

Cayley–Hamilton 型定理と不変式論 (Cayley–Hamilton type theorems and invariant theory)

伊藤稔 (鹿児島大学理学部)

Minoru ITOH (Faculty of Science, Kagoshima University)

序文

不変式論の第二基本定理が Cayley–Hamilton 定理の類似物で記述可能な不変式環の系列について報告する. 基本的には多項式環における不変式論の話だが, 外積代数においてもかなりパラレルな議論ができるのが興味深い.

不変式論の第一基本定理 (生成元の記述) や第二基本定理 (生成元のあいだの関係式の記述) が具体的に書き下せるような不変式環は多くない. しかし古典群の作用に関する系列の不変式環は, その第二基本定理が Cayley–Hamilton の定理やそのいくつかの類似物 (たとえば $[A]$, $[D]$, $[I]$ によるもの) で記述できる. 多項式環におけるこのような系列の不変式環について述べたい.

似たことは, 多項式環における不変式環だけでなく, 外積代数におけるいくつかの不変式環でもなりたつ. 反可換な枠組みの Cayley–Hamilton 型定理が考えられ, これは第二基本定理と見なせるのである. さらにこの Cayley–Hamilton 型定理は有名な Amitsur–Levitzki 恒等式と関連する. Amitsur–Levitzki 恒等式にはいくつかの類似物が知られているが, それらに対してもそれぞれ別の外積代数における不変式環と Cayley–Hamilton 型定理が対応する.

これらの議論では Penrose による diagram 記法が有用である. Diagram でいうと「長さだけで決まる cycle」と「長さと端点のデータだけで決まる path」から生成されるような不変式環の理論ということになる. 積の順序に注意が必要だが, この diagram による議論は外積代数における不変式論でもまた有用である.

0.1. 本稿ではさまざまな Cayley–Hamilton 型定理が登場するが, その中でもっとも典型的なのが阿賀岡芳夫 $[A]$ による次の関係式である. 言わば高階の Cayley–Hamilton 定理であり, $q = 1$ のときが通常の Cayley–Hamilton 定理である.

定理 0.1. 互いに可換な成分をもつ n 次正方行列 Z と非負整数 q に対して次が成立する:

$$\sum_{k+l_1+\cdots+l_q=n+1-q} (-)^k \det_k(Z) Z^{l_1} \otimes \cdots \otimes Z^{l_q} \sum_{\sigma \in S_q} \operatorname{sgn}(\sigma) \gamma(\sigma) = 0.$$

ただし $\det_k(Z)$ と $\gamma(\sigma)$ を次のように定める (E_{ij} は行列単位を意味する) :

$$\det_k(Z) = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \det(Z_{i_a i_b})_{1 \leq a, b \leq k}, \quad \gamma(\sigma) = \sum_{1 \leq i_1, \dots, i_q \leq n} E_{i_{\sigma(1)} i_1} \otimes \dots \otimes E_{i_{\sigma(q)} i_q}.$$

0.2. この定理 0.1 は, いくつかの不変式環の第二基本定理と密接な関係にある. たとえば次の不変式環を考えよう:

$$\mathcal{P}(V \otimes V^* \oplus mV \oplus m^*V^*)^{GL(V)}.$$

ここで V は n 次元複素ベクトル空間で, V^* はその双対空間, m, m^* は非負整数とする. また kU は U の k 個のコピーの直和である.

$m = m^* = 0$ のときは, 話は単純である. $\mathcal{P}(V \otimes V^*)$ の $GL(V)$ -不変元 (つまり正方行列の成分の多項式で conjugation で不変なもの) は, 固有多項式の係数から生成されて, この n 個の係数は代数的に独立となる. しかし m, m^* が一般のときは, もうすこし複雑である.

z_{ij} を $V \otimes V^*$ の標準的な座標とする. さらに $x_i^{(a)}$ と $x_i^{*(a^*)}$ をそれぞれ a 番目の V と a^* 番目の V^* の座標とする. これらを用いて次の形式的な行列を作る:

$$Z = (z_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}, \quad x^{(a)} = {}^t(x_1^{(a)}, \dots, x_n^{(a)}), \quad x^{*(a^*)} = {}^t(x_1^{*(a^*)}, \dots, x_n^{*(a^*)}).$$

すると $\mathcal{P}(V \otimes V^* \oplus mV \oplus m^*V^*)$ の次の元は $GL(V)$ -不変である:

$$\omega^{(k)} = \det_k(Z), \quad \varphi^{(k)} = \text{tr}(Z^k), \quad \psi_{a^*a}^{(l)} = {}^t x^{*(a^*)} Z^l x^{(a)}.$$

$\omega^{(1)}, \dots, \omega^{(n)}$ と $\varphi^{(1)}, \dots, \varphi^{(n)}$ はどちらも $\mathcal{P}(V \otimes V^*)^{GL(V)}$ の生成系となる (前者は行列 Z の固有多項式の係数) .

