tilde{N}\tilde{w}\tilde{P} \cup \tilde{\tilde{N}}\tilde{P}$ となるから, 関数 $\phi \in C^\infty(\tilde{G}/\tilde{P}, \psi_{\lambda, \mu})$ は (ϕ_0, ϕ_∞) によって, 一意的に定まる. 等式

$$\tilde{\tilde{n}}(x) = \tilde{n}\left(-\frac{1}{x}\right) \tilde{w}\tilde{p}(-x + ix^2) \times \begin{cases} 1, & x > 0 \\ \tilde{k}(-\pi), & x < 0 \end{cases}$$

により,

$$\phi_\infty(x) = |x|^\lambda \phi_0(-1/x) \times \begin{cases} 1, & x > 0 \\ e^{\mu\pi i}, & x < 0 \end{cases} \quad (9)$$

が得られる. $C^\infty(\tilde{G}/\tilde{P}, \psi_{\lambda, \mu})$ の双対を与える distribution の空間

$$C^{-\infty}(\tilde{G}/\tilde{P}, \psi_{-1-\lambda, -\mu}) = \left\{ T \in C^{-\infty}(\tilde{G}) \mid T(\tilde{g}\tilde{p}) = \psi_{-1-\lambda, -\mu}(\tilde{p})T(\tilde{g}) \ (\forall \tilde{g} \in \tilde{G}, \forall \tilde{p} \in \tilde{P}) \right\}$$

に属す T に対し, $\mathbb{R}$ 上の distribution T_0, T_∞ が存在し,

$$\langle T, \phi \rangle = \begin{cases} \langle T_0, \phi_0 \rangle & (\text{Supp}(\phi) \subset \tilde{N}\tilde{w}\tilde{P}) \\ \langle T_\infty, \phi_\infty \rangle & (\text{Supp}(\phi) \subset \tilde{\tilde{N}}\tilde{P}) \end{cases}$$

となる. とくに, $\text{Supp}(\phi) \subset \tilde{N}\tilde{w}\tilde{P} \cap \tilde{\tilde{N}}\tilde{P}$ ならば $\phi_0, \phi_\infty \in C_0^\infty(\mathbb{R}^\times)$ であり,

$$\langle T_0, \phi_0 \rangle = \langle T_\infty, \phi_\infty \rangle$$

となる. ここで, T_0, T_∞ が (7) の形のフーリエ展開を持てば, $\sigma_- = e^{\mu\pi\sqrt{-1}}$ として和公式 (8) が得られる. したがって, 概均質ベクトル空間 $(\mathbf{GL}(1), \mathbf{V}(1))$ 上の超関数の保型対とは, $\tilde{G}$ の主系列表現の distribution vector の空間 $C^{-\infty}(\tilde{G}/\tilde{P}, \psi_{-1-\lambda, -\mu})$ の元 T で, $\mathbb{Q}$ の格子 L_1, L_2 があって, $\tilde{L}_1 = \{\tilde{n}(\ell) \mid \ell \in L_1\}$, $\tilde{\tilde{L}}_2 = \{\tilde{w}\tilde{n}(\ell)\tilde{w}^{-1} \mid \ell \in L_2\}$ とおいたとき,

$$(*) \quad T|_{\tilde{N}\tilde{w}\tilde{P}} \text{ が } \tilde{L}_1\text{-不変, かつ, } T|_{\tilde{\tilde{N}}\tilde{P}} \text{ が } \tilde{\tilde{L}}_2\text{-不変}$$

となるものと対応している. このような T を $\tilde{G}$ 上の弱保型的超関数と呼ぼう.

Miller-Schmid ([12], [13], [14], [25]) は主系列表現に属す distribution vector で数論的部分群の作用で不変なもの (特に保型形式の境界値として得られるもの) を保型超関数と呼んでいる. Miller-Schmid の意味での保型超関数は, 当然, 条件 (*) を満たし弱保型的であるが, 弱保型的であっても保型的ではない, すなわち, $T|_{\tilde{N}\tilde{w}\tilde{P}}$ が $\tilde{L}_1$ -不変であるが, T は $\tilde{L}_1$ -不変でないものが存在する. 保型的, 弱保型的の区別は, 付随する L 関数の極によって判定される. Miller-Schmid は保型超関数に付随する L 関数の関数等式を, 超関数の Mellin 変換の理論を構築して証明した. 定理 6 は, 対応する結果を概均質ベクトル空間の手法を用いて導いている.

