

Multivariate circular Jacobi polynomials*

渋川元樹[†]

九大数理

概要

球多項式を 2-parameter 変形した直交多項式系を対称錐上の解析を用いて構成する. これは Jack 多項式とは別の球多項式の拡張であり, circular Jacobi 多項式の変数化にあたる. またこの直交多項式系の weight 関数は P. Bourgade et. al [IMRN. 23, (2009)] により導入された circular Jacobi ensemble となっている.

1 Introduction

球多項式¹ $\Phi_{\mathbf{m}}^{(d)}$ の拡張として, 重複度² d を continuous に拡張した Jack 多項式 $J_{\mathbf{m}}^{(\frac{2}{d})}$ がよく知られている ([M] 参照). Jack 多項式は可換な微分作用素の族の同時固有函数として導入される多変数の直交多項式系であるが, それとは全く異なる手法 (対称錐上の解析) を用いて, Jack 多項式とは別の球多項式の拡張 $\phi_{\mathbf{m}}^{(\alpha, \nu)}$ が得られる. $\phi_{\mathbf{m}}^{(\alpha, \nu)}$ は Jack 多項式とは異なり, 重複度 d はそのまま, その他に実の 2-parameter, α, ν が入った, P. Bourgade et. al [BNR] により導入された circular Jacobi ensemble (CJE) を weight 函数とする多変数の直交多項式系である.

このような新種の多変数直交多項式系であるが, 一変数に退化させると, これは circular Jacobi 多項式 (CJ 多項式) の拡張 (1-parameter 変形) になっている. そこで本稿ではこの多項式 $\phi_{\mathbf{m}}^{(\alpha, \nu)}$ をその多変数化と解釈し, *MCJ (Multivariate Circular Jacobi)* 多項式と呼ぶことにする.

本稿の目的はこの MCJ 多項式を, 特にその直交性を中心に, 解説することである. そのためにまず一変数の CJ 多項式と L. Shen による CJ 多項式の扱い [S] を紹介する. 次にその枠組みから CJ 多項式の 1-parameter 変形が得られることを示す. それから対称錐上の解析について必要最低限の事実を述べてから, 最後に MCJ 多項式について述べる.

*本研究は科研費 (課題番号: 12J04930) の助成を受けたものである.

[†]日本学術振興会特別研究員 (DC2). e-mail: g-shibukawa@math.kyushu-u.ac.jp

¹spherical 多項式. 文脈的には帯球 (Zonal) 多項式と呼ぶべきかもしれないが, 後ろとの整合性からこう呼ぶことにする.

²ここも本来は「ルートの重複度」というべきだが, 本稿の文脈では「simple Jordan 代数 V の重複度」というほうがよい.

2 CJ 多項式と L. Shen の結果

CJ 多項式は単位円周上の直交多項式系で, Gauss の超幾何関数

$${}_2F_1\left(\begin{matrix} a, b \\ c \end{matrix}; X\right) := \sum_{k \geq 0} \frac{(a)_k (b)_k}{(c)_k} \frac{X^k}{k!}, \quad \text{where } (a)_k := a(a+1) \cdots (a+k-1)$$

を用いて, 以下のように定義される (詳細は [I] Chapter8 参照).

$$\phi_m^{(\alpha)}(e^{i\theta}) := \frac{(\alpha)_m}{m!} {}_2F_1\left(\begin{matrix} -m, \frac{\alpha+1}{2} \\ \alpha \end{matrix}; 1 - e^{i\theta}\right) = \frac{\left(\frac{\alpha-1}{2}\right)_m}{m!} {}_2F_1\left(\begin{matrix} -m, \frac{\alpha+1}{2} \\ -m - \frac{\alpha-3}{2} \end{matrix}; e^{i\theta}\right).$$

またその直交関係式は次のように与えられる³.

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \phi_m^{(\alpha)}(e^{i\theta}) \overline{\phi_n^{(\alpha)}(e^{i\theta})} (1-e^{i\theta})^{\frac{\alpha-1}{2}} (1-e^{-i\theta})^{\frac{\alpha-1}{2}} d\theta = \frac{\Gamma(\alpha+m)}{m!} \frac{1}{\Gamma(\frac{\alpha+1}{2})^2} \delta_{mn}, \quad (\alpha > 0).$$

特に $\alpha = 1$ のときは, $\phi_m^{(1)}(e^{i\theta}) = e^{im\theta}$ であり, お馴染みの直交系

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{mi\theta} e^{-in\theta} d\theta = \delta_{mn}$$

に退化することに注意しよう⁴.

このように CJ 多項式は最も primitive な単位円周上の直交多項式系 $\{e^{im\theta}\}_{m \in \mathbf{Z}_{\geq 0}}$ の拡張であり, また Heisenberg 群上の調和解析⁵ [GK] やランダム行列 [I] 等で現れるものの, Jacobi, Laguerre, Hermite 多項式等の昔から良く知られた直交多項式系に比べあまり (というより殆ど⁶) お馴染みがない.

しかし L. Shen [S] は次のようなことを指摘した. $\alpha > 0$ として,

$$\begin{aligned} L_\alpha^2(\mathbf{R}_{>0}) &:= \{\psi : \mathbf{R}_{>0} \longrightarrow \mathbf{C} \mid \|\psi\|_{\alpha, \mathbf{R}_{>0}}^2 < \infty\}, \\ \|\psi\|_{\alpha, \mathbf{R}_{>0}}^2 &:= \frac{2^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty |\psi(u)|^2 u^{\alpha-1} du, \\ \psi_m^{(\alpha)}(u) &:= e^{-u} L_m^{(\alpha-1)}(2u) \delta_{[0, \infty)}(u), \\ L_m^{(\alpha-1)}(x) &:= \frac{(\alpha)_m}{m!} {}_1F_1\left(\begin{matrix} -m \\ \alpha \end{matrix}; x\right) = \frac{(\alpha)_m}{m!} \sum_{k=0}^m (-1)^k \binom{m}{k} \frac{1}{(\alpha)_k} x^k \end{aligned}$$

³これは Askey[A] により与えられた.

⁴他にも $\alpha = 3$ のときは $\phi_m^{(3)}(e^{i\theta}) = \sum_{k=0}^m (k+1) e^{ik\theta}$ となり興味深い.

⁵正確には CJ 多項式を更に一般化した, [D] において Heisenberg 多項式と呼ばれている, 直交多項式系が用いられる.

⁶恐らく「circular Jacobi」という単語自体, [I] においてのみ使われているに過ぎないと思われる.

とする. 但し $\binom{m}{k}$ は二項係数で, $(1+x)^m$ の展開係数

$$(1+x)^m = \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} x^k = \sum_{k=0}^m (-1)^k \frac{(-m)_k}{k!} x^k$$

として定義する⁷. ここで $L_m^{(\alpha-1)}$ は Laguerre 多項式であり, $\psi_m^{(\alpha)}$ は直交関係式

$$(\psi_m^{(\alpha)}, \psi_n^{(\alpha)})_{\alpha, \mathbf{R}_{>0}} := \frac{2^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty \psi_m^{(\alpha)}(u) \overline{\psi_n^{(\alpha)}(u)} u^{\alpha-1} du = \frac{(\alpha)_m}{m!} \delta_{mn}$$

を満たす $L_\alpha^2(\mathbf{R}_{>0})$ の直交基底であることに注意せよ.

