

不変式で生成されるイデアル

(Ideals generated by invariant polynomials)

和地輝仁 (北海道教育大学)

概要

複素鏡映群 G は多項式環 R に自然に作用し、不変式部分環は基本不変式で生成される多項式環になる。基本不変式で生成される R のイデアルを I とするとき、剰余環 R/I は G の余不変式環と呼ばれ、その性質はよく知られている。本講演では、イデアル I の代わりに、基本不変式とは限らない、定数ではない斉次 G -不変式で生成されるイデアル J をとり、剰余環 R/J を考える。例えば、 R/J がベクトル空間として有限次元になる条件や、 R/J の次数 G -加群構造などを調べる。

また、関連する話題として、複素鏡映群の余不変式環の強レフシェッツ性について、これまでわかっている事実を述べる。

1 序

序では、対称群の場合で説明をするが、本講演では、対称群に限らず、複素鏡映群で議論をする。 n 次対称群 S_n が、多項式環 $R = \mathbb{C}[x_1, x_2, \dots, x_n]$ に作用しているとき、不変式部分環

$$R^{S_n} = \{f \in R \mid \sigma f = f, \sigma \in S_n\}$$

は、 n 個の多項式で生成される多項式環であることが知られており、その生成系を基本不変式と呼ぶ。基本不変式は、一意的ではないが、例えば基本対称式 $e_1, e_2, \dots, e_n$ でとれる。つまり、

$$R^{S_n} = \mathbb{C}[e_1, e_2, \dots, e_n]$$

である。 I を、 R の基本不変式で生成されるイデアル、つまり $I = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ とおくと、剰余環

$$R/I = \mathbb{C}[x_1, x_2, \dots, x_n]/(e_1, e_2, \dots, e_n)$$

を、対称群の余不変式環と呼ぶ。対称群の余不変式環は、次のような性質を持つ。

- (1) (S_n -加群構造) S_n -加群として、 $R/I \simeq \mathbb{C}S_n$ である。
- (2) (調和多項式) R の次数部分ベクトル空間 H が存在して、 $H \otimes_{\mathbb{C}} R^{S_n} \simeq R$ ($h \otimes f \mapsto hf$) が同型になる。
- (3) (次数 S_n -加群構造) R/I に出現する各 S_n -既約表現の重複度は (1) よりわかるが、より詳しく、 R/I の各斉次成分における重複度もわかる (fake degree)。

さて、基本不変式とは限らない、斉次で定数ではない S_n -不変式の列 $f_1, f_2, \dots, f_n \in R^{S_n}$ をとり、 $J = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ とおいたとき、剰余環

$$R/J = \mathbb{C}[x_1, x_2, \dots, x_n]/(f_1, f_2, \dots, f_n)$$

に対して、上の余不変式環の性質に対応することを調べるのが本講演の目的である。時間が許せば、加えて、余不変式環 R/I や、剰余環 R/J の強レフシェッツ性についても触れる。

表 1: 既約な実鏡映群

型	G	位数	基本次数	
A_n	S_{n+1}	$(n+1)!$	$2, \dots, n+1$	$(n \geq 1)$
B_n	$S_n \ltimes (\mathbb{Z}_2)^n$	$2^n n!$	$2, 4, \dots, 2n$	$(n \geq 2)$
D_n	$S_n \ltimes (\mathbb{Z}_2)^{n-1}$	$2^{n-1} n!$	$2, 4, \dots, 2(n-1); n$	$(n \geq 4)$
E_6		51840	$2, 5, 6, 8, 9, 12$	
E_7		2903040	$2, 6, 8, 10, 12, 14, 18$	
E_8		696729600	$2, 8, 12, 14, 18, 20, 24, 30$	
F_4		1152	$2, 6, 8, 12$	
G_2		12	$2, 6$	
H_3		120	$2, 6, 10$	
H_4		14400	$2, 12, 20, 30$	
$I_2(m)$		$2m$	$2, m$	$m = 5 \text{ or } m \geq 7$

2 複素鏡映群の余不変式環

2.1 複素鏡映群

本講演では、有限複素鏡映群のみ考える。

定義 1 (複素鏡映群). $\mathbb{C}^n$ 上の鏡映とは、恒等写像ではないが、ある超平面上では恒等写像であるような、対角化可能な線型写像のことである。特に、位数有限の鏡映は、対角化可能で、その固有値は 1 が重複度 $n-1$ であり、残りひとつの固有値は 1 の冪根であるような、恒等写像ではないユニタリ変換のことである。

$\mathbb{C}^n$ 上のいくつかの鏡映で生成される群を複素鏡映群と呼ぶ。

注意 2. 実鏡映群 (有限コクセター群、表 1) は、複素鏡映群であり、かつ、固有値が「1 の冪根」とあるところを、「-1」に換えたものに相当する。また、ワイル群は、実鏡映群のうち、 $H_3, H_4, I_2(m)$ 型を除いたものに相当する。

定理 3 (Shephard-Todd [13]). G を $U(n)$ の有限部分群とし、 $R = \mathbb{C}[x_1, x_2, \dots, x_n]$ に自然に作用しているとすると次は同値である。

- (1) G は複素鏡映群である。
- (2) R の G -不変式部分環 R^G は、 n 個の代数独立な G -不変式で生成される多項式環である。

上の定理における、複素鏡映群の不変式部分環を生成する n 個の不変式を基本不変式と呼ぶ。基本不変式は、代数独立よりも強く、正則列 (定義は、定義 11 に後述するが、ここでは、基本不変式で生成されるイデアルによる剰余環が、ベクトル空間として有限次元になることと思って構わない) になることが知られている。基本不変式は一意的ではないが、斉次にとることができ、その次数は一意的である。この次数たちを G の基本次数と呼ぶ。また、基本次数の積は群の位数に等しい。

定理 4 (Shephard-Todd [13]). 既約な有限複素鏡映群は次のように分類される。

1. n 次対称群 ($n \geq 2$)
2. $G(r, p, n)$ ($r \geq 2, n \geq 1, p \mid r, (r, p, n) \neq (2, 2, 2)$)
3. 34 個の primitive 群

ただし、 $G(r, p, n)$ は、

$$G(r, p, n) = A(r, p, n) \rtimes S_n,$$

$$A(r, p, n) = \left\{ \begin{pmatrix} \omega_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \omega_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \omega_n \end{pmatrix} \mid \begin{array}{l} (\omega_j)^r = 1 \text{ and} \\ (\omega_1 \omega_2 \cdots \omega_n)^{r/p} = 1 \end{array} \right\}$$

で定義され、その位数などを表 2 に示した。34 個の primitive 群は、表 3 に位数などを示した。

2.2 複素鏡映群の余不変式環

$G \subset U(n)$ を階数 n の複素鏡映群とし、 $R = \mathbb{C}[x_1, x_2, \dots, x_n]$ に自然に作用しているとする。 G の基本不変式で生成される R のイデアルを I とする。複素鏡映群の余不変式環に対して以下の事実が知られている。

命題 5 (G -加群構造). G の余不変式環 R/I は、 G の群環 $\mathbb{C}G$ と G -加群同型である。

命題 6 (調和多項式). (1) $H \oplus I = R$ を満たす R の部分次数ベクトル空間 H に対して、

$$\begin{aligned} H \otimes_{\mathbb{C}} R^G &\simeq R \\ h \otimes f &\mapsto hf \end{aligned}$$

は同型である。つまり、 R は R^G 上自由である。さらに、 H として、 R の次数 G -部分加群であるものをとれば、上の同型は、次数 G -加群としての同型である。