3.3 非退化双対二次写像と保型対

§3.1 の結果を利用すると, §2 で調べたような非退化双対二次写像から得られるよい多項式に対して大域的ゼータ関数を構成することができる. そのために, まず, 概均質ベクトル空間上の超関数の保型対を構成する初等的な方法を与える.

● 抽象 Siegel 級数

ν, ν^* を $V_{\mathbb{Q}}, V_{\mathbb{Q}}^*$ 上の複素数値関数とする. L_1, L_2 を $V_{\mathbb{Q}}$ の格子とし, L_1^*, L_2^* で L_1, L_2 の双対格子を表わす. いま, ν, ν^*, L_1, L_2 について次の条件 (i), (ii), (iii) が成り立っているとしよう.

(i) ν は L_1 -不変, ν^* は L_2^* -不変, すなわち,

$$\nu(x + \ell) = \nu(x), \quad \nu^*(y + \ell^*) = \nu^*(y) \quad (\ell \in L_1, \ell^* \in L_2^*)$$

が成り立つ. さらに, $G_{\mathbb{Q}}$ の数論的部分群 Γ で ν, ν^* を不変とするものがある, すなわち,

$$\nu(\rho(\gamma)x) = \nu(x), \quad \nu^*(\rho^*(\gamma)y) = \nu^*(y) \quad (\gamma \in \Gamma)$$

が成り立つ.

(ii) 無限級数

$$\sum_{x \in V_{\mathbb{Q}}/L_1} \nu(x), \quad \sum_{y \in V_{\mathbb{Q}}^*/L_2^*} \nu^*(y)$$

は絶対収束する.

(iii) 任意の $x \in \Omega_{\mathbb{Q}}$ に対し, $\nu^*(\phi(x)) = J(x)\nu(x)$ が成り立つ.

この 3 条件を満たす ν, ν^*, L_1, L_2 が与えられたとき, 格子 L_2, L_1^* 上の関数 $\alpha : L_2 \rightarrow \mathbb{C}$, $\beta : L_1^* \rightarrow \mathbb{C}$ を

$$\begin{aligned} \alpha(\ell) &= v(L_2^*)^{-1} \sum_{y \in V_{\mathbb{Q}}^*/L_2^*} \nu^*(y) \mathbf{e}[-\langle y, \ell \rangle] \quad (\ell \in L_2), \\ \beta(\ell^*) &= v(L_1)^{-1} \sum_{x \in V_{\mathbb{Q}}/L_1} \nu(x) \mathbf{e}[\langle x, \ell^* \rangle] \quad (\ell^* \in L_1^*) \end{aligned}$$

によって定義する. 右辺の級数は条件の (ii) により絶対収束する. これは, 実解析的 Siegel Eisenstein 級数の Fourier 係数を与える Siegel 級数 (特異級数) の一般化 (アブストラクトナンセンス化?) であり, 抽象 Siegel 級数と呼ぶことにしよう. 次の補題が示すように, 抽象 Siegel 級数を Fourier 係数とすることによって保型対が得られる.

補題 8 緩増加超関数

$$T_{\alpha}^*(f^*) = \sum_{\ell \in L_2} \alpha(\ell) \check{f}^*(\ell), \quad T_{\beta}(f) = \sum_{\ell^* \in L_1^*} \beta(\ell^*) \hat{f}(\ell^*) \quad (f \in \mathcal{S}(V_{\mathbb{R}}), f^* \in \mathcal{S}(V_{\mathbb{R}}^*))$$

は, 概均質ベクトル空間 (G, ρ, V) , (G, ρ^*, V^*) 上の $J(x)$ を保型因子とする保型対を与える.