さてこの $\psi_m^{(\alpha)}$ の (modified) Fourier 変換

$$\mathcal{F}_\alpha(\psi)(t) := \frac{1}{\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)} F(\psi u^{\frac{\alpha-1}{2}})(t)$$

を考えよう. ここで F は通常の Fourier 変換

$$F(\psi)(t) := \int_{-\infty}^\infty e^{-itu} \psi(u) du$$

である. すると essential に Laguerre 多項式である $\psi_m^{(\alpha)}$ の $\mathcal{F}_\alpha$ による像は

$$\mathcal{F}_\alpha(\psi_m^{(\alpha)})(t) = (1+it)^{-\frac{\alpha+1}{2}} \frac{(\alpha)_m}{m!} {}_2F_1\left(-m, \frac{\alpha+1}{2}; \frac{2}{1+it}\right) =: \Psi_m^{(\alpha)}(t)$$

であり, 更に $t = \cot\left(\frac{\theta}{2}\right) = i \frac{e^{i\theta}+1}{e^{i\theta}-1}$ と置くと

$$\Psi_m^{(\alpha)}\left(\cot\left(\frac{\theta}{2}\right)\right) \left(= \mathcal{F}_\alpha(\psi_m^{(\alpha)})\left(\cot\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)\right) = \left(\frac{1-e^{i\theta}}{2}\right)^{\frac{\alpha+1}{2}} \phi_m^{(\alpha)}(e^{i\theta})$$

となって CJ 多項式が得られる. つまり標語的に言えば

CJ 多項式 = Laguerre 多項式の Fourier 変換 (+Cayley 変換)

ということが成り立つ. 直交関係式の方も Fourier 変換と Plancheral の定理を用いると,

$$\begin{aligned} \frac{(\alpha)_m}{m!} \delta_{mn} &= \frac{2^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_{-\infty}^\infty u^{\frac{\alpha-1}{2}} \psi_m^{(\alpha)}(u) \overline{\psi_n^{(\alpha)}(u)} u^{\frac{\alpha-1}{2}} du \\ &= \frac{2^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty F(u^{\frac{\alpha-1}{2}} \psi_m^{(\alpha)})(t) \overline{F(u^{\frac{\alpha-1}{2}} \psi_n^{(\alpha)})(t)} dt \\ &= \frac{2^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \frac{|\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)|^2}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \Psi_m^{(\alpha)}(t) \overline{\Psi_n^{(\alpha)}(t)} dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \frac{\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \phi_m^{(\alpha)}(e^{i\theta}) \overline{\phi_n^{(\alpha)}(e^{i\theta})} (1-e^{i\theta})^{\frac{\alpha-1}{2}} (1-e^{-i\theta})^{\frac{\alpha-1}{2}} d\theta \end{aligned}$$

⁷ここで二項係数をあえて階乗ベキで定義しなかった. というのも, 後で述べるように, 多変数化する際にこの二つの定義が一致しなくなり, 上式の二つ目の等号が成立しなくなるためである.

となって Laguerre 多項式の直交性から CJ 多項式の直交性が従うことがわかる。まとめると次のようになる。

Theorem 2.1. [S] $\mathbf{T} := \mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}$,

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_\alpha^2(\mathbf{T}) &:= \{\phi : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbf{C} \text{ (hol)} \mid \phi \text{ は } \mathbf{T} \text{ まで連続に延びて } \|\phi\|_{\alpha, \mathbf{T}}^2 < \infty\}, \\ \|\phi\|_{\alpha, \mathbf{T}}^2 &:= \frac{\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)^2}{\Gamma(\alpha)} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\phi(e^{i\theta})|^2 (1 - e^{i\theta})^{\frac{\alpha-1}{2}} (1 - e^{-i\theta})^{\frac{\alpha-1}{2}} d\theta, \\ \tilde{\mathcal{F}}_\alpha(\psi)(e^{i\theta}) &:= 2^{\frac{\alpha-1}{2}} (1 - e^{i\theta})^{-\frac{\alpha+1}{2}} (\mathcal{F}_\alpha)(\psi) \left(\cot\left(\frac{\theta}{2}\right) \right)\end{aligned}$$

とする。この時

$$\begin{array}{ccc} \tilde{\mathcal{F}}_\alpha : L_\alpha^2(\mathbf{R}_{>0}) & \xrightarrow{\sim} & \mathcal{H}_\alpha^2(\mathbf{T}) \text{ (unitary).} \\ \downarrow \Psi & & \downarrow \Psi \\ \psi_m^{(\alpha)} & \longmapsto & \phi_m^{(\alpha)} \end{array}$$

Remark 2.2. [S] では論じられていないが、直交性だけでなく CJ 多項式の母関数、微分方程式等の基本的諸性質もこの unitary 同型写像を用いることにより Laguerre 多項式から導出することができる。

以上が Shen の CJ 多項式に関する研究の概要である。これにより従来の CJ 多項式が非常に扱いやすくなっただけでなく、CJ 多項式の拡張 (1-parameter 変形) や多変数化も可能になる。

3 unitary 作用素による変形

$\nu \in \mathbf{R}$ とし、 $L_\alpha^2(\mathbf{R}_{>0})$ における unitary 作用素

$$m_\nu : L_\alpha^2(\mathbf{R}_{>0}) \longrightarrow L_\alpha^2(\mathbf{R}_{>0}) \quad (\psi \longmapsto u^{i\nu} \psi)$$

を考える。この作用を上記の unitary 同型写像で intertwine することにより、CJ 多項式 $\phi_m^{(\alpha)}$ の実 parameter ν による変形

$$\phi_m^{(\alpha, \nu)}(e^{i\theta}) := \frac{(\alpha)_m}{m!} {}_2F_1 \left(-m, \frac{\alpha+1}{2} + i\nu; \alpha; 1 - e^{i\theta} \right) \quad (3.1)$$

$$= \frac{\left(\frac{\alpha-1}{2} - i\nu\right)_m}{m!} {}_2F_1 \left(-m, \frac{\alpha+1}{2} + i\nu; -m - \frac{\alpha-3}{2} + i\nu; e^{i\theta} \right) \quad (3.2)$$

が得られる。

Theorem 3.1.

$$\mathcal{H}_{\alpha,\nu}^2(\mathbf{T}) := \{\phi : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbf{C} \text{ (hol)} \mid \phi \text{ は } \mathbf{T} \text{ まで連続に延びて } \|\phi\|_{\alpha,\nu,\mathbf{T}}^2 < \infty\},$$

$$\|\phi\|_{\alpha,\nu,\mathbf{T}}^2 := \left| \frac{\Gamma(\frac{\alpha+1}{2} + i\nu)}{\Gamma(\frac{\alpha+1}{2})} \right|^2 \|(1 - e^{i\theta})^{i\nu} \phi\|_{\alpha,\mathbf{T}}^2$$