(2) 上の H として、

$$H = \{h \in R \mid f(\partial)(h) = 0, f \in I\}$$

がとれる。ここに、 $f(\partial)$ は、 f の変数に対応する偏微分作用素を代入して得られる、定数係数微分作用素である。特に、こうして定めた H は次数 G -加群である。

表 2: $G(r, p, n)$

群	階数	位数	基本次数
$G(r, p, n)$	n	$r^n n! / p$	$r, 2r, \dots, (n-1)r; nr/p$

表 3: primitive な既約複素鏡映群

No.	階数	位数	基本次数	No.	階数	位数	基本次数	
4	2	24	4, 6	23	3	120	2, 6, 10	H_3
5	2	72	6, 12	24	3	336	4, 6, 14	
6	2	48	4, 12	25	3	648	6, 9, 12	
7	2	144	12, 12	26	3	1296	6, 12, 18	
8	2	96	8, 12	27	3	2160	6, 12, 30	
9	2	192	8, 24	28	4	1152	2, 6, 8, 12	F_4
10	2	288	12, 24	29	4	7680	4, 8, 12, 20	
11	2	576	24, 24	30	4	14400	2, 12, 20, 30	H_4
12	2	48	6, 8	31	4	$64 \cdot 6!$	8, 12, 20, 24	
13	2	96	8, 12	32	4	$216 \cdot 6!$	12, 18, 24, 30	
14	2	144	6, 24	33	5	$72 \cdot 6!$	4, 6, 10, 12, 18	
15	2	288	12, 24	34	6	$108 \cdot 9!$	6, 12, 18, 24, 30, 42	
16	2	600	20, 30	35	6	$72 \cdot 6!$	2, 5, 6, 8, 9, 12	E_6
17	2	1200	20, 60	36	7	$8 \cdot 9!$	2, 6, 8, 10, 12, 14, 18	E_7
18	2	1800	30, 60	37	8	$192 \cdot 10!$	2, 8, 12, 14, 18, 20, 24, 30	E_8
19	2	3600	60, 60					
20	2	360	12, 30					
21	2	720	12, 60					
22	2	240	12, 20					

命題 6 の H の最高次成分は 1 次元であるが、命題 6 の (2) のようにとった H の最高次成分の基底を、 R/I の **Macaulay dual** と呼ぶ。一般に Macaulay dual は、Artin Gorenstein 環と呼ばれる次数環に対して定義される (次数環が Artin であることはベクトル空間として有限次元であることと同値であり、Artin 次数環が Gorenstein であるとは、どんな 1 次式を乗じてでも 0 になる元のなす部分空間が 1 次元であることと同値である)。

定義 7 (Macaulay dual). $R = \mathbb{C}[x_1, x_2, \dots, x_n]$, $Q = \mathbb{C}[\partial_1, \partial_2, \dots, \partial_n]$ とする。ただし、 ∂_j は x_j に対応する偏微分作用素であり、 Q は R 上に偏微分で作用する。 Q の斉次イデアル J により、 Q/J が Artin Gorenstein であるとき、 $F \in R$ であって、

$$\text{Ann}_Q(F) = J$$

となるものが、定数倍を除いて一意に存在する。

R のイデアル I に対して、 R/I が Artin Gorenstein のとき、 R と Q を自然に同一視して、 I に対応する Q のイデアルを J とし、上のように、 $\text{Ann}_Q(F) = J$ を満たす $F \in R$ をとる。この F を、 R/I の **Macaulay dual** と呼ぶ。

このとき、Macaulay dual F の任意の偏微分全体で張られる空間、つまり、 $Q.F \subset R$ は、

$$Q.F \oplus I = R$$

を満たすことが知られている。

余不変式環の次数 G -加群構造、つまり、各斉次成分にどの既約表現がいくらの重複度で出現するかは、特に、 G が対称群の場合は、良く知られた組合せ論的公式がある。

n 次対称群 S_n の既約表現の同値類は、 n の分割 λ でパラメトライズされる。分割は、文脈によってはヤング図形とみなす。 λ に対応する既約表現を S^λ で表し、 S_n の余不変式環 $R/I = \mathbb{C}[x_1, x_2, \dots, x_n]/(e_1, e_2, \dots, e_n)$ における、 S^λ の次数付き重複度を、次で定める。

$$\text{grmult}(R/I, \lambda) = \sum_{i \geq 0} [(R/I)_i : S^\lambda] q^i.$$

ただし、 $[(R/I)_i : S^\lambda]$ は、 R/I の i 次斉次成分における、 S^λ の重複度を表す。このとき、次の公式が知られている。

命題 8 (Stanley. 対称群の既約表現の fake degree). n 次対称群 S_n の余不変式環 R/I における、既約表現 S^λ の次数付き重複度は、次で与えられる。

$$\text{grmult}(R/I, \lambda) = q^{n(\lambda)} \cdot \frac{[n]!}{\prod_{x \in \lambda} [h(x)]}.$$

ただし、 $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots)$ は n の分割であり ($\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots$)、 $h(x)$ はヤング図形 λ の箱 x におけるフック長を表し、

$$n(\lambda) = \sum_{i \geq 1} (i-1)\lambda_i$$

である。また、非負整数 a に対し、 q -整数 $[a]$ と、 q -階乗 $[a]!$ を

$$[a] = 1 + q + \dots + q^{a-1}, \quad [a]! = [1][2] \cdots [a]$$

と定める。

例 9. 4 次対称群の余不変式環 R/I は、斉次成分の次元が、0 次斉次成分から順に、1, 3, 5, 6, 5, 3, 1 である。 $\lambda = (2, 2)$ でパラメトライズされる 2 次元既約表現の次数付き重複度は

$$\text{grmult}(R/I, \lambda) = q^2 \frac{[1][2][3][4]}{[3][2][2][1]} = q^2 + q^4$$

である。つまり、余不変式環の 2 次と 4 次の斉次成分に 1 つずつ S^λ が現れる。

また、複素鏡映群 $G(r, p, n)$ に対しても、組合せ論的な記述がある。複素鏡映群 $G(r, 1, n)$ の既約表現は、分割の列 $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{r-1})$ であって、 $\sum_i |\alpha_i| = n$ なるものでパラメトライズされる。分割 α_i に対して、 m_i を分割の長さとし、列 T_i を $T_i = \alpha_i + (m_i - 1, m_i - 2, \dots, 0)$ で定める。

命題 10 (次数 G -加群構造. Malle [9]). 複素鏡映群 $G(r, 1, n)$ の余不変式環を R/I とし、複素鏡映群 $G(r, p, n)$ の余不変式環を R/I' とする。

(1) $G(r, 1, n)$ の余不変式環 R/I における、分割の列 $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{r-1})$ でパラメトライズされる既約表現の次数付き重複度は、次で与えられる。

$$\text{grmult}(R/I, \alpha) = \prod_{i=1}^n (x^{ir} - 1) \prod_{i=0}^{d-1} \frac{\Delta(T_i, x^r) x^{i|\alpha_i|}}{\Theta(T_i, x^r) x^{r \binom{m_i-1}{2} + r \binom{m_i-2}{2} + \dots}}$$

ここに、正整数の有限集合 T に対して、

$$\Delta(T, x) = \prod_{\substack{\lambda, \lambda' \in T, \\ \lambda < \lambda'}} (x^\lambda - x^{\lambda'}), \quad \Theta(T, x) = \prod_{\lambda \in T} \prod_{h=1}^{\lambda} (x^h - 1)$$