● 非退化双対二次写像のゼータ関数

さて, §1.3 の条件を満たす概均質ベクトル空間上に, §2.2 の条件を満たす $\mathbb{Q}$ 上定義された二次写像 $Q : \mathbf{W} \rightarrow \mathbf{V}$, $Q^* : \mathbf{W}^* \rightarrow \mathbf{V}^*$ が与えられているとする. さらに, G は $\mathbf{W}$ に線型に作用し, $Q : \mathbf{W} \rightarrow \mathbf{V}$ は G -同変であるとする. また, $Q^* : \mathbf{W}^* \rightarrow \mathbf{V}^*$ も G の反傾表現に関して G -同変だとする. その他の記号は, §2.2 の記号を引き継ぐ.

ここで, $\tilde{P}(w)$, $\tilde{P}^*(w^*)$ に付随し関数等式を持つ大域的ゼータ関数を定義したい. だが, Clifford 4 次形式のように一般的には $\tilde{P}$, $\tilde{P}^*$ を相対不変式とするような概均質的群作用は存在せず, §1 の終わりに注意したように, ゼータ関数の定義自体が困難をはらんでいる. ここでは, 大きな群作用がないという問題点に, 局所密度の積を考えるという C.L.Siegel に由来するアイデアで対処することにする.

そのために, まず, 二次写像 Q , Q^* に付随するガウス和を導入する. 素数 p に対し,

$$\mathfrak{g}_p^*(Q, v^*) := \int_{\mathbf{W}(\mathbb{Z}_p)} \psi_p \left(\frac{1}{2} Q_{v^*}(w) \right) |dw|_p \quad (v^* \in \mathbf{V}^*(\mathbb{Q}_p))$$

とおく. $v^* \in \mathbf{V}^*(\mathbb{Z}_p)$ で Q^* が $2\mathbb{Z}_p$ に係数を持つならば, $\mathfrak{g}_p^*(Q, v^*) = 1$ である. したがって, $v^* \in \mathbf{V}^*(\mathbb{Q})$ に対し, 有限個の素数 p を除いて $\mathfrak{g}_p^*(Q, v^*) = 1$ であり, 素数を渡る無限積 $\mathfrak{g}_p^*(Q, v^*)$

$$\mathfrak{g}^*(Q, v^*) := \prod_{p < \infty} \mathfrak{g}_p^*(Q, v^*) \quad (v^* \in \mathbf{V}^*(\mathbb{Q}))$$

が定義できる. 同様に,

$$\begin{aligned} \mathfrak{g}_p(Q^*, v) &:= \int_{\mathbf{W}^*(\mathbb{Z}_p)} \psi_p \left(\frac{1}{2} Q_v^*(w^*) \right) |dw^*|_p \quad (v \in \mathbf{V}(\mathbb{Q}_p)), \\ \mathfrak{g}(Q^*, v) &:= \prod_{p < \infty} \mathfrak{g}_p(Q^*, v) \quad (v \in \mathbf{V}(\mathbb{Q})) \end{aligned}$$

と定義する.

ここで, $k \in \mathbb{Z}$, $\lambda \in \mathbb{C}$ に対し,

$$\nu_{k,\lambda}(v) = \mathfrak{g}(Q^*, v)^k |\mathfrak{g}(Q^*, v)|^\lambda, \quad \nu_{k,\lambda}^*(v^*) = \mathfrak{g}^*(Q, v^*)^k |\mathfrak{g}^*(Q, v^*)|^\lambda$$

と定める. 写像

$$\begin{aligned} \varpi : V(\mathbb{Q}) &\longrightarrow \text{Sym}_m(\mathbb{Q}) / \text{Sym}_m^*(\mathbb{Z}), \quad v \longmapsto S_v^* = \sum_{i=1}^n v_i S_i^* \pmod{\text{Sym}_m^*(\mathbb{Z})}, \\ \varpi^* : V^*(\mathbb{Q}) &\longrightarrow \text{Sym}_m(\mathbb{Q}) / \text{Sym}_m^*(\mathbb{Z}), \quad v^* \longmapsto S_{v^*} = \sum_{i=1}^n v_i^* S_i \pmod{\text{Sym}_m^*(\mathbb{Z})} \end{aligned}$$