とする. この時,

$$\begin{array}{ccc} \tilde{\mathcal{F}}_{\alpha,\nu} := \tilde{\mathcal{F}}_{\alpha+2i\nu} : L_{\alpha}^2(\mathbf{R}_{>0}) & \xrightarrow{\sim} & \mathcal{H}_{\alpha,\nu}^2(\mathbf{T}) \text{ (unitary).} \\ \Psi & & \Psi \\ \psi_m^{(\alpha)} & \longmapsto & \phi_m^{(\alpha,\nu)} \end{array}$$

実際,

$$(\psi_m^{(\alpha)}, \psi_n^{(\alpha)})_{\alpha,\mathbf{R}_{>0}} = (m_{\nu}\psi_m^{(\alpha)}, m_{\nu}\psi_n^{(\alpha)})_{\alpha,\mathbf{R}_{>0}} = (\tilde{\mathcal{F}}_{\alpha}(m_{\nu}\psi_m^{(\alpha)}), \tilde{\mathcal{F}}_{\alpha}(m_{\nu}\psi_n^{(\alpha)}))_{\alpha,\mathbf{T}}$$

であり, $m_{\nu}\psi_m^{(\alpha)} \in L_{\alpha}^2(\mathbf{R}_{>0})$ の $\tilde{\mathcal{F}}_{\alpha}$ による像を計算すると,

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{F}}_{\alpha}(m_{\nu}\psi_m^{(\alpha)})(e^{i\theta}) &= 2^{\frac{\alpha-1}{2}} (1 - e^{i\theta})^{-\frac{\alpha+1}{2}} (\mathcal{F}_{\alpha})(m_{\nu}\phi_m^{(\alpha)}) \left(\cot\left(\frac{\theta}{2}\right) \right) \\ &= \frac{\Gamma(\frac{\alpha+1}{2} + i\nu)}{\Gamma(\frac{\alpha+1}{2})} 2^{-i\nu} (1 - e^{i\theta})^{i\nu} \phi_m^{(\alpha,\nu)}(e^{i\theta}). \end{aligned}$$

よって, $\tilde{\mathcal{F}}_{\alpha,\nu}(\psi_m^{(\alpha)}) = \phi_m^{(\alpha,\nu)}$ であり,

$$\frac{(\alpha)_m}{m!} \delta_{mn} = (\tilde{\mathcal{F}}_{\alpha}(m_{\nu}\psi_m^{(\alpha)}), \tilde{\mathcal{F}}_{\alpha}(m_{\nu}\psi_n^{(\alpha)}))_{\alpha,\mathbf{T}} = (\phi_m^{(\alpha,\nu)}, \phi_n^{(\alpha,\nu)})_{\alpha,\nu,\mathbf{T}}$$

となる. これを具体的に書き出して整理すると,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \phi_m^{(\alpha,\nu)}(e^{i\theta}) \overline{\phi_n^{(\alpha,\nu)}(e^{i\theta})} (1 - e^{i\theta})^{\frac{\alpha-1}{2} + i\nu} (1 - e^{-i\theta})^{\frac{\alpha-1}{2} - i\nu} d\theta \\ &= \frac{\Gamma(\alpha + m)}{m!} \frac{1}{|\Gamma(\frac{\alpha+1}{2} + i\nu)|^2} \delta_{mn}, \end{aligned} \tag{3.3}$$

となっており, $\phi_m^{(\alpha,\nu)}$ は元の CJ 多項式の重み関数 $(1 - e^{i\theta})^{\frac{\alpha-1}{2}} (1 - e^{-i\theta})^{\frac{\alpha-1}{2}}$ の parameter を複素化した直交多項式系であることがわかる.

Remark 3.2. (1) $\phi_m^{(\alpha,0)}(e^{i\theta}) = \phi_m^{(\alpha)}(e^{i\theta})$
(2) この一般化された CJ 多項式 $\phi_m^{(\alpha,\nu)}$ は Meixner-Pollaczek(MP) 多項式 (詳細は [KLS] 参照)

$$P_m^{(a)}(x; \theta) := \frac{(2a)_m}{m!} e^{im\theta} {}_2F_1 \left(\begin{matrix} -m, a + ix \\ 2a \end{matrix}; 1 - e^{-2i\theta} \right),$$

と

$$\phi_m^{(\alpha, \nu)}(e^{i\theta}) = e^{im\frac{\theta}{2}} P_m^{(\frac{\alpha}{2})} \left(\nu + \frac{1}{2i}; -\frac{\theta}{2} \right)$$

という関係がある. MP 多項式には

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{(2\theta-\pi)x} |\Gamma(a+ix)|^2 P_m^{(a)}(x; \theta) P_n^{(a)}(x; \theta) dx \\ &= \frac{\Gamma(m+2a)}{(2\sin\theta)^{2a} m!} \delta_{mn}, \quad (a > 0, 0 < \theta < \pi) \end{aligned}$$

という直交関係式があったことに注意すれば, $\phi_m^{(\alpha, \nu)}(e^{i\theta})$ は MP 多項式の変数を parameter, parameter を変数とする直交多項式系であることがわかる.

これは CJ 多項式が Laguerre 多項式の Fourier 変換で得られるのに対し, MP 多項式が Laguerre 多項式の Mellin 変換により得られることの帰結といえる.

4 対称錐上の解析

CJ 多項式の変数化のために必要となる「対称錐上の解析」について, 必要最低限の事実を [FK] から適当に抜粋する.

V を simple な Euclidean Jordan 代数, e を Jordan 積に関する V の単位元⁸, Ω をその既約対称錐とし, n を V の $\mathbf{R}$ 上の次元, r を V の rank とする. 更に V の重複度 d を

$$d := \frac{2(n-r)}{r(r-1)} \quad (4.1)$$

で定める⁹.

Remark 4.1. (1) Jordan 代数に不慣れの方は, 以下 V を r 次の実対称行列全体 $\text{Sym}_r(\mathbf{R})$, Ω を r 次の正定値実対称行列 $\text{Sym}_r(\mathbf{R})^{++}$ と考えていただいて構わない. また以下いくつか無定義に述べる Jordan 代数に関する用語¹⁰も, 通常の行列に対する意味で考えてほしい.

(2) simple な Euclidean Jordan 代数, およびそれに付随して定まる既約な対称錐は分類されており, 全部で5種類しかないことが知られている ([FK] p.97 参照).

Lemma 4.2. ([FK] Thm III. 1.3 スペクトル分解) 任意の $x \in V$ に対し, ある Jordan frame $\{c_1, \dots, c_r\} \subset V$ (i.e. primitive な直交ベキ等元からなる complete system) と, $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbf{R}$ が存在して,

$$x = \sum_{j=1}^r \lambda_j c_j.$$

⁸ $e \neq 0$ とする.