である。

- (2) $G(r, p, n)$ の余不変式環 R/I' における、 $G(r, p, n)$ の既約表現 χ の次数付き重複度は、次で与えられる。

$$\text{grmult}(R/I', \chi) = \frac{x^{rn/p} - 1}{x^{rn} - 1} \cdot \sum_{\alpha \in \widehat{G(r, 1, n)}} \langle \chi, \alpha |_{G(r, p, n)} \rangle \cdot \text{grmult}(R/I, \alpha).$$

また、例外型ワイル群などを含む、34 個の例外型複素鏡映群についても、次数 G -加群構造は知られている。

3 正則列になるための必要条件

3.1 正則列

G を階数 n の複素鏡映群、 $R = \mathbb{C}[x_1, x_2, \dots, x_n]$ とし、 I を基本不変式で生成される R のイデアルとする。また、基本不変式とは限らない、定数ではない斉次不変式からなる列 $f_1, f_2, \dots, f_n \in R^G$ をとり、 $J = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ により R のイデアル J を定める。 R/I はベクトル空間として有限次元であったが、 R/J は有限次元になるとは限らない。 R/J がベクトル空間として有限次元になるとき、列 $f_1, f_2, \dots, f_n$ を正則列と呼ぶ。正則列は、一般には次で定義されるが、本講演においては、長さ n の正則列しか考えないので、その場合は、剰余環がベクトル空間として有限次元であることと同値である。

定義 11 (正則列). 環 R の元の列 $f_1, f_2, \dots, f_m$ が正則列であるとは、次の条件を満たすことを言う。

1. f_1 は非零因子である
2. 各 $2 \leq i \leq m$ に対し、 f_i は $R/(f_1, f_2, \dots, f_{i-1})$ の非零因子である

以下、この節では次の問題を考える。

問題 12. G を階数 n の複素鏡映群、 $R = \mathbb{C}[x_1, x_2, \dots, x_n]$ とする。基本不変式とは限らない、定数ではない斉次 G -不変式からなる列 $f_1, f_2, \dots, f_n \in R^G$ が、正則列になるための必要十分条件は何か。

3.2 Conca-Krattenthaler-Watanabe の結果

問題 12 については、ほぼ何もわかっていないといってよいが、 G が対称群である場合は、Conca-Krattenthaler-Watanabe [3] に部分的な回答がある。Conca-Krattenthaler-Watanabe [3] では、主に、冪対称式からなる列や、完全対称式からなる列が正則列になる条件を調べ、条件を与えたり予想を立てたりしている。

また、本講演では触れないが、Kumar [8] では、列の長さが n 未満の場合に対する正則列であるための条件や、素イデアルを生成するための条件を考察している。

命題 13 ([3, Conca-Krattenthaler-Watanabe]). a, b, c, d を異なる正整数とする。

- (1) 2 変数多項式環において、冪和対称式の列 p_a, p_b が正則列であることは、 a/g と b/g の少なくとも一方が偶数であることと同値である。ただし、 $g = \gcd(a, b)$ である。
- (2) 2 変数多項式環において、完全対称式の列 h_a, h_b が正則列であることは、 $\gcd(a+1, b+1) = 1$ であることと同値である。
- (3) 3 変数多項式環において、 p_a, p_b, p_c が正則列ならば、 $6 \mid abc$ である。
- (4) 3 変数多項式環において、 h_a, h_b, h_c が正則列ならば、次の 3 条件を満たす。
 - (a) $6 \mid abc$
 - (b) $\gcd(a+1, b+1, c+1) = 1$
 - (c) 3 以上の任意の整数 t に対して、ある $u \in \{a, b, c\}$ が、 $u+2 \not\equiv 0, 1 \pmod{t}$ を満たす。
- (5) 4 変数多項式環において、 p_a, p_b, p_c, p_d が正則列ならば、次の 3 条件を満たす。
 - (a) a, b, c, d のうち、少なくとも 2 つが 2 の倍数であり、少なくとも 1 つが 3 の倍数であり、少なくとも 1 つが 4 の倍数である。
 - (b) E を a, b, c, d のうち偶数のものからなる集合とし、 $g = \gcd(E)$ とすると、集合 $\{t/g \mid t \in E\}$ は偶数を含む。
 - (c) $\{a, b, c, d\}$ は $\{t, 2t, 5t\}$ の形の部分集合を含まない。

注意 14. 命題 13 の (3), (4), (5) の逆も成立すると、[3] では予想している。そして、(3) については、 $a = 1$ かつ $2 \leq b \leq 7$ の場合などに逆が成立することを示している。

3.3 不変式の列が正則列になるための必要条件

問題 12 について、必要条件であれば、一般の複素鏡映群に対して結果が得られる。次の補題は、その必要条件を導くために用い、また、4.2 の定理 24 にも必要である。

補題 15. G を階数 n の複素鏡映群とし、 $R = \mathbb{C}[x_1, x_2, \dots, x_n]$ に自然に作用しているとする。 $f_1, f_2, \dots, f_n \in R^G$ が、定数ではない斉次 G -不変式からなる正則列であるとする。このとき、次が成立する。

- (1) 次の同型を与えるような、 R の次数 G -部分加群 H が存在する:

$$\begin{array}{ccc} H \otimes_{\mathbb{C}} R^G & \simeq & R \\ h \otimes f & \mapsto & hf \end{array} \quad (R^G\text{-加群同型}).$$

- (2) 次の同型を与えるような、 R の次数 G -部分加群 H と、 R^G の次数部分空間 U が存在する:

$$\begin{array}{ccc} H \otimes_{\mathbb{C}} U \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[f_1, f_2, \dots, f_n] & \simeq & R \\ h \otimes u \otimes f & \mapsto & uhf \end{array} \quad (\mathbb{C}[f_1, f_2, \dots, f_n]\text{-加群同型}).$$

(3) 次の同型を与えるような、 R の次数 G -部分加群 V が存在する:

$$\begin{array}{ccc} V \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[f_1, f_2, \dots, f_n] & \simeq & R \\ v \otimes f & \mapsto & vf \end{array} \quad (\mathbb{C}[f_1, f_2, \dots, f_n]\text{-加群同型}).$$

さらに、 H の場合と同様に、 $R/(f_1, f_2, \dots, f_n)$ の Macaulay dual のすべての偏微分で張られる空間を V としてとることができる。

上の 3 つの同型は、次数 G -加群同型でもある。

Proof. (1) は命題 6 で既に見た。(3) は (2) の $H \otimes_{\mathbb{C}} U$ (を積で R に写した像) を V とおけば直ちに得られる。また、3 つの同型が、次数 G -加群同型になることは、 H, U, V が G -加群であることと、同型写像の形から明らかである。

(2) を示す。Bruns-Herzog [2, Lemma 6.4.14] を用いると、 R^G は $\mathbb{C}[f_1, f_2, \dots, f_n]$ 上自由であり、その基底は斉次式でとれることがわかる。その基底で張られる次数ベクトル空間を $U \subset R^G$ とすると、

$$R^G \simeq U \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[f_1, f_2, \dots, f_n]$$

となる。これと (1) を合わせると、求める同型が従う。 $\square$

この補題を用いると次の定理が証明できる。

定理 16. G を階数 n の複素鏡映群とし、基本次数を $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n$ とする。 G が $R = \mathbb{C}[x_1, x_2, \dots, x_n]$ に自然に作用しており、 $f_1, f_2, \dots, f_n \in R$ が、定数ではない斉次 G -不変式からなる正則列であるとし、 $d_j = \deg f_j$ とおく。このとき、次が成立する。