を考え, $L_1 = 2 \ker \varpi$, $L_2^* = 2 \ker \varpi^*$ とおく. 二次写像の非退化性により, $S_1, \dots, S_n$ は $\mathbb{C}$ 上一次独立であり, L_1 and L_2^* は, それぞれ, $V(\mathbb{Q})$, $V^*(\mathbb{Q})$ の格子となる. Γ を $G_{\mathbb{Q}}$ の数論的部分群で, $\mathbf{W}(\mathbb{Z})$, L_1 , L_2^* を動かさないものとする.

補題 9 (1) $\mathfrak{g}(Q^*, v)$, $\nu_{k,\lambda}(v)$ ($v \in V(\mathbb{Q})$) の値は $v \bmod L_1$ のみに依存し, Γ -不変である:

$$\begin{aligned}\mathfrak{g}(Q^*, v + \ell) &= \mathfrak{g}(Q^*, v), \quad \nu_{k,\lambda}(v + \ell) = \nu_{k,\lambda}(v) \quad (v \in V(\mathbb{Q}), \ell \in L_1), \\ \mathfrak{g}(Q^*, \rho(\gamma)v) &= \mathfrak{g}(Q^*, v), \quad \nu_{k,\lambda}(\rho(\gamma)v) = \nu_{k,\lambda}(v) \quad (\gamma \in \Gamma, v \in V(\mathbb{Q})).\end{aligned}$$

(2) $\mathfrak{g}^*(Q, v^*)$, $\nu_{k,\lambda}^*(v^*)$ ($v^* \in V^*(\mathbb{Q})$) の値は $v^* \bmod L_2^*$ のみに依存し, Γ -不変である:

$$\begin{aligned}\mathfrak{g}^*(Q, v^* + \ell^*) &= \mathfrak{g}^*(Q, v^*), \quad \nu_{k,\lambda}^*(v^* + \ell^*) = \nu_{k,\lambda}^*(v^*) \quad (v^* \in V^*(\mathbb{Q}), \ell^* \in L_2^*), \\ \mathfrak{g}^*(Q, \rho^*(\gamma)v^*) &= \mathfrak{g}^*(Q, v^*), \quad \nu_{k,\lambda}^*(\rho^*(\gamma)v^*) = \nu_{k,\lambda}^*(v^*) \quad (\gamma \in \Gamma, v^* \in V^*(\mathbb{Q})).\end{aligned}$$

(3) 次の関係式が成り立つような定数 σ_i ($1 \leq i \leq \nu$) が存在する:

$$\begin{aligned}\nu_{k,\lambda}^*(\phi(v)) &= J_{k,\lambda}(v) \nu_{k,\lambda}(v) \quad (v \in \Omega_{\mathbb{Q}}), \\ J_{k,\lambda}(v) &= \sum_{i=1}^{\nu} \sigma_i^k |\sigma_i|^{\lambda} |P(v)|_i^{\frac{m}{2d}(\lambda+k)}\end{aligned}$$

(4) 抽象 Siegel 級数

$$\begin{aligned}\alpha_{k,\lambda}(Q, \ell) &= v(L_2^*)^{-1} \sum_{v^* \in V_{\mathbb{Q}}^*/L_2^*} \nu_{k,\lambda}^*(v^*) \mathbf{e}[-\langle v^*, \ell \rangle] \quad (\ell \in L_2), \\ \beta_{k,\lambda}(Q^*, \ell^*) &= v(L_1)^{-1} \sum_{v \in V_{\mathbb{Q}}/L_1} \nu_{k,\lambda}(v) \mathbf{e}[\langle v, \ell^* \rangle] \quad (\ell^* \in L_1^*)\end{aligned}$$

は, $k + \Re(\lambda) > 2m + 2$ で絶対収束する. ここで, L_2, L_1^* は, それぞれ, L_2^*, L_1 の双対格子である. (ここで与えた収束の限界は極めて粗いもので, 個々の例では $m = \dim \mathbf{W}$ が $n = \dim V$ に対してある程度大きければ絶対収束することが分かることが多い.)