不変式論の第一基本定理は次のように表される:

定理 0.2. $\mathcal{P}(V \otimes V^* \oplus mV \oplus m^*V^*)^{GL(V)}$ は $\omega^{(k)}$ および $\psi_{a^*a}^{(l)}$ で生成される. ただし k, l, a, a^* は次の範囲を動く:

$$k = 1, \dots, n, \quad l = 0, \dots, n-1, \quad a^* = 1, \dots, m^*, \quad a = 1, \dots, m.$$

このうち $\omega^{(1)}, \dots, \omega^{(n)}$ は $\varphi^{(1)}, \dots, \varphi^{(n)}$ に置き換えてもよい.

そして第二基本定理は定理 0.1 を用いて書ける. 定理 0.1 に左と右からそれぞれ

$${}^t x^{*(a_1^*)} Z^{\eta_1^*} \otimes \dots \otimes {}^t x^{*(a_q^*)} Z^{\eta_q^*}, \quad Z^{\eta_1} x^{(a_1)} \otimes \dots \otimes Z^{\eta_q} x^{(a_q)}$$

という元を掛けると次のような $\omega^{(k)}, \psi_{a_i^* a_j}^{(l)}$ たちの関係式を得る:

$$(0.1) \quad \sum_{k+l_1+\dots+l_q=n+1-q} (-)^k \omega^{(k)} \sum_{\sigma \in S_q} \text{sgn}(\sigma) \psi_{a_1^* a_{\sigma(1)}}^{(\eta_1^*+l_1+\eta_{\sigma(1)})} \dots \psi_{a_q^* a_{\sigma(q)}}^{(\eta_q^*+l_q+\eta_{\sigma(q)})} = 0.$$

本質的に $\omega^{(k)}, \psi_{a_i^* a_j}^{(l)}$ たちの関係式はこれらで尽きるのである.

0.3. この不変式環以外にも, 次の2つの不変式環はやはり定理0.1を用いて第二基本定理が記述できる:

$$\mathcal{P}(S_2(V) \oplus S_2(V^*) \oplus mV \oplus m^*V^*)^{GL(V)}, \quad \mathcal{P}(S_2(V) \oplus mV)^{O(V)}.$$

また次の2つの不変式環は Pfaffian 版の Cayley–Hamilton 型定理 ([D], [I] で与えられた Cayley–Hamilton 型定理の一般化) を用いて第二基本定理が記述できる:

$$\mathcal{P}(S_2(V) \oplus mV)^{Sp(V)}, \quad \mathcal{P}(\Lambda_2(V) \oplus mV)^{Sp(V)}.$$

さらに次の3つの不変式環もやはり一種の Cayley–Hamilton 型定理を用いて第二基本定理が記述できる:

$$\mathcal{P}(\Lambda_2(V) \oplus \Lambda_2(V^*) \oplus mV \oplus m^*V^*)^{GL(V)},$$

$$\mathcal{P}(S_2(V) \oplus \Lambda_2(V^*) \oplus mV \oplus m^*V^*)^{GL(V)}, \quad \mathcal{P}(\Lambda_2(V) \oplus mV)^{O(V)}.$$

これらの不変式環はいずれも diagram で表したときに, 「(長さだけで決まる) cycle と (長さと端点のデータだけで決まる) path で不変式が生成される」という共通点を持つ. 最初に述べた $\mathcal{P}(V \otimes V^* \oplus mV \oplus m^*V^*)^{GL(V)}$ の生成元も, $\varphi^{(k)}$ は長さ k の cycle として表され, $\psi_{a^*a}^{(l)}$ は両端に a^*, a というラベルのついた長さ l の path として表されるのである.

1. Diagram 記法

このような不変式論の議論をする上で, 以下のような diagram が有用である. 不変式論にかぎらず線型代数の概念 (ベクトル, コベクトル, 線型写像, 行列式, トレースなど) を扱うのにこの diagram は役立つ.