- (1) $\frac{(1 - q^{d_1})(1 - q^{d_2}) \cdots (1 - q^{d_n})}{(1 - q^{\delta_1})(1 - q^{\delta_2}) \cdots (1 - q^{\delta_n})}$ は非負整数係数多項式である。
- (2) 任意の $k \geq 1$ に対して、 $\#\{j \mid d_j \text{ は } k \text{ の倍数である}\} \geq \#\{j \mid \delta_j \text{ は } k \text{ の倍数である}\}$ 。
- (3) $\#G \mid d_1 d_2 \cdots d_n$ である。

Proof. (1) 補題 15 の (1) と (2) の左辺どうしは等しいから、それらを比較すると、 U のヒルベルト関数がわかる。

$$\begin{aligned} \text{Hilb}(U) &= \frac{\text{Hilb}(R^G)}{\text{Hilb}(\mathbb{C}[f_1, f_2, \dots, f_n])} \\ &= \frac{(\prod_{i=1}^n (1 - q^{\delta_i}))^{-1}}{(\prod_{i=1}^n (1 - q^{d_i}))^{-1}} \\ &= \frac{\prod_{i=1}^n (1 - q^{d_i})}{\prod_{i=1}^n (1 - q^{\delta_i})}. \end{aligned}$$

これはベクトル空間として有限次元である U のヒルベルト関数だから、非負整数係数多項式でなくてはならない。

(2) $\Phi_k = \Phi_k(q)$ を、1 の原始 k 乗根を根に持つ円周等分多項式とする。 Φ_k は既約な整数係数 monic 多項式であり、

$$1 - q^d = \prod_{k \mid d} \Phi_k$$

を満たす。(1) の分数式を分子も分母も Φ_k を用いて書き直すと、これが多項式になるためには、各 k に対して、分母に現れる Φ_k の個数よりも分子に現れる Φ_k の個数が以上でなくてはならない。これは、(2) で求める条件に他ならない。

(3) (1) において、 $q \rightarrow 1$ とすると、 $d_1 d_2 \cdots d_n / \delta_1 \delta_2 \cdots \delta_n$ となるが、これは整数でなくてはならない。よって、 $\delta_1 \delta_2 \cdots \delta_n \mid d_1 d_2 \cdots d_n$ である。最後に、 $\#G = \delta_1 \delta_2 \cdots \delta_n$ だから、 $\#G \mid d_1 d_2 \cdots d_n$ である。□

$G = S_n$ の場合に定理 16 の (2) と (3) を書き下すと、直ちに次の系が得られる。

系 17. $R = \mathbb{C}[x_1, x_2, \dots, x_n]$ とする。 $f_1, f_2, \dots, f_n \in R^{S_n}$ を定数ではない斉次対称式からなる正則列であるとし、 $d_j = \deg f_j$ とおく。このとき、次が成立する。

(1) 任意の $k \geq 1$ に対して、 $\#\{j \mid d_j \text{ は } k \text{ の倍数である}\} \geq \lfloor n/k \rfloor$.

(2) $n! \mid d_1 d_2 \cdots d_n$ である。

また、 $G = G(r, 1, n)$ の場合に定理 16 の (2) と (3) を書き下すと次の系が得られる。

系 18. $r \geq 2, n \geq 1$ とし、 $R = \mathbb{C}[x_1, x_2, \dots, x_n]$ とおく。 $f_1, f_2, \dots, f_n \in R^G$ を、斉次で、定数ではない、 $x_1^r, x_2^r, \dots, x_n^r$ に関する対称式からなる正則列であるとする。 $\deg f_j = r d_j$ とおくと、次が成立する。

(1) 任意の $k \geq 1$ に対して、 $\#\{j \mid d_j \text{ は } k \text{ の倍数である}\} \geq \lfloor n/k \rfloor$.

(2) $n! \mid d_1 d_2 \cdots d_n$ である。

Proof. (1) 基本次数は、 $r, 2r, \dots, nr$ であるから、定理 16 の (2) を適用すると、任意の $k \geq 1$ に対して、 $\#\{j \mid r d_j \text{ は } k \text{ の倍数である}\} \geq \#\{j \mid r j \text{ は } k \text{ の倍数である}\}$ がいえるが、 k が r の倍数 $k = r k'$ のときにこの条件を書き直すと、任意の $k' \geq 1$ に対して、 $\#\{j \mid d_j \text{ は } k' \text{ の倍数である}\} \geq \#\{j \mid j \text{ は } k' \text{ の倍数である}\}$ となる。この右辺は $\lfloor n/k' \rfloor$ に等しいので、求める条件が得られたことになる。

(2) 定理 16 の (3) を適用すると、 $r \cdot 2r \cdots nr \mid r d_1 \cdot r d_2 \cdots r d_n$ となる。これは求める条件に他ならない。□

例 19. $R = \mathbb{C}[x_1, x_2, x_3, x_4]$ とする。

(1) $f_1, f_2, f_3, f_4 \in R^{S_4}$ を斉次で定数ではない対称式からなる列とし、次数を順に、1, 2, 5, 12 とする。これは、系 17 の (2) は満たすが (1) は満たさないので、 f_j をどのようにとろうとも決して正則列にはならない。

(2) 冪対称式からなる列 $p_1, p_3, p_4, p_{12} \in R^{S_4}$ は正則ではない。しかし、次数は系 17 の条件を満たしている。代わりに、完全対称式からなる列 $h_1, h_3, h_4, h_{12} \in R^{S_4}$ をとれば、これは正則列である。

例 20. $G = S_3, S_4$ の場合を考え、Conca-Krattenthaler-Watanabe の結果と比較してみる。

(1) $G = S_3$ のとき、系 17 の (2) は、 $6 \mid d_1 d_2 d_3$ であるから、 d_1, d_2, d_3 の中に、2 の倍数も 3 の倍数も少なくとも 1 つはある。すると、(1) は自動的に満たされるので、(1) の条件は不要である。

従って、 $G = S_3$ の場合は、 f_1, f_2, f_3 が正則列ならば $6 \mid d_1 d_2 d_3$ という主張になり、これは、Conca-Krattenthaler-Watanabe の結果、命題 13 の (3) の一般化になっている。ここで言う一般化とは、冪和対称式を任意の対称式に一般化したという意味である。

- (2) $G = S_4$ のとき、系 17 の (2) は、 $k = 1, 2, 3, 4$ のおのおのに対して、 d_1, d_2, d_3, d_4 の中に k の倍数が少なくとも $\lfloor 4/k \rfloor$ 個ある、と読める。これは、Conca-Krattenthaler-Watanabe の結果、命題 13 の (4) (a) に相当する。

Conca-Krattenthaler-Watanabe では、実質的には、一般の n についても系 17 の (2) を示している (つまり、必要条件のみ)。従って、系 17 の (2) は、Conca-Krattenthaler-Watanabe の結果を、冪和対称式から任意の対称式に一般化したと言える。

4 次数 G -加群構造

4.1 R/J における既約表現の次数付き重複度

G を階数 n の複素鏡映群とし、 $R = \mathbb{C}[x_1, x_2, \dots, x_n]$ に自然に作用しているとする。 I を G の基本不変式で生成されるイデアルとし、 $J = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ を、基本不変式とは限らない、定数ではない斉次 G -不変式の列で生成されるイデアルとする。補題 15 の記号 H, U, V をそのまま用いると、次数 G -加群として、 $R/I \simeq H$ かつ $R/J \simeq V$ であり、補題 15 の (2) と (3) より、 $V \simeq H \otimes_{\mathbb{C}} U$ であるから、

$$R/J \simeq R/I \otimes_{\mathbb{C}} U \quad (\text{次数 } G\text{-加群同型}) \quad (1)$$