したがって, 補題 8 により, (抽象 Siegel 級数の絶対収束という条件の下で) 二次写像 Q, Q^* に対し, パラメータ k, λ を含む $(\mathbf{G}, \rho, \mathbf{V})$, $(\mathbf{G}, \rho^*, \mathbf{V}^*)$ 上の超関数の保型対が得られる. さらに, 二次写像 Q, Q^* に付随するゼータ関数を

$$\begin{aligned}\xi_i(Q, k, \lambda; s) &= \sum_{\ell \in \Gamma \backslash L_2 \cap \Omega_i} \frac{\alpha_{k,\lambda}(Q, \ell) \mu(\ell)}{|P(\ell)|^s}, \\ \xi_i^*(Q^*, k, \lambda; s) &= \sum_{\ell^* \in \Gamma \backslash L_1^* \cap \Omega_i^*} \frac{\beta_{k,\lambda}(Q^*, \ell^*) \mu(\ell^*)}{|P^*(\ell^*)|^s}.\end{aligned}$$

と定義すれば, 定理 6 により, 次の関数等式が得られる.

定理 10 (i) ゼータ関数 $\xi_i(Q, k, \lambda; s), \xi_j^*(Q^*, k, \lambda; s)$ ($1 \leq i, j \leq \nu$) は s の有理型関数として $\mathbb{C}$ 全体に解析接続される. .

(ii) ある整数 $q \geq 0$ が存在し, ゼータ関数

$$\xi_1(Q, k, \lambda; s), \dots, \xi_{\nu}(Q, k, \lambda; s), \xi_1^*(Q^*, k, \lambda; s), \dots, \xi_{\nu}^*(Q^*, k, \lambda; s)$$

に

$$b(s - k - 1) \prod_{r=0}^q b(s - n/d - r)$$

をかけたものは全複素平面で正則である.

(iii) 次の関数等式が成立する :

$$\begin{aligned} & \gamma\left(s - \frac{n}{d}\right) \xi(Q, k, \lambda; s) U\left(s - \frac{n}{d}\right) \\ &= \gamma^*\left(\frac{m(\lambda + k)}{2d} - n/d - s\right) \xi^*\left(Q^*, k, \lambda; \frac{m(\lambda + k)}{2d} - s\right) {}^t U^{-1}\left(\frac{m(\lambda + k)}{2d} - n/d - s\right) \Sigma_{k, \lambda}. \end{aligned}$$

ここで,

$$\Sigma_{k, \lambda} = \begin{pmatrix} \sigma_1^k |\sigma_1|^\lambda & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sigma_\nu^k |\sigma_\nu|^\lambda \end{pmatrix}.$$

である.

$\lambda = 0$ のときには, ゼータ関数の係数 $\alpha_{k,0}(Q, \ell)$, $\beta_{k,0}(Q^*, \ell^*)$ ははっきりとした数論的意味を持っている. k を自然数として, Q^k で二次写像

$$Q^k : \overbrace{W \oplus \cdots \oplus W}^k \rightarrow V, \quad w = (w^{(1)}, \dots, w^{(k)}) \mapsto Q(w^{(1)}) + \cdots + Q(w^{(k)})$$

を表す. このとき, Q^k も §2.2 の条件を満たし, $\mathfrak{g}^*(Q^k, v^*) = \mathfrak{g}^*(Q, v^*)^k$, $\alpha_{k, \lambda}(Q, \ell) = \alpha_{1, \lambda/k}(Q^k, \ell)$ が成り立つ. そこで, $\alpha_{k,0}(Q, \ell)$ の意味を知るには, $k = 1$ と仮定して十分である.