⁹但し, $r = 1$ のときは $d = 0$ とする

¹⁰主座小行列式, tr , $\det$ 等々

次に Ω に関する自己同型群とその部分群を導入する. $G(\Omega) := \{g \in \text{GL}(V) \mid g\Omega = \Omega\}$, G を $G(\Omega)$ の単位元の連結成分とし, $K \subset G$ を V の単位元 e に関する等方部分群とする.

V が simple の時, K は Jordan frame の集合全体に推移的に作用する ([FK] Cor I V.2.7) ので, スペクトル分解と合わせて次の Lemma を得る.

Lemma 4.3. ([FK] p.102 極分解) Jordan frame $\{c_1, \dots, c_r\}$ を fix する. このとき任意の $x \in V$ について, $k \in K$ と $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbf{R}$ が unique に存在して,

$$x = k \sum_{j=1}^r \lambda_j c_j, \quad (\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_r).$$

以下 Jordan frame $\{c_1, \dots, c_r\}$ を fix して考える. この極分解を V 上の K 不変関数の積分で行うと次を得る.

Lemma 4.4. ([FK] Thm VI.2.3)¹¹ $f \in L^1(V)^K$ とするとき,

$$\int_V f(x) dx = \tilde{c}_0 \int_{\mathbf{R}^r} f(\lambda_1, \dots, \lambda_r) \prod_{1 \leq k < l \leq r} |\lambda_k - \lambda_l|^d d\lambda_1 \cdots d\lambda_r. \quad (4.2)$$

但し dx は V の内積 $(u|v) = \text{tr}(u\bar{v})$ によって定まる Euclid 構造に associate して定めた (正規化した) Euclid 測度であり, $\lambda = \sum_{j=1}^r \lambda_j c_j$, また $\tilde{c}_0$ は¹²

$$\tilde{c}_0 := (2\pi)^{\frac{n-r}{2}} \prod_{j=1}^r \frac{\Gamma(\frac{d}{2} + 1)}{\Gamma(j\frac{d}{2} + 1)}. \quad (4.3)$$

次に対称錐 Ω 上のガンマ関数と一般階乗ベキを導入する ([FK] Chapter VII). Δ_j を j 次の principal minors, $\mathbf{s} := (s_1, \dots, s_r) \in \mathbf{C}^r$, $|\mathbf{s}| = \sum_{j=1}^r s_j$ とし,

$$\Delta_{\mathbf{s}}(x) := \Delta(x)^{s_r} \prod_{j=1}^{r-1} \Delta_j(x)^{s_j - s_{j+1}} \quad (4.4)$$

とする. ただし $\Delta(x) := \Delta_r(x) = \det(x)$ である. このとき対称錐 Ω 上のガンマ関数を次で導入する.

$$\Gamma_{\Omega}(\mathbf{s}) := \int_{\Omega} e^{-\text{tr}(x)} \Delta_{\mathbf{s}}(x) \Delta(x)^{-\frac{n}{r}} dx. \quad (4.5)$$

$\Gamma_{\Omega}(\mathbf{s})$ は $\Re s_j > (j-1)\frac{d}{2}$ ($j = 1, \dots, r$) で well-defined で,

$$\Gamma_{\Omega}(\mathbf{s}) = (2\pi)^{\frac{n-r}{2}} \prod_{j=1}^r \Gamma\left(s_j - (j-1)\frac{d}{2}\right) \quad (4.6)$$

¹¹但し [FK] では, K 不変とは限らない一般の可積分関数に関する形で述べられている.

¹²[FK] の c_0 との関係は $c_0 = r! \tilde{c}_0$.

となる. 更にこの $\Gamma_\Omega(\mathbf{s})$ を用いて, $\mathbf{s} \in \mathbf{C}^r$ と $\mathbf{m} \in \mathbf{Z}_{\geq 0}^r$ に対し一般階乗ベキ $(\mathbf{s})_{\mathbf{m}}$ を

$$(\mathbf{s})_{\mathbf{m}} := \frac{\Gamma_\Omega(\mathbf{s} + \mathbf{m})}{\Gamma_\Omega(\mathbf{s})} = \prod_{j=1}^r \left(s_j - (j-1)\frac{d}{2} \right)_{m_j} \quad (4.7)$$

で定める.

$\mathcal{P}(V)$ を V 上の多項式環とすると, $\mathcal{P}(V)$ は G の作用で

$$\mathcal{P}(V) = \bigoplus_{\mathbf{m} \in \mathcal{P}} \mathcal{P}_{\mathbf{m}}$$

と無重複に分解される. ここで $\mathcal{P}$ は分割全体

$$\mathcal{P} := \{\mathbf{m} = (m_1, \dots, m_r) \in \mathbf{Z}_{\geq 0}^r \mid m_1 \geq \dots \geq m_r\} \quad (4.8)$$

で, $\mathcal{P}_{\mathbf{m}}$ は有限次元の既約 G 部分加群である. 以下 $\mathcal{P}_{\mathbf{m}}$ の次元を $d_{\mathbf{m}}$ とする.

Lemma 4.5. ([FK] Thm XI.2.3) $\Re \alpha > (r-1)\frac{d}{2}$ のとき, 任意の $p \in \mathcal{P}_{\mathbf{m}}$, $y \in \Omega$ について¹³

$$\int_{\Omega} e^{-(y|x)} p(x) \Delta(x)^{\alpha - \frac{n}{r}} dx = \Gamma_\Omega(\mathbf{m} + \alpha) \Delta(y)^{-\alpha} p(y^{-1}). \quad (4.9)$$

ただし, $\Gamma_\Omega(\mathbf{m} + \alpha)$ において $\alpha = (\alpha, \dots, \alpha) \in \mathbf{C}^r$ とみなしている.

$\mathcal{P}_{\mathbf{m}}$ の K 不変多項式のなす部分空間 $\mathcal{P}_{\mathbf{m}}^K$ は 1 次元であり, 球多項式

$$\Phi_{\mathbf{m}}^{(d)}(x) := \int_K \Delta_{\mathbf{m}}(kx) dk \quad (\mathbf{m} \in \mathcal{P}) \quad (4.10)$$

で生成される. ここで dk は K の normalized Haar 測度である¹⁴. 以下, 重複度 d を適宜省略して単に $\Phi_{\mathbf{m}}(x)$ と書く.

Remark 4.6. (1) $\Phi_{\mathbf{m}} \in \mathcal{P}_{\mathbf{m}}^K$ ゆえ, 極分解 $x = k \sum_{j=1}^r \lambda_j c_j$ より,

$$\Phi_{\mathbf{m}}(\lambda_1, \dots, \lambda_r) := \Phi_{\mathbf{m}} \left(\sum_{j=1}^r \lambda_j c_j \right) (= \Phi_{\mathbf{m}}(x))$$

と表せることに注意しておく.