である。

U は R^G の部分空間だから、 G -加群としては自明な加群のいくつかのコピーである。 G の基本次数を $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n$ と書き、 $d_j = \deg f_j$ とおくと、定理 16 の (1) の証明でも見たが、補題 15 より、 U のヒルベルト関数は、

$$\text{Hilb}(U) = \frac{(1 - q^{d_1})(1 - q^{d_2}) \cdots (1 - q^{d_n})}{(1 - q^{\delta_1})(1 - q^{\delta_2}) \cdots (1 - q^{\delta_n})} = \frac{[d_1][d_2] \cdots [d_n]}{[\delta_1][\delta_2] \cdots [\delta_n]}$$

とわかる。ただし、 $[a] = 1 + q + \cdots + q^{a-1}$ は q -整数である。以上より、余不変式環における次数付き重複度がわかれば、 R/J においてもわかるので、次を得る。

定理 21. G を階数 n の複素鏡映群とし、 $R = \mathbb{C}[x_1, x_2, \dots, x_n]$ に自然に作用しているとする。 I を G の基本不変式で生成されるイデアルとし、 $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n$ を基本次数とする。また、 $J = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ を、基本不変式とは限らない、定数ではない斉次 G -不変式の列で生成されるイデアルとし、 $d_j = \deg f_j$ とする。このとき、 G の既約表現 π の R/J における次数付き重複度は、

$$\text{grmult}(R/J, \pi) = \text{grmult}(R/I, \pi) \cdot \frac{[d_1][d_2] \cdots [d_n]}{[\delta_1][\delta_2] \cdots [\delta_n]}$$

で与えられる。

特に、 $G = S_n$ の場合は、命題 8 と合わせて次を得る。

系 22. $\mathbb{C}[x_1, x_2, \dots, x_n]$ に n 次対称群 S_n が作用しており、 $f_1, f_2, \dots, f_n$ を、定数ではない斉次 S_n -不変式からなる正則列とし、 $J = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ とする。剰余環 R/J における既約表現 S^λ の次数付き重複度は、次で与えられる。

$$\text{grmult}(R/J, \lambda) = q^{n(\lambda)} \cdot \frac{[d_1][d_2] \cdots [d_n]}{\prod_{x \in \lambda} [h(x)]}.$$

記号は、命題 8 と同じものを用いた。

例 23. $R = \mathbb{C}[x_1, x_2, x_3, x_4]$ に 4 次対称群 S_4 が作用しているとき、完全対称式の列 h_3, h_4, h_5, h_6 は正則列になる (正則列になることは容易にわかるが、剰余環が部分旗多様体のコホモロジー環と同型になるなど興味深い性質を持つので、それらも合わせて第 6 節に詳細を後述した)。 $J = (h_3, h_4, h_5, h_6)$ とおくと、剰余環 R/J の斉次成分は、低次から順に、1, 4, 10, 19, 30, 41, 49, 52, 49, 41, 30, 19, 10, 4, 1 次元である。 $\lambda = (2, 2)$ とおくと、剰余環 R/J における、既約表現 S^λ の次数付き重複度は、

$$\begin{aligned} \text{grmult}(R/J, \lambda) &= q^2 \cdot \frac{[3][4][5][6]}{[3][2][2][1]} \\ &= q^2 + q^3 + 3q^4 + 3q^5 + 5q^6 + 4q^7 + 5q^8 + 3q^9 + 3q^{10} + q^{11} + q^{12} \end{aligned}$$

である。つまり、例えば、 R/J の 4 次斉次成分には、 S^λ が重複度 3 で現れる、などがわかる。

また、完全対称式の代わりに、冪対称式を用いて、 $J' = (p_3, p_4, p_5, p_6)$ においても正則列で生成されるイデアルであるが (完全対称式の場合ほど簡単ではない。[7, Proposition 7.1] や [5, Proposition 4.18] を参照)、次数付き重複度は同じである。つまり、不変式からなる正則列が 2 つあり、次数たちが同じであれば、次数付き重複度は一致することを注意しておく。

4.2 不変式からなる正則列による剰余環の Macaulay dual

複素鏡映群 G の余不変式環の最高次斉次成分は、**skew invariant** である、つまり、 $\det^{-1}$ 表現

$$\begin{aligned} \det^{-1} : G &\rightarrow \mathbb{C} \\ g &\mapsto \det(g)^{-1} \end{aligned}$$

に従うから、式 (1) より、直ちに次が得られる。

定理 24. G を階数 n の複素鏡映群とし、 $R = \mathbb{C}[x_1, x_2, \dots, x_n]$ に作用しているとする。定数ではない、斉次 G -不変式からなる正則列 $f_1, f_2, \dots, f_n$ があるならば、Artin Gorenstein 環 $R/(f_1, f_2, \dots, f_n)$ の Macaulay dual は **skew invariant** である。

特に、定数ではない斉次対称式からなる正則列で生成されるイデアルの剰余環の Macaulay dual は交代式である。

Artin Gorenstein 環は、Macaulay dual を持つことで特徴付けられるが、Macaulay dual がどのような多項式のときに完全交叉になるか、つまり、剰余環の分母のイデアルが正則列で生成されるかはわかっていない。上の定理は、複素鏡映群の作用する Artin Gorenstein 環が不変式の正則列で生成されるイデアルによる完全交叉であるための必要条件が、Macaulay dual が **skew invariant** であると述べていることになる。

例 25. (1) n 次対称群の余不変式環の Macaulay dual は、 $x_1, x_2, \dots, x_n$ の差積 $\prod_{i < j} (x_i - x_j)$ であり、従って交代式である。

(2) 例 23 で見たような、連続する次数の完全対称式からなる正則列による剰余環

$$\mathbb{C}[x_1, x_2, \dots, x_n]/(h_d, h_{d+1}, \dots, h_{d+n-1})$$

の Macaulay dual は、命題 38 の (3) に後述するように、 $(x_1 x_2 \cdots x_n)^{d-1} \prod_{i < j} (x_i - x_j)$ であり、これは交代式である。

(3) 階数 2 の複素鏡映群 $G(3, 1, 2)$ は、2 次対称群と写像 σ (ただし $\sigma(x_1) = \zeta x_1, \sigma(x_2) = x_2, \zeta$ は 1 の原始 3 乗根) で生成される。また、基本不変式は、冪対称式 p_3, p_6 である。 $G(3, 1, 2)$ -不変式からなる列 p_6, p_9 は完全交叉であり、その剰余環の Macaulay dual は $F = (x_1 x_2)^2 (x_1^3 - x_2^3)(2x_1^6 + 35x_1^3 x_2^3 + 2x_2^6)$ である。 $\sigma F = \zeta^{-1} F$ であることに注意すると、 F が $\det^{-1}$ 表現に従うことが確認できる。

5 複素鏡映群の余不変式環の強レフシェッツ性

5.1 強レフシェッツ性

定義 26 (強レフシェッツ性). 体 K 上の Artin 次数環

$$A = \bigoplus_{i=0}^c A_i \quad (\text{斉次成分分解. } A_0 \simeq K, \dim_K A_c = 1)$$

が強レフシェッツ性を持つとは、次を満たす $L \in A_1$ が存在するときを言う:

掛け算写像 $\times L^{c-2i} : A_i \rightarrow A_{c-i}$ が、すべての $0 \leq i \leq \lfloor c/2 \rfloor$ に対して全単射である。