命題 11 N を NS_i ($i = 1, \dots, n$) がすべて整数係数となるような正整数とする. 素数 p に対し,

$$\alpha_p(Q, \ell) = |N|_p^m \lim_{e \rightarrow \infty} p^{-e(m-n)} \# \left\{ w \in W(\mathbb{Z}_p / Np^e \mathbb{Z}_p) \mid \frac{1}{2} Q(w) \equiv \ell \pmod{p^e} \right\}$$

とおくと, この極限 $\alpha_p(Q, \ell)$ は存在し, N の取り方によらない. さらに, 抽象 Siegel 級数 $\alpha_{1,0}(Q, \ell)$ が絶対収束するならば,

$$\alpha_{1,0}(Q, \ell) = \prod_{p < \infty} \alpha_p(Q, \ell) \quad (\ell \in L_2)$$

が成り立つ.

すなわち, $\alpha_{1,0}(Q, \ell)$ は, 不定方程式 $Q(w) = \ell$ の p 進整数解の密度をすべての素数に対して掛け合わせたものという意味を持っている. たとえば, $\mathbf{V} = \text{Sym}(m)$, $Q(w) = {}^t w Y w$, $P(w) = \det({}^t w Y w)$ (Y は整数係数非退化対称行列) の場合には, Siegel によって不定方程式 $Q(w) = \ell$ の整数解の密度を, すべての素数 p に対し Y と $\mathbb{Z}_p$ 上で同値で Y と同じ符号を持つものの $\mathbb{Z}$ -同値類を渡らせて適当な荷重平均をとったものが, 上の $\alpha_{1,0}(Q; \ell)$ と一致することが示されている (Siegel の主定理).

P が不定値の二次形式の場合には, Clifford 4 次形式 $\tilde{P}$ のゼータ関数は L_2 上の和ではなく,

$$\begin{aligned} & \sum_{d=1}^{\infty} \left(\prod_p \alpha_p(\tilde{P}, \pm d) \right) d^{-s}, \\ & \alpha_p(\tilde{P}, \pm d) = \lim_{e \rightarrow \infty} p^{-e(m-1)} \# \{ w \in \mathbf{W}(\mathbb{Z}) \bmod p^e \mid Q(w) \equiv \pm d \bmod p^e \} \end{aligned}$$

と不定方程式 $\tilde{P}(w) = \pm d$ の解の局所的密度の積を係数としたゼータ関数に変形される.

パラメータ λ, k が一般の場合に戻ると, p.9 の表の最初の 3 つの場合には, $V = \text{Sym}(m), \text{Alt}(2m), \text{Mat}(m)$ に対して, それぞれ, $\mathbf{Sp}(m), \mathbf{SO}(m, m), \mathbf{GL}(2m)$ の Eisenstein 級数の Fourier 係数が $\alpha_{k,\lambda}(Q, \ell)$ として現れてきている. P が 2 次形式で $\tilde{P}$ が Clifford 4 次形式の場合には, $SO(p+1, q+1)$ の Eisenstein 級数と結びつくものと予想される.

なお, Clifford 4 次形式で Faraut-Koranyi によって構成されていたものについては, $Q^{-1}(\ell)_{\mathbb{R}}$ がコンパクトという好事情があるため, 概均質ベクトル空間のゼータ関数の標準的な方法が自然に適用でき, そのゼータ関数の関数等式は, D. Achab ([1], [2]) によってすでに示されていた. Achab で構成されているゼータ関数は, 上の構成とは少し異なっており, 上のゼータ関数は Achab のゼータ関数の有限和として表されると予想される (Siegel の主定理の類似) .