(2) 主に統計で伝統的に用いられる帯球多項式 $Z_{\mathbf{m}}$ と球多項式 $\Phi_{\mathbf{m}}$ の関係は

$$Z_{\mathbf{m}}(x) = d_{\mathbf{m}} \frac{|\mathbf{m}|!}{\left(\frac{n}{r}\right)_{\mathbf{m}}} \Phi_{\mathbf{m}}(x)$$

¹³ より一般に $y \in \Omega + iV$ について成立する.

¹⁴ よって特に $\Phi_{\mathbf{m}}^{(d)}(e) = 1$ である.

であり, Jack 多項式 $J_{\mathbf{m}}^{(\beta)}$ との関係は

$$J_{\mathbf{m}}^{(\frac{2}{d})}(\lambda_1, \dots, \lambda_r) = \left(\frac{2}{d}\right)^{|\mathbf{m}|} \left(\frac{d}{2}r\right)_{\mathbf{m}} \Phi_{\mathbf{m}}^{(d)}(\lambda_1, \dots, \lambda_r)$$

である.

(3) $r = 2$ のとき, $\Phi_{\mathbf{m}}^{(d)}$ は Gauss の超幾何函数を用いて次のように表せる¹⁵.

$$\Phi_{m_1, m_2}^{(d)}(\lambda_1, \lambda_2) = \lambda_1^{m_1} \lambda_2^{m_2} {}_2F_1 \left(\begin{matrix} -(m_1 - m_2), \frac{d}{2} \\ d \end{matrix}; \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\lambda_1} \right).$$

球多項式 $\Phi_{\mathbf{m}}(x)$ は, 一変数におけるベキ函数 x^m の多変数化であり, これを用いて以下のような Taylor 展開の類似が成り立つ.

Lemma 4.7. ([FK] p.240-244, 球 Taylor 展開) ψ を $e \in V$ 近傍で解析的な K 不変函数とすると, ある複素数列 $\{a_{\mathbf{m}}\} \subset \mathbf{C}$ が unique に存在して¹⁶,

$$\psi(e + u) = \sum_{\mathbf{m} \in \mathcal{P}} d_{\mathbf{m}} \frac{a_{\mathbf{m}}}{\left(\frac{n}{r}\right)_{\mathbf{m}}} \Phi_{\mathbf{m}}(u).$$

この Lemma を用い一般二項係数 $\left(\frac{\mathbf{m}}{\mathbf{k}}\right)_d$ を球多項式 $\Phi_{\mathbf{m}}^{(d)}(x)$ の単位元 e 近傍の球 Taylor 展開の展開係数として導入する.

$$\Phi_{\mathbf{m}}^{(d)}(e + x) = \sum_{\mathbf{k} \subset \mathbf{m}} \left(\frac{\mathbf{m}}{\mathbf{k}}\right)_d \Phi_{\mathbf{k}}^{(d)}(x). \quad (4.11)$$

球多項式 $\Phi_{\mathbf{m}}(x)$ と同様に, 重複度 d は適宜省略して単に $\left(\frac{\mathbf{m}}{\mathbf{k}}\right)$ と書く.

Remark 4.8. (1) 一般二項係数 $\left(\frac{\mathbf{m}}{\mathbf{k}}\right)_d$ は, Shifted Jack 多項式 $P_{\mathbf{k}}^*(\mathbf{m}; \beta)$ を用いて,

$$\left(\frac{\mathbf{m}}{\mathbf{k}}\right)_d = \frac{P_{\mathbf{k}}^*(\mathbf{m}; (\frac{2}{d}))}{H_{(\frac{2}{d})}(\mathbf{k})}$$

と表せることが知られている [OO]. ただし $H_{\beta}(\mathbf{k})$ は $\mathbf{k}$ を分割 (Young diagram) としたときの hook length の積の β 変形,

$$H_{\beta}(\mathbf{k}) := \prod_{\mu \subseteq \mathbf{k}} (a(\mu) + \beta l(\mu) + 1)$$

である¹⁷.

(2) 一変数の場合, 二項係数 $\binom{m}{k}$ と階乗ベキとの間には

$$\binom{m}{k} = (-1)^k \frac{(-m)_k}{k!}$$

¹⁵ d を continuous に考えれば, より一般に Jack 多項式に対しても成り立つ

¹⁶ この $\{a_{\mathbf{m}}\}$ も一変数のときと同様, 函数 ψ の高階微分から決まるが, 詳細は省略する.

¹⁷ ここで $a(\mu), l(\mu)$ は Young 図形の”手長”と”足長”.

という関係があった。しかし多変数の場合, 一般には

$$\binom{\mathbf{m}}{\mathbf{k}} \neq (-1)^{|\mathbf{k}|} d_{\mathbf{k}} \frac{(-\mathbf{m})_{\mathbf{k}}}{\left(\frac{n}{r}\right)_{\mathbf{k}}}$$

となる。超幾何多項式を多変数化する際には, このどちらで考えるのかが重要な点になる。

次いで多変数の Plancherel の定理について述べよう。

Lemma 4.9. ([FK] Chapter IX, Section 3) F を V 上の Fourier 変換

$$(F\psi)(t) := \int_V e^{-i(t|u)} \psi(u) du$$

とする。このとき

$$F : L^2(\Omega) \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}^2(V) \text{ (unitary).}$$

但し,

$$L^2(\Omega) := \{\psi : \Omega \longrightarrow \mathbf{C} \mid \|\psi\|_{\Omega}^2 < \infty\},$$

$$\|\psi\|_{\Omega}^2 := \int_{\Omega} |\psi(u)|^2 du,$$

$$\mathcal{H}^2(V) := \{\Psi : \mathcal{H}_{\Omega} := V + i\Omega \longrightarrow \mathbf{C} \text{ (hol)} \mid \|\Psi\|_V^2 < \infty\},$$

$$\|\Psi\|_V^2 := \frac{1}{(2\pi)^n} \int_V |\Psi(t)|^2 dt.$$

最後に多変数の Laguerre 多項式について述べる。

Theorem 4.10. ([FK] Chapter XV, Section 4) $\alpha > \frac{n}{r} - 1$ とし,

$$L_{\alpha}^2(\Omega) := \{\psi : \Omega \longrightarrow \mathbf{C} \mid \|\psi\|_{\alpha, \Omega}^2 < \infty\},$$

$$\|\psi\|_{\alpha, \Omega}^2 := \frac{2^{r\alpha}}{\Gamma_{\Omega}(\alpha)} \int_{\Omega} |\psi(u)|^2 \Delta(u)^{\alpha - \frac{n}{r}} du,$$

$$\psi_{\mathbf{m}}^{(\alpha)}(u) := e^{-\text{tr}(u)} L_{\mathbf{m}}^{(\alpha-1)}(2u),$$

$$L_{\mathbf{m}}^{(\alpha-1)}(x) := d_{\mathbf{m}} \frac{(\alpha)_{\mathbf{m}}}{\left(\frac{n}{r}\right)_{\mathbf{m}}} \sum_{\mathbf{k} \subseteq \mathbf{m}} \binom{\mathbf{m}}{\mathbf{k}} \frac{1}{(\alpha)_{\mathbf{k}}} \Phi_{\mathbf{k}}(-x),$$