この場合、 A のヒルベルト関数は対称であることが必要である。ヒルベルト関数が対称ではない次数環に対しても強レフシェッツ性を定義できるが、この講演では、ヒルベルト関数が対称であるもののみを考えるので、上のように強レフシェッツ性を定義した。

5.2 Hard Lefschetz 定理

強レフシェッツ性は、Hard Lefschetz 定理により多様体のコホモロジー環が満たす性質を、代数的に抽出したものといえる。

定理 27 (Hard Lefschetz theorem. 例えば [4] を見よ). X を、複素 d 次元コンパクトケーラー多様体、 ω をケーラー計量とする。コホモロジー環 $H^*(X, \mathbb{C})$ 上の自己線型写像 L を、 ω のクラス ($\in H^2(X, \mathbb{C})$) による掛け算写像で定める。このとき、 $k = 0, 1, \dots, d-1$ に対して、

$$L^{d-k} : H^k(X, \mathbb{C}) \rightarrow H^{2d-k}(X, \mathbb{C})$$

は全単射である。

例 28. (1) $\mathbb{C}[x]/(x^m)$ は強レフシェッツ性を持つ。この環は、複素射影空間 $\mathbb{CP}^{m-1}$ のコホモロジー環に同型である。

- (2) 対称群の余不変式環 $\mathbb{C}[x_1, x_2, \dots, x_n]/(e_1, e_2, \dots, e_n)$ は強レフシェッツ性を持つ。この環は、旗多様体 $GL(n; \mathbb{C})/B$ のコホモロジー環に同型である。ただし、 $B \subset GL(n; \mathbb{C})$ は Borel 部分群 (例えば $GL(n; \mathbb{C})$ に属する上三角行列全体のなす部分群) であり、 e_j は j 次の基本対称式を表す。

同様に、ワイル群の余不変式環は、対応する複素リー群の旗多様体のコホモロジー環に同型であるから、Hard Lefschetz 定理より強レフシェッツ性を持つ。

5.3 強レフシェッツ性を保つ操作

強レフシェッツ性を保つ操作として、例えば以下のようなものが知られている。

命題 29. (1) (テンソル積 [5, Theorem 3.34]) 標数 0 の体 K 上の Artin 次数環 A と B がともに強レフシェッツ性を持つならば、 $A \otimes_K B$ も強レフシェッツ性を持つ。

- (2) (単拡大 [6, Corollary 29], [5, Corollary 4.17]) 標数 0 の体 K 上の Artin 次数環 A が強レフシェッツ性を持つとき、 $f \in A[z]$ が、 A の次数と z の次数を合わせた全次数について斉次であり、かつ、 z に関して monic であるならば、 $A[z]/(f)$ も強レフシェッツ性を持つ。

命題 29 (1) は、 A も B もヒルベルト関数が対称であるという仮定があれば、逆も成立する。同じく、命題 29 (1) において、 A も B もコホモロジー環として実現されているならば、直積多様体のコホモロジー環が、2 つのコホモロジー環のテンソル積になることから導かれる。

例 30. 命題 29 の (1) を用いると、monomial complete intersection

$$\mathbb{C}[x_1, x_2, \dots, x_n]/(x_1^{d_1}, x_2^{d_2}, \dots, x_n^{d_n}) \simeq \mathbb{C}[x_1]/(x_1^{d_1}) \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[x_2]/(x_2^{d_2}) \otimes_{\mathbb{C}} \cdots \mathbb{C}[x_n]/(x_n^{d_n})$$

は強レフシェッツ性を持つことがわかる。

これは、 $\mathbb{CP}^{d_1-1} \times \mathbb{CP}^{d_2-1} \times \cdots \times \mathbb{CP}^{d_n-1}$ のコホモロジー環である。

系 31. $R = \mathbb{C}[x_1, x_2, \dots, x_n]$ とし、斉次多項式 $f_1, f_2, \dots, f_n \in R$ が、

$$f_i \in \mathbb{C}[x_i, x_{i+1}, \dots, x_n] \text{ かつ } f_i = x_i^{d_i} + (\text{lower terms})$$

を満たすとする、

$$R/(f_1, f_2, \dots, f_n)$$

は完全交叉であり、かつ、強レフシェッツ性を持つ。ただし、“lower terms” とは、逆辞書式順序に関して lower という意味である (x_i に関して低次と言っても同じ)。

Proof. 命題 29 の (2) を繰り返して用いると示される。ただし、この系の主張だけであれば、ある単項式順序 τ に対して $R/\text{in}_\tau(I)$ が強レフシェッツ性を持てば R/I も強レフシェッツ性を持つという Wiebe [16, Proposition 2.9] の結果があるので、 $\text{in}_{\text{revlex}}((f_1, f_2, \dots, f_n)) = (x_1^{d_1}, x_2^{d_2}, \dots, x_n^{d_n})$ が monomial complete intersection であることから、容易に従う。□

例 32. $\mathbb{R}[x_1, x_2, \dots, x_n]/(e_1, e_2, \dots, e_n)$ が強レフシェッツ性を持つことは、既に Hard Lefschetz 定理を用いて示されたが、次のように代数的な証明もある。

h_j を j 次の完全対称式とすると、 $h_j(x_1, \dots, x_n) = x_1 h_{j-1}(x_1, \dots, x_n) + h_j(x_2, \dots, x_n)$ を満たすことに注意する。 $\mathbb{C}[x_1, x_2, \dots, x_n]$ の基本対称式で生成されるイデアル $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ は、完全対称式を用いて、

$$(e_1, e_2, \dots, e_n) = (h_1, h_2, \dots, h_n) = (h_1(x_1, \dots, x_n), h_2(x_2, \dots, x_n), \dots, h_n(x_n))$$

と書けるから (この最右辺は逆辞書式順序および辞書式順序に関するグレブナ基底でもある)、系 31 により $\mathbb{C}[x_1, x_2, \dots, x_n]/(e_1, e_2, \dots, e_n)$ は強レフシェッツ性を持つ。

5.4 複素鏡映群の余不変式環の強レフシェッツ性

複素鏡映群の余不変式環の強レフシェッツ性を考える。複素鏡映群の分類 (Theorem 4) における先頭の、対称群の余不変式環が強レフシェッツ性を持つことは既に 2 通りの方法で示した。

分類でその次に掲げられた $G(r, p, n)$ のうち、 $p = 1$ である $G(r, 1, n)$ についても簡単なので証明を与えておく。定義により、 $G(r, 1, n)$ の元は、 n 次正方形列で書けば、各行各列に 0 ではない成分がちょうど 1 つずつあり、0 ではない成分は 1 の (原始とは限らない) r 乗根であるようなものである。

$G(2, 1, n)$ は B_n 型ワイル群に同型、 $G(2, 2, n)$ は D_n 型ワイル群に同型、 $G(m, m, 2)$ は $I_2(m)$ 型実鏡映群に同型である。

補題 33. $r \geq 2, n \geq 1$ のとき、複素鏡映群 $G(r, 1, n)$ を考える。

(1) 不変式は、 $x_1^r, x_2^r, \dots, x_n^r$ に関する対称式である。

(2) 余不変式環は強レフシェッツ性を持つ。

Proof. (1) 不変式は、 $(\mathbb{Z}_r)^n$ で不変であることから、 x_j^r の多項式であることがわかり、 S_n で不変であることから、それらの対称式であることがわかる。

(2) 基本不変式は、 x_j^r ($1 \leq j \leq n$) の基本対称式 $e_i(x_1^r, x_2^r, \dots, x_n^r)$ ($1 \leq i \leq n$) でとれるから、対称群の場合 (例 32) と同様に、基本対称式で生成されるイデアルを、完全対称式で生成されるイデアルに書き直せば、系 31 により強レフシェッツ性を持つことが言える。□