参考文献

- [1] D. Achab, Représentations des algèbres de rang 2 et fonctions zêta associées, *Ann. Inst. Fourier* **45**(1995), 437–451.
- [2] D. Achab, Zeta functions of Jordan algebras representations, *Ann. Inst. Fourier* **45**(1995), 1283–1303.
- [3] T. Arakawa, Dirichlet series related to the Eisenstein series on the Siegel upper half-plane, *Comment. Math. Univ. St. Pauli* **27**(1978), 29–42.
- [4] P.-E. Chaput and P. Sabatino, On homaloidal polynomial functions of degree 3 and prehomogeneous vector spaces, *Collect. Math.* **64**(2013), 135–140.
- [5] J.-L. Clerc, Zeta distributions associated to a representation of a Jordan algebra, *Math. Z.* **239**(2002), 263–276.
- [6] P. Etingof, D. Kazhdan and A. Polishchuk, When is the Fourier transform of an elementary function elementary?, *Selecta Math.* **8**(2002), 27–66
- [7] J. Faraut and A. Koranyi, *Analysis of symmetric cones*, Oxford University Press, 1994.
- [8] A. Gyoja, Theory of prehomogeneous vector spaces without regularity condition, *Pub. RIMS* **27**(1991), 861–922.
- [9] T. Kimura, *Introduction to Prehomogeneous Vector Spaces*, Amer. Math. Soc., 2003.
- [10] M. I. Knopp, On Dirichlet series satisfying Riemann’s functional equation, *Invent. Math.* **117**(1994), 361–372.
- [11] G. Letac and H. Massam, Wishart distributions for decomposable graphs, *Ann of Statistics*, **35**(2007), 1278–1323.

- [12] S.-D. Miller and W. Schmid, Summation formulas, from Poisson and Voronoi to the present. Noncommutative harmonic analysis, 419–440, Progr. Math., 220, Birkhuser Boston, Boston, MA, 2004.
- [13] S.-D. Miller and W. Schmid, Distributions and analytic continuation of Dirichlet series. *J. Funct. Anal.* **214**(2004), 155–220.
- [14] S.-D. Miller and W. Schmid, Automorphic distributions, L -functions, and Voronoi summation for $GL(3)$. *Ann. of Math.* **164**(2006), 423–488.
- [15] T. Oshima: Generalized Capelli identities and boundary value problems for $GL(n)$, in “*Structures of solutions of differential equations, Katata/Kyoto 1995*”, Ed. M. Morimoto and T. Kawai, World Scientific, 307–335.
- [16] H. Saito, Convergence of zeta functions of prehomogeneous vector spaces, *Nagoya Math. J.* **170**(2003), 1–31.
- [17] F. Sato, Zeta functions in several variables associated with prehomogeneous vector spaces I: Functional equations, *Tôhoku Math. J.* **34**(1982), 437–483.
- [18] F. Sato, On functional equations of zeta distributions, *Adv. Studies in pure Math.* **15**(1989), 465–508.
- [19] F. Sato, Quadratic maps and nonprehomogeneous local functional equations, *Comment. Math. Univ. St. Pauli* **56**(2007), 163–184.
- [20] F. Sato, Local functional equations associated with decomposable graphs, *Josai Mathematical Monograph* **6**(2013), 59–60.
- [21] F. Sato and T. Kogiso, Clifford quartic forms and local functional equations of non-prehomogeneous type, arXiv:1308.4535
- [22] M. Sato, Theory of prehomogeneous vector spaces (Notes taken by T.Shintani in Japanese), *Sugaku no Ayumi* **15**(1970), 85–157.
- [23] M. Sato and T. Kimura, A classification of irreducible prehomogeneous vector spaces and their invariants, *Nagoya Math. J.* **65**(1977), 1–155.
- [24] M. Sato and T. Shintani, On zeta functions associated with prehomogenous vector spaces, *Ann. of Math.* **100**(1974), 131–170.
- [25] W. Schmid, Automorphic distributions for $SL(2, \mathbb{R})$. Confrence Mosh Flato 1999, Vol. I (Dijon), 345–387, Math. Phys. Stud., 21, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 2000.
- [26] T. Shintani, On Dirichlet series whose coefficients are class numbers of integral binary cubic forms, *J. Math. Soc. Japan* **24**(1972), 132–188.

- [27] T. Shintani, On zeta functions associated with the vector space of quadratic forms, *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo* **22**(1975), 25–65.
- [28] T. Suzuki, Distributions with automorphy and Dirichlet series, *Nagoya Math. J.* **73**(1979), 157–169.
- [29] K. Tamura, Automorphic distributions of prehomogeneous vector spaces and their L -functions, Master Thesis (in Japanese), Rikkyo University, 2009.
- [30] A. Weil, Sur certaines groupes d’opérateurs unitaires, *Acta. Math.* **111**(1964), 143–211; *Collected Papers* III, 1-69.