とする。このとき, $\{\psi_{\mathbf{m}}^{(\alpha)}\}_{\mathbf{m}}$ は $L_{\alpha}^2(\Omega)^K$ の直交基底で, そのノルムは

$$\|\psi_{\mathbf{m}}^{(\alpha)}\|_{\alpha, \Omega}^2 = d_{\mathbf{m}} \frac{(\alpha)_{\mathbf{m}}}{\left(\frac{n}{r}\right)_{\mathbf{m}}}.$$

5 Multivariate circular Jacobi polynomials

一変数のとき, Shen の結果は CJ 多項式の性質を, Fourier 変換によって Laguerre 多項式に帰着させるというものだった. Laguerre 多項式に関しては既に多変数化が得られており, 多変数の Fourier 変換 (Plancherel の定理) も知られているので, これらを組み合わせれば Shen の結果が多変数化, 更にその変形も得られることが期待される. これは実際にうまくいって, 次のような結果を得る.

Theorem 5.1. MCJ 多項式 $\phi_{\mathbf{m}}^{(\alpha, \nu)}$ を以下のように定める.

$$\phi_{\mathbf{m}}^{(\alpha, \nu)}(e^{i\theta}) := d_{\mathbf{m}} \frac{(\alpha)_{\mathbf{m}}}{\left(\frac{n}{r}\right)_{\mathbf{m}}} \sum_{\mathbf{k} \subset \mathbf{m}} (-1)^{|\mathbf{k}|} \binom{\mathbf{m}}{\mathbf{k}} \frac{\left(\frac{1}{2} \left(\alpha + \frac{n}{r}\right) + i\nu\right)_{\mathbf{k}}}{(\alpha)_{\mathbf{k}}} \Phi_{\mathbf{k}}(e - e^{i\theta}) \quad (5.1)$$

但し, $\theta = \sum_{j=1}^r \theta_j c_j$ であり,

$$e^{i\theta} = \sum_{j=1}^r e^{i\theta_j} c_j$$

である¹⁸.

$\alpha > \frac{n}{r} - 1, \nu \in \mathbf{R}$ のとき, 任意の $\mathbf{m}, \mathbf{n} \in \mathcal{P}$ について,

$$\begin{aligned} & \frac{\tilde{c}_0}{(2\pi)^n} \int_{\mathbf{T}^r} \phi_{\mathbf{m}}^{(\alpha, \nu)}(e^{i\theta}) \overline{\phi_{\mathbf{n}}^{(\alpha, \nu)}(e^{i\theta})} \\ & \cdot \prod_{j=1}^r (1 - e^{i\theta_j})^{\frac{1}{2}(\alpha - \frac{n}{r}) + i\nu} (1 - e^{-i\theta_j})^{\frac{1}{2}(\alpha - \frac{n}{r}) - i\nu} \prod_{1 \leq k < l \leq r} |e^{i\theta_k} - e^{i\theta_l}|^d d\theta_1 \cdots d\theta_r \\ & = d_{\mathbf{m}} \frac{\Gamma_{\Omega}(\alpha + \mathbf{m})}{\left(\frac{n}{r}\right)_{\mathbf{m}}} \frac{1}{|\Gamma_{\Omega}(\frac{1}{2}(\alpha + \frac{n}{r}) + i\nu)|^2} \delta_{\mathbf{mn}} \end{aligned} \quad (5.2)$$

が成り立つ.

Remark 5.2. (1) $\alpha = \frac{n}{r}, \nu = 0$ のとき, $\phi_{\mathbf{m}}^{(\alpha, \nu)}(e^{i\theta})$ は球多項式に, (5.2) は球多項式の直交関係式に退化する.

$$\begin{aligned} \phi_{\mathbf{m}}^{(\frac{n}{r}, 0)}(e^{i\theta}) &= d_{\mathbf{m}} \sum_{\mathbf{k} \subset \mathbf{m}} (-1)^{|\mathbf{k}|} \binom{\mathbf{m}}{\mathbf{k}} \Phi_{\mathbf{k}}(e - e^{i\theta}) = d_{\mathbf{m}} \Phi_{\mathbf{m}}(e^{i\theta}), \\ \frac{\tilde{c}_0}{(2\pi)^n} \int_{\mathbf{T}^r} \phi_{\mathbf{m}}^{(\frac{n}{r}, 0)}(e^{i\theta}) \overline{\phi_{\mathbf{n}}^{(\frac{n}{r}, 0)}(e^{i\theta})} \prod_{1 \leq k < l \leq r} |e^{i\theta_k} - e^{i\theta_l}|^d d\theta_1 \cdots d\theta_r &= d_{\mathbf{m}} \frac{1}{\Gamma_{\Omega}(\frac{n}{r})} \delta_{\mathbf{mn}}. \end{aligned}$$

ゆえに MCJ 多項式は, 球多項式 $\Phi_{\mathbf{m}}(e^{i\theta})$ の 2-parameter 変形とみなせる.

(2) (5.2) の左辺の積分の weight 関数

$$\prod_{j=1}^r (1 - e^{i\theta_j})^{\frac{1}{2}(\alpha - \frac{n}{r}) + i\nu} (1 - e^{-i\theta_j})^{\frac{1}{2}(\alpha - \frac{n}{r}) - i\nu} \prod_{1 \leq k < l \leq r} |e^{i\theta_k} - e^{i\theta_l}|^d$$

¹⁸ $\Phi_{\mathbf{k}}$ の中のただの e は exponential ではなく, V の単位元である.

は [BNR] で導入された circular Jacobi ensemble (CJE) に他ならない. [BNR] では CJE を density 関数に持つようなランダム行列の構成を行っているが, MCJ 多項式との関連は現在のところ不明である.