1.1. n 次元複素ベクトル空間 U とその双対空間 U^* を考える. $u \in U$ と $u^* \in U^*$ を次のような「矢尻 (arrow head) をもつ白丸」と「矢羽 (arrow tail) をもつ黒丸」で表す¹:

$$u = \leftarrow \text{○}^u, \quad u^* = \text{●} \text{---} \leftarrow.$$

また U 上の線型変換 (つまり $U \otimes U^* \simeq \text{End}(U) \simeq \text{Mat}_n(\mathbb{C})$ の元) A を次のように表す:

$$A = \leftarrow \text{●}^A \text{---} \leftarrow.$$

さらに U の基底とその双対基底を固定して, u, u^* の座標 u_i, u_j^* や A の行列成分 A_{ij} を矢尻や矢羽にラベルをつけて表す:

$$u_i = \leftarrow \text{○}^i, \quad u_j^* = \text{●} \text{---} \leftarrow^j, \quad A_{ij} = \leftarrow \text{●}^A \text{---} \leftarrow^j.$$

¹日本語では「尻」が, 英語では「頭」なのでややこしい.

$$\langle u^*, u \rangle = \sum_{i=1}^n u_i^* u_i = \sum_{i=1}^n \begin{array}{c} u^* \\ \bullet \end{array} \begin{array}{c} i \\ \text{---} \end{array} \begin{array}{c} i \\ \text{---} \end{array} \begin{array}{c} u \\ \circ \end{array} = \begin{array}{c} u^* \\ \bullet \end{array} \begin{array}{c} \text{---} \end{array} \begin{array}{c} u \\ \circ \end{array} = \begin{array}{c} u^* \\ \bullet \end{array} \begin{array}{c} \text{---} \end{array} \begin{array}{c} u \\ \circ \end{array}$$
$$Au = \begin{array}{c} A \\ \bullet \end{array} \leftarrow \begin{array}{c} u \\ \circ \end{array} = \begin{array}{c} A \\ \bullet \end{array} \leftarrow \begin{array}{c} u \\ \circ \end{array}, \quad \text{tr } A = \begin{array}{c} A \\ \bullet \end{array} \begin{array}{c} \circlearrowleft \end{array} = \begin{array}{c} A \\ \bullet \end{array} \begin{array}{c} \circlearrowright \end{array}.$$
$$\mathrm{tr}(A^k) = \text{tr}(\text{---} \bullet \text{---} \bullet \text{---} \cdots \text{---} \bullet \text{---} \bullet \text{---})$$
$$E = \leftarrow\!\!\!\lhd, \quad \delta_{ij} = \overset{i}{\leftarrow\!\!\!\lhd} \overset{j}{}.$$
$$\text{Thick line} = \text{Diagram 1} - \text{Diagram 2}, \quad \text{Thick line} = \text{Diagram 3} - \text{Diagram 4} - \text{Diagram 5} + \text{Diagram 6} + \text{Diagram 7}.$$
$$\begin{aligned}
 A \text{ (with } u^* \text{ and } u \text{)} &= \text{ (loop with } u^* \text{)} - \text{ (loop with } u \text{)} \\
 &= \text{ (loop with } u^* \text{)} - \text{ (loop with } u \text{)} \\
 &= \text{tr}(A) \langle u^*, u \rangle - \langle u^*, Au \rangle.
 \end{aligned}$$
$$\det_p(A) = \frac{1}{p!} \sum_{1 \leq i_1, \dots, i_p \leq n} \sum_{\sigma \in S_p} \text{sgn}(\sigma) A_{i_1 i_{\sigma(1)}} \cdots A_{i_p i_{\sigma(p)}} = \frac{1}{p!} \text{ (diagram) }.$$

この交代和を計算すると, $\det_p(A)$ を $\text{tr}(A^1), \dots, \text{tr}(A^p)$ の積和で表す公式が得られる. とくに 0.2 節の $\omega^{(p)}$ が $\varphi^{(1)}, \dots, \varphi^{(p)}$ で表せることがわかる.

この交代和に関して重要なのが, 「 $n+1$ 本 (以上) の交代和は 0」という事実である. これがこの先いろいろな不変式環の第二基本定理の基盤になる. この事実自体の証明は易しい. 実際, $n+1$ 本の交代和を次のように書き直せばよい:

$$\underbrace{\begin{array}{c} \cdots \\ \text{---} \\ \cdots \end{array}}_{n+1 \text{ 本}} = \sum_{\sigma \in S_{n+1}} \text{sgn}(\sigma) \sum_{1 \leq i_1, \dots, i_{n+1} \leq n} \begin{array}{c} \downarrow \\ i_1 \\ i_{\sigma(1)} \\ \downarrow \end{array} \cdots \begin{array}{c} \downarrow \\ i_{n+1} \\ i_{\sigma(n+1)} \\ \downarrow \end{array} \\ = \sum_{1 \leq i_1, \dots, i_{n+1} \leq n} \sum_{\sigma \in S_{n+1}} \text{sgn}(\sigma) \begin{array}{c} \downarrow \\ i_1 \\ i_{\sigma(1)} \\ \downarrow \end{array} \cdots \begin{array}{c} \downarrow \\ i_{n+1} \\ i_{\sigma(n+1)} \\ \downarrow \end{array}.$$

$i_1, \dots, i_{n+1}$ には重複が生じるから, 内側の交代和は 0 になる.