反面、一般の $G(r, p, n)$ の余不変式環が強レフシェッツ性を持つことは、 $G(r, 1, n)$ の場合ほど簡単には証明できない (central simple module を用いた議論をする必要がある)。ここでは結果のみ記す。

補題 34 ($G(r, p, n)$ [5, Proposition 4.26]). $r \geq 2, n \geq 1, p \mid r$ のとき、複素鏡映群 $G(r, p, n)$ の余不変式環は強レフシェッツ性を持つ。

残る既約複素鏡映群は、primitive な 34 個である。このうち、既に強レフシェッツ性が証明されているものもある。

補題 35 (実鏡映群および階数 2 の primitive 複素鏡映群). 表 3 の primitive な既約複素鏡映群のうち、番号が 4, ..., 22; 23, 28, 30, 35, 36, 37 のものは余不変式環が強レフシェッツ性を持つ。

Proof. 一般に、2 変数多項式環の剰余環は強レフシェッツ性を持つので、表 3 における階数が 2 のもの (Nos. 4, ..., 22) は強レフシェッツ性を持つ。また、表 3 にも記したとおり、Nos. 23, 28, 30, 35, 36, 37 は、順に、 $H_3, F_4, H_4, E_6, E_7, E_8$ 型の既約実鏡映群である。そのうち、ワイル群につ

いては、Hard Lefschetz 定理を用いて例 28 の (2) で強レフシェッツ性を示した。また、ワイル群ではない実鏡映群 (H_3, H_4 型) については、[15], [12], [5, Theorem 8.13], [10] などにより、強レフシェッツ性が示されている。□

残るは 9 通りであるが、階数の小さいものは、計算機を用いて強レフシェッツ性を確認できる。

補題 36 (階数 3 の primitive 複素鏡映群). 表 3 の primitive な既約複素鏡映群のうち、番号が 24, 25, 26, 27 のものは余不変式環が強レフシェッツ性を持つ。

Proof. 基本不変式がわかれば、計算機を用いて強レフシェッツ性を確認することができる。以下に 4 つの群の多項式環 $\mathbb{C}[x, y, z]$ における基本不変式を記す。

No. 24 (例えば、Springer [14, §4.6, p. 98], Miller-Blichfeldt-Dickson [11, §125 (J), p. 254]):

$$\begin{aligned} f_4 &= x^3y + y^3z + z^3x, \\ f_6 &= xy^5 + yz^5 + zx^5 - 5x^2y^2z^2, \\ f_{14} &= \frac{1}{9} \begin{vmatrix} (f_4)_{xx} & (f_4)_{xy} & (f_4)_{xz} & (f_6)_x \\ (f_4)_{yx} & (f_4)_{yy} & (f_4)_{yz} & (f_6)_y \\ (f_4)_{zx} & (f_4)_{zy} & (f_4)_{zz} & (f_6)_z \\ (f_6)_x & (f_6)_y & (f_6)_z & 0 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

No. 25 (例えば、Springer [14, §4.7, p. 101], Miller-Blichfeldt-Dickson [11, §125 (G), p. 253]):

$$\begin{aligned} f_6 &= x^6 + y^6 + z^6 - 12(x^3y^3 + x^3z^3 + y^3z^3), \\ f_9 &= (x^3 - y^3)(x^3 - z^3)(y^3 - z^3), \\ f_{12} &= (x^3 + y^3 + z^3)((x^3 + y^3 + z^3)^3 + 216x^3y^3z^3). \end{aligned}$$

No. 26 (例えば、Shephard-Todd [13, §6, p. 286], Miller-Blichfeldt-Dickson [11, §125 (G), p. 253]): f_6, f_9, f_{12} は、No. 25 のものと同じとする。基本不変式は、 f_6, f_{12}, f_{18} である。ただし、

$$f_{18} = 432f_9^2 - f_6^3 + 3f_6f_{12}$$

である。

No. 27 (例えば、Miller-Blichfeldt-Dickson [11, §125 (I), p. 254]):

$$\begin{aligned} f_6 &= (x^2 + yz)^3 + \lambda x(x^5 + y^5 + z^5 + 5xy^2z^2 - 5x^3yz), \\ f_{12} &= \begin{vmatrix} (f_6)_{xx} & (f_6)_{xy} & (f_6)_{xz} \\ (f_6)_{yx} & (f_6)_{yy} & (f_6)_{yz} \\ (f_6)_{zx} & (f_6)_{zy} & (f_6)_{zz} \end{vmatrix}, \\ f_{30} &= \begin{vmatrix} (f_6)_{xx} & (f_6)_{xy} & (f_6)_{xz} & (f_{12})_x \\ (f_6)_{yx} & (f_6)_{yy} & (f_6)_{yz} & (f_{12})_y \\ (f_6)_{zx} & (f_6)_{zy} & (f_6)_{zz} & (f_{12})_z \\ (f_{12})_x & (f_{12})_y & (f_{12})_z & 0 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

ここに、

$$\lambda = \frac{-9 \pm \sqrt{-15}}{20}$$

である。□

これに残るは Nos. 29, 31, 32, 33, 34 の 5 通りである。

予想 37 (複素鏡映群の余不変式環). 複素鏡映群の余不変式環は、強レフシェッツ性を持つ。

6 (付録) 連続する次数の完全対称式による正則列

ここでは連続する次数の完全対称式の列が正則列であることを示し、さらに、その剰余環が部分旗多様体のコホモロジー環に同型であることや、Macaulay dual の具体的な形を示す。この例は、例 23 や例 25 で言及したものである。

命題 38. $R = \mathbb{C}[x_1, x_2, \dots, x_n]$ とし、 d を正整数とする。

- (1) n 個の連続する次数の完全対称式 $h_d, h_{d+1}, \dots, h_{d+n-1}$ は正則列をなす。
- (2) 剰余環 $R/(h_d, h_{d+1}, \dots, h_{d+n-1})$ は強レフシェッツ性を持つ。
- (3) この剰余環の Macaulay dual は

$$(x_1 x_2 \cdots x_n)^{d-1} \prod_{i < j} (x_i - x_j)$$

である。

Proof. $I = (h_d, h_{d+1}, \dots, h_{d+n-1})$ とおく。

(1), (2) 例 32 と同じく、

$$(h_d, h_{d+1}, \dots, h_{d+n-1}) = (h_d(x_1, \dots, x_n), h_{d+1}(x_2, \dots, x_n), \dots, h_n(x_n))$$

であるから、系 31 より、 R/I が完全交叉であることと、強レフシェッツ性を持つことがわかる。

(3) R/I の maximal socle degree が、問題の多項式の次数と同じであることは容易にわかる。また、 h_j ($j \geq d$) に偏微分作用素を代入した $h_j(\partial)$ により、 $(x_1 x_2 \cdots x_n)^{d-1} \prod_{i < j} (x_i - x_j)$ が消えることも、少し工夫は必要であるが単に計算によりわかる。□

さらに、上の環に対しては、幾何的な解釈がある。添字が揃うよう、変数の番号を付け替えて主張を述べる。

$1 \leq m \leq n$ に対して、 $R = \mathbb{C}[x_1, x_2, \dots, x_n]$ とおき、 h_j, e_j をそれぞれ j 次の完全対称式、基本対称式とする。また、 $h_j^A, e_j^A, h_j^B, e_j^B$ を、一部の変数に関する j 次の完全対称式、基本対称式とする。つまり、

$$\begin{aligned} h_j &= h_j(x_1, \dots, x_n), & h_j^A &= h_j^A(x_1, \dots, x_m), & h_j^B &= h_j^B(x_{m+1}, \dots, x_n), \\ e_j &= e_j(x_1, \dots, x_n), & e_j^A &= e_j^A(x_1, \dots, x_m), & e_j^B &= e_j^B(x_{m+1}, \dots, x_n) \end{aligned}$$