証明は一変数の時と全く同様である. まず Lem 4.9 を用いると,

$$\begin{aligned} (\psi_{\mathbf{m}}^{(\alpha)}, \psi_{\mathbf{n}}^{(\alpha)})_{\alpha, \Omega} &= \frac{2^{r\alpha}}{\Gamma_{\Omega}(\alpha)} \int_{\Omega} \Delta(u)^{\frac{1}{2}(\alpha - \frac{n}{r})} \psi_{\mathbf{m}}^{(\alpha)}(u) \overline{\Delta(u)^{\frac{1}{2}(\alpha - \frac{n}{r})} \psi_{\mathbf{n}}^{(\alpha)}(u)} du \\ &= \frac{2^{r\alpha}}{\Gamma_{\Omega}(\alpha)} \frac{1}{(2\pi)^n} \int_V F(\Delta(u)^{\frac{1}{2}(\alpha - \frac{n}{r})} \psi_{\mathbf{m}}^{(\alpha)})(t) \overline{F(\Delta(u)^{\frac{1}{2}(\alpha - \frac{n}{r})} \psi_{\mathbf{n}}^{(\alpha)})(t)} dt \\ &= \frac{2^{r\alpha}}{\Gamma_{\Omega}(\alpha)} \frac{|\Gamma_{\Omega}(\frac{1}{2}(\alpha + \frac{n}{r}))|^2}{(2\pi)^n} \int_V \Psi_{\mathbf{m}}^{(\alpha)}(t) \overline{\Psi_{\mathbf{n}}^{(\alpha)}(t)} dt \end{aligned}$$

となる. ここで $\Psi_{\mathbf{m}}^{(\alpha)}$ は $\psi_{\mathbf{m}}^{(\alpha)}$ の modified Fourier 変換

$$\mathcal{F}_{\alpha}(\psi)(t) := \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2}(\alpha + \frac{n}{r}))} F\left(\psi \Delta(u)^{\frac{1}{2}(\alpha - \frac{n}{r})}\right)(t)$$

の像であり, これは Lem 4.5 を用いて計算すると,

$$\begin{aligned} \Psi_{\mathbf{m}}^{(\alpha)}(t) &:= \mathcal{F}_{\alpha}(\psi_{\mathbf{m}}^{(\alpha)})(t) \\ &= \Delta(e + it)^{-\frac{1}{2}(\alpha + \frac{n}{r})} d_{\mathbf{m}} \frac{(\alpha)_{\mathbf{m}}}{(\frac{n}{r})_{\mathbf{m}}} \sum_{\mathbf{k} \subset \mathbf{m}} (-1)^{|\mathbf{k}|} \binom{\mathbf{m}}{\mathbf{k}} \frac{(\frac{1}{2}(\alpha + \frac{n}{r}))_{\mathbf{k}}}{(\alpha)_{\mathbf{k}}} \Phi_{\mathbf{k}}(2(e + it)^{-1}) \end{aligned}$$

となっていることに注意しよう.

さて $\Psi_{\mathbf{m}}^{(\alpha)}$ は K 不変なので, Lem 4.4 を用いると, $t \in V$ の極分解を $t = k \sum_{j=1}^r \lambda_j c_j$ として,

$$\int_V \Psi_{\mathbf{m}}^{(\alpha)}(t) \overline{\Psi_{\mathbf{n}}^{(\alpha)}(t)} dt = \tilde{c}_0 \int_{\mathbf{R}^r} \Psi_{\mathbf{m}}^{(\alpha)}(\lambda_1, \dots, \lambda_r) \overline{\Psi_{\mathbf{n}}^{(\alpha)}(\lambda_1, \dots, \lambda_r)} \prod_{1 \leq k < l \leq r} |\lambda_k - \lambda_l|^d d\lambda_1 \cdots d\lambda_r.$$

と $\mathbf{R}^r$ 上の積分に書き換えられるが, これを更に $\lambda_j = \cot\left(\frac{\theta_j}{2}\right)$ と変数変換すると,

$$\Psi_{\mathbf{m}}^{(\alpha)}\left(\cot\left(\frac{\theta_1}{2}\right), \dots, \cot\left(\frac{\theta_r}{2}\right)\right) = 2^{-\frac{1}{2}(r\alpha + n)} \prod_{j=1}^r (1 - e^{i\theta_j})^{\frac{1}{2}(\alpha + \frac{n}{r})} \phi_{\mathbf{m}}^{(\alpha, 0)}(e^{i\theta})$$

となり, 結局

$$\begin{aligned} d_{\mathbf{m}} \frac{(\alpha)_{\mathbf{m}}}{(\frac{n}{r})_{\mathbf{m}}} \delta_{\mathbf{mn}} &= (\psi_{\mathbf{m}}^{(\alpha)}, \psi_{\mathbf{n}}^{(\alpha)})_{\alpha, \Omega} \\ &= \frac{\tilde{c}_0}{(2\pi)^n} \frac{\Gamma_{\Omega}(\frac{1}{2}(\alpha + \frac{n}{r}))^2}{\Gamma_{\Omega}(\alpha)} \int_{\mathbf{T}^r} \phi_{\mathbf{m}}^{(\alpha, 0)}(e^{i\theta}) \overline{\phi_{\mathbf{n}}^{(\alpha, 0)}(e^{i\theta})} \\ &\quad \cdot \prod_{j=1}^r (1 - e^{i\theta_j})^{\frac{1}{2}(\alpha - \frac{n}{r})} (1 - e^{-i\theta_j})^{\frac{1}{2}(\alpha - \frac{n}{r})} \prod_{1 \leq k < l \leq r} |e^{i\theta_k} - e^{i\theta_l}|^d d\theta_1 \cdots d\theta_r \\ &=: \|\psi_{\mathbf{m}}^{(\alpha, 0)}\|_{\alpha, \Sigma}^2 \end{aligned} \tag{5.3}$$

となって, $\nu = 0$ の場合の MCJ 多項式の直交性が得られた¹⁹.

$\phi_{\mathbf{m}}^{(\alpha, \nu)}(e^{i\theta})$ を得るには, $\nu \in \mathbf{R}$ に対し, $L_{\alpha}^2(\Omega)^K$ における unitary 作用素

$$m_{\nu} : L_{\alpha}^2(\Omega)^K \longrightarrow L_{\alpha}^2(\Omega)^K \quad (\psi \longmapsto \Delta(u)^{i\nu} \psi)$$

を考え, これも一変数の時と同様に議論すればよい.

ユニタリ同型写像の形で書くと次のようになる. $\mathcal{D}_{\Omega}$ を, tube 領域 $\mathcal{H}_{\Omega} := V + i\Omega$ の逆 Cayley 変換で定まる有界対称領域

$$\mathcal{D}_{\Omega} := p(\mathcal{H}_{\Omega}) \quad (p(z) := (z - ie)(z + ie)^{-1}),$$

Σ をその Shilov 境界とする. このとき

$$\mathcal{H}_{\alpha, \nu}^2(\Sigma) := \{\phi : \mathcal{D}_{\Omega} \longrightarrow \mathbf{C} \text{ (hol)} \mid \|\psi\|_{\alpha, \nu, \Sigma}^2 < \infty\}$$

とし, $\phi \in \mathcal{H}_{\alpha, \nu}^2(\Sigma)^K$ に対し $\|\psi\|_{\alpha, \nu, \Sigma}^2$ を (5.3) で定めた $\|\psi\|_{\alpha, \Sigma}^2$ を用いて

$$\|\phi\|_{\alpha, \nu, \Sigma}^2 := \left| \frac{\Gamma_{\Omega} \left(\frac{1}{2} \left(\alpha + \frac{n}{r} \right) + i\nu \right)}{\Gamma_{\Omega} \left(\frac{1}{2} \left(\alpha + \frac{n}{r} \right) \right)} \right|^2 \left\| \prod_{j=1}^r (1 - e^{i\theta_j})^{i\nu} \phi \right\|_{\alpha, \Sigma}^2$$

で定め²⁰, Fourier 変換 (+Cayley 変換) を

$$\tilde{\mathcal{F}}_{\alpha}(\psi)(e^{i\theta}) := 2^{\frac{1}{2}(r\alpha+n)} \prod_{j=1}^r (1 - e^{i\theta_j})^{-\frac{1}{2}(\alpha + \frac{n}{r})} (\mathcal{F}_{\alpha})(\psi) \left(\sum_{j=1}^r \cot \left(\frac{\theta_j}{2} \right) c_j \right)$$

とする.

Theorem 5.3.

$$\begin{array}{ccc} \tilde{\mathcal{F}}_{\alpha, \nu} := \tilde{\mathcal{F}}_{\alpha+2i\nu} : & L_{\alpha}^2(\Omega)^K & \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}_{\alpha, \nu}^2(\Sigma)^K \quad (\text{unitary}). \\ \downarrow \Psi & & \downarrow \Psi \\ \psi_{\mathbf{m}}^{(\alpha)} & \longmapsto & \phi_{\mathbf{m}}^{(\alpha, \nu)} \end{array}$$

Remark 5.4. MCJ 多項式の直交性を示すのに, 多変数の Laguerre 多項式の直交性を用いた. ところがその多変数 Laguerre 多項式の直交性は, 実は球多項式の weighted Bergmann 空間での直交性に由来する ([FK] Chapter XV, Section 4). すなわち球多項式 $\Phi_{\mathbf{m}}$ を Cayley 変換して, 逆 Laplace 変換をすると $\psi_{\mathbf{m}}^{(\alpha)}$ が得られ, Plancherel の定理よりその直交性も従う. なので球多項式 $\Phi_{\mathbf{m}}$ の 2-parameter 変形である MCJ 多項式 $\phi_{\mathbf{m}}^{(\alpha, \nu)}$ は, 元の球多項式 $\Phi_{\mathbf{m}}$ から得られる, という不思議なことが起こっている.

¹⁹ $\|\psi\|_{\alpha, \Sigma}^2$ は本来 $\mathcal{D}_{\Omega}$ の Shilov 境界上の積分として定義されるが, [FK] Prop X. 2.4 によって V 上の積分となり, 更に極分解して変数変換すると結局 $\mathbf{T}^r$ 上の積分になる.

²⁰Shilov 境界上の一般に K 不変とは限らない関数に関してもノルムは定義される.

6 Concluding remarks

今後の課題としては、第一に MCJ 多項式の基本的な性質の解明がある。一変数の場合には本稿で述べた手法により直交性だけでなく母函数、微分方程式、隣接関係式等多くの基本的性質が得られるが、多変数の場合にはまだ直交性と母函数しかわかっていないのでその他の諸性質の解明を試みたい。

特に後述する固有値問題との関連を考察するためにも微分方程式が欲しいところであるが、多変数 Laguerre 多項式である $\psi_{\mathbf{m}}^{(\alpha)}$ の微分方程式を $\tilde{\mathcal{F}}_{\alpha,\nu}$ で intertwine すると擬微分作用素 (積分) が出てきてしまうため、そう簡単ではない²¹。MCJ 多項式が球多項式に退化する $\alpha = \frac{n}{r}, \nu = 0$ の時には擬微分作用素の項は消え微分作用素の固有函数となるが、一般の場合には擬微分作用素が残る、これをどう扱うかが問題となる。

次に MCJ 多項式の重複度 d を continuous にした拡張 (Jack 化) の問題が挙げられる。実際、既に多変数の Laguerre 多項式に関しては Jack 化がなされており [BF], MCJ 多項式を特殊化した $\phi_{\mathbf{m}}^{(\frac{n}{r},0)}$ は Jack 多項式として実際にそのような拡張がなされるので、一般の MCJ 多項式についてもそのような拡張が期待される。応用する上でもこの拡張は非常に意味があり、それゆえに重要な問題である。しかしその証明となると「対称錐上の解析」を用いる手法では限界があり、Jack 多項式をはじめとする多くの多変数直交多項式系と同様に、MCJ 多項式を同時固有函数にもつような可換な微分作用素族の固有値問題を考察する必要があると考えられる。またそれと密接に関連する問題として、(非対称)Jack 多項式が (A 型の) 退化二重 Hecke 代数で記述されることから、その変形である MCJ 多項式の同様な代数的取り扱いに関する研究も挙げられる。

最後に MCJ 多項式の応用、特にランダム行列との関係をあげておきたい。既に述べたように、MCJ 多項式は CJE を weight 函数とする直交多項式系であるが、それがランダム行列論の文脈でどういう意味を持つのかは現在のところ不明である。CJE ないしはそれを density にもつランダム行列由来の何らかの期待値の計算と関連するとは期待されるが、詳細は今後の課題である。

参考文献

- [A] R. Askey: Discussion of Szegő's paper *Beiträge zur Theorie der Toeplitzschen Formen*, in G. Szegő, *Collected Works*, Vol. I, Birkhäuser, Boston, 1982, 303-305.

²¹これは一変数のときも生じる問題であるが、この場合はうまく処理して微分関係式を導出できる。

- [BF] T. H Baker and P. J. Forrester: The Calogero-Sutherland model and generalized classical polynomials, *Commun. Math. Phys.* 188 (1997), 175-216.
- [BNR] P. Bourgade, A. Nikeghbali and A. Rouault: Circular Jacobi ensembles and deformed Verblunsky coefficients, *IMRN*. 23 (2009), 4357-4394.
- [D] C. F. Dunkl: The Poisson kernel for Heisenberg polynomials on the disk, *Math. Zeit.* 187 (1984), 527-547.
- [FK] J. Faraut and A. Koranyi: *Analysis on symmetric cones*, Clarendon Press, Oxford, 1994.
- [FW] J. Faraut and M. Wakayama: Hermitian symmetric spaces of tube type and multivariate Meixner-Pollaczek polynomials, arXiv:0812.1292 (2008).
- [GK] G. Greiner and T. Koornwinder: Variations on the Heisenberg spherical harmonics, *Stichting Mathematisch Centrum. ZW 186/83* (1983), 1-38.
- [I] M. Ismail: *Classical and Quantum Orthogonal Polynomials in One Variable*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, 98. Cambridge University Press, 2009.
- [KLS] R. Koekoek, P. A. Lesky and R. F. Swarttouw: *Hypergeometric Orthogonal Polynomials and Their q -analogues*, Springer-Verlag, 2010.
- [M] I. G. Macdonald: *Symmetric functions and Hall polynomials*, Oxford University Press, 1995.
- [OO] A. Okounkov and G. Olshanski: Shifted Jack polynomials, binomial formula, and applications, *Math. Res. Letters* 4 (1997), 69-78.
- [S] L. Shen: Orthogonal polynomials on the unit circle associated with the Laguerre polynomials, *Proc. Amer. Math. Soc.* 129 (2001), 873-879.