とおく。

補題 39. $1 \leq m \leq n$ に対し、対称群 S_n の部分群 $S_m \times (S_1)^{n-m}$ を簡単に S_m と書く。このとき、

$$\left(\frac{\mathbb{C}[x_1, x_2, \dots, x_n]}{(h_1, h_2, \dots, h_n)} \right)^{S_m} \simeq \frac{\mathbb{C}[x_{m+1}, \dots, x_n]}{(h_{m+1}^B, \dots, h_n^B)}$$

である。

Proof. $\mathbb{C}[x_1, x_2, \dots, x_n]$ のイデアルを $I = (h_1, \dots, h_n)$ とおく。そして、

$$e_i = \sum_{j+k=i} e_j^A e_k^B$$

を用いると、帰納的に、

$$\begin{aligned} e_1^A &= e_1 - \sum_{i=0}^0 e_i^A e_{1-i}^B \in I + \mathbb{C}[x_{m+1}, \dots, x_n], \\ e_2^A &= e_2 - \sum_{i=0}^1 e_i^A e_{2-i}^B \in I + \mathbb{C}[x_{m+1}, \dots, x_n], \\ &\vdots \\ e_m^A &= e_m - \sum_{i=0}^{m-1} e_i^A e_{m-i}^B \in I + \mathbb{C}[x_{m+1}, \dots, x_n], \end{aligned}$$

が言える。まとめると、

$$e_j^A \in I + \mathbb{C}[x_{m+1}, \dots, x_n] \quad (1 \leq j \leq m)$$

である。従って、

$$\begin{aligned} (\mathbb{C}[x_1, x_2, \dots, x_n]/I)^{S_m} &\simeq \mathbb{C}[e_1^A, \dots, e_m^A, x_{m+1}, \dots, x_n]/I \\ &\simeq \mathbb{C}[x_{m+1}, \dots, x_n]/(I \cap \mathbb{C}[x_{m+1}, \dots, x_n]) \end{aligned}$$

がわかる。

辞書式順序 (消去順序) に関する I のグレブナ基底が、

$$h_1(x_1, \dots, x_n), h_2(x_2, \dots, x_n), \dots, h_n(x_n)$$

であるから、 $\mathbb{C}[x_{m+1}, \dots, x_n]$ のイデアルとして、

$$\begin{aligned} I \cap \mathbb{C}[x_{m+1}, \dots, x_n] &= (h_{m+1}(x_{m+1}, \dots, x_n), h_{m+2}(x_{m+2}, \dots, x_n), \dots, h_n(x_n)) \\ &= (h_{m+1}^B, h_{m+2}^B, \dots, h_n^B) \end{aligned}$$

である。以上より、

$$(\mathbb{C}[x_1, x_2, \dots, x_n]/I)^{S_m} \simeq \frac{\mathbb{C}[x_{m+1}, \dots, x_n]}{(h_{m+1}^B, \dots, h_n^B)}$$

である。 □

上の同型を用いると、連続する次数の完全対称式による剰余環が、部分旗多様体のコホモロジー環に同型であることがわかる。

命題 40. 上の補題と同じ設定のもと、

$$H^*(G/P, \mathbb{C}) \simeq \frac{\mathbb{C}[x_{m+1}, \dots, x_n]}{(h_{m+1}^B, \dots, h_n^B)}$$

である。ただし、

$$G = GL(n; \mathbb{C}),$$

$$P = \left\{ \begin{pmatrix} A & 0 \\ B & C \end{pmatrix} \in GL(n, \mathbb{C}) \mid \begin{array}{l} A \text{ は } m \text{ 次正方行列,} \\ B \text{ は } (n-m) \times m \text{ 行列,} \\ C \text{ は } (n-m) \text{ 次下三角行列} \end{array} \right\}$$

である。

Proof. B を含む放物型部分群 P があるとき、 P のワイル群 W_P を、 P を安定にする元全体からなる S_n の部分群と定める。ただし、 S_n の作用は、置換行列による共役である。このとき、

$$H^*(G/P) \simeq (H^*(G/B))^{W_P}$$

が知られている (例えば [1])。ここに、右辺は旗多様体 G/B のコホモロジー環 ($\simeq$ 余不変式環) の、 W_P -不変元全体のなす部分環である。

命題で与えられた P のワイル群は、ちょうど、補題 39 における $S_m \simeq (S_m) \times (S_1)^{n-m}$ に一致する。従って補題 39 より、命題が証明される。 $\square$

参考文献

- [1] I. N. Bernšteĭn, I. M. Gel'fand, and S. I. Gel'fand. Schubert cells, and the cohomology of the spaces G/P . *Russ. Math. Surv.*, 28(3):1–26, 1973.
- [2] Winfried Bruns and Jürgen Herzog. *Cohen-Macaulay rings*, volume 39 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1993.
- [3] Aldo Conca, Christian Krattenthaler, and Junzo Watanabe. Regular sequences of symmetric polynomials. *Rend. Semin. Mat. Univ. Padova*, 121:179–199, 2009.
- [4] Phillip Griffiths and Joseph Harris. *Principles of algebraic geometry*. Wiley-Interscience [John Wiley & Sons], New York, 1978. Pure and Applied Mathematics.
- [5] Tadahito Harima, Toshiaki Maeno, Hideaki Morita, Yasuhide Numata, Akihito Wachi, and Junzo Watanabe. *The Lefschetz Properties*, volume 2080 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 2013.
- [6] Tadahito Harima and Junzo Watanabe. The finite free extension of Artinian K -algebras with the strong Lefschetz property. *Rend. Sem. Mat. Univ. Padova*, 110:119–146, 2003.
- [7] Tadahito Harima and Junzo Watanabe. The strong Lefschetz property for Artinian algebras with non-standard grading. *J. Algebra*, 311(2):511–537, 2007.
- [8] N. Kumar. Prime ideals and regular sequences of symmetric polynomials. *ArXiv e-prints*, September 2013.
- [9] Gunter Malle. Unipotente Grade imprimitiver komplexer Spiegelungsgruppen. *J. Algebra*, 177(3):768–826, 1995.

- [10] Chris McDaniel. The strong Lefschetz property for coinvariant rings of finite reflection groups. *J. Algebra*, 331:68–95, 2011.
- [11] G. A. Miller, H. F. Blichfeldt, and L. E. Dickson. *Theory and applications of finite groups*. Dover Publications Inc., New York, 1961.
- [12] Yasuhide Numata and Akihito Wachi. The strong Lefschetz property of the coinvariant ring of the Coxeter group of type H_4 . *J. Algebra*, 318(2):1032–1038, 2007.
- [13] G. C. Shephard and J. A. Todd. Finite unitary reflection groups. *Canadian J. Math.*, 6:274–304, 1954.
- [14] T. A. Springer. *Invariant theory*. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 585. Springer-Verlag, Berlin, 1977.
- [15] Richard P. Stanley. Weyl groups, the hard Lefschetz theorem, and the Sperner property. *SIAM J. Algebraic Discrete Methods*, 1(2):168–184, 1980.
- [16] Attila Wiebe. The Lefschetz property for componentwise linear ideals and Gotzmann ideals. *Comm. Algebra*, 32(12):4601–4611, 2004.