この種の diagram の歴史については [C] の 4.9 節に詳しい. この種の diagram は tensor diagrams, birdtracks, arrow diagrams などの名前で呼ばれている. 矢尻や矢羽の記法は 19 世紀から使われていたようだが, 太い線による交代和の記法は物理学者の Penrose によって導入されたものらしい.

1.3. 交代和の記法を用いて Cayley–Hamilton 定理やその類似も簡潔に表すことができる.

まず通常の Cayley–Hamilton 定理は次のような diagram の等式として表される (ただしこの図には Z というラベルの $\bullet$ が n 個あるとする) :

$$(1.1) \quad \frac{1}{n!} \begin{array}{c} \bullet \quad \bullet \quad \cdots \quad \bullet \\ \text{---} \end{array} = 0.$$

左辺の diagram が 0 に等しいのは, これが $n+1$ 本の交代和だからである. また左辺の交代和は次のように書き直せる (これでこの等式が Cayley–Hamilton 定理と同値ということになる) :

$$(1.2) \quad \sum_{p+q=n} (-)^q \det_p(Z) Z^q.$$

この変形は交代和の記法に関して「余因子展開」をすることでわかる. 「 n 本の交代和」は「 $n-1$ 本の交代和」の n 個の和で表せるが, これは一種の余因子展開である. たとえば $n=4$ の場合は次のようになる:

$$\begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} = \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array} - \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array} \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array} - \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array} \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array} - \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array} \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array}.$$

この「余因子展開」をくりかえし適用すれば (1.1) の左辺が (1.2) に等しいことがわかる.

阿賀岡による Cayley–Hamilton 型定理 (定理 0.1) も同様に次の diagram の等式で表せる (証明は省略) :

$$(1.3) \quad \frac{1}{(n+1-q)!} \left(\text{diagram} \right) = 0.$$

ただしこの図には $n+1-q$ 個の $\bullet$ と q 個の $\leftarrow\leftarrow$ があるとする².

2. ベクトル不変式の第一・第二基本定理

この先の議論の基盤となるベクトル不変式の第一・第二基本定理についてまとめておく [GW]. $\mathcal{P}(mV \oplus m^*V^*)$ という多項式環の $GL(V)$ -不変元をベクトル不変式という. ただし V を n 次元の複素ベクトル空間とする.

$x_i^{(a)}, x_i^{*(a^*)}$ をそれぞれ a 番目の V と a^* 番目の V^* の座標とする. これらを成分とする形式的な行列

$$x^{(a)} = {}^t(x_1^{(a)}, \dots, x_n^{(a)}), \quad x^{*(a^*)} = {}^t(x_1^{*(a^*)}, \dots, x_n^{*(a^*)})$$

を考えて, diagram で次のように表す ($\circ, \bullet$ のラベルは何番目の V, V^* かを表すとする) :

$$x^{(a)} = \leftarrow \overset{a}{\circ}, \quad x^{*(a^*)} = \overset{a^*}{\bullet} \leftarrow.$$

すると次は $GL(V)$ -不変になる:

$$\theta_{a^*a} = \sum_{i=1}^n x_i^{*(a^*)} x_i^{(a)} = \overset{a^*}{\bullet} \text{---} \overset{a}{\circ}.$$

実際にはこれらから任意のベクトル不変式が生成される:

定理 2.1. $\mathcal{P}(mV \oplus m^*V^*)^{GL(V)}$ は θ_{a^*a} から生成される (ただし $a = 1, \dots, m, a^* = 1, \dots, m^*$).

さらに第二基本定理も次のように表される:

定理 2.2. 生成元 θ_{a^*a} たちの関係式は $\det(\theta_{a_i^*a_j})_{1 \leq i,j \leq n+1} = 0$, つまり次のかたちのものから生成される:

$$\begin{array}{ccc} a_1 & \cdots & a_{n+1} \\ \circ & & \circ \\ \text{---} & & \text{---} \\ \bullet & \cdots & \bullet \\ a_1^* & & a_{n+1}^* \end{array} = 0.$$

3. $\mathcal{P}(V \otimes V^* \oplus mV \oplus m^*V^*)$ における $GL(V)$ -不変元

序文で述べた $\mathcal{P}(V \otimes V^* \oplus mV \oplus m^*V^*)^{GL(V)}$ の第一・第二基本定理を diagram を用いて表し, さらにその証明を考えよう.

²このままではこの diagram はすこし説明不足である. 矢尻と矢羽が複数個あるため, これらを区別するラベルづけが本当は必要である.

3.1. まず $\mathcal{P}(V \otimes V^* \oplus mV \oplus m^*V^*)^{GL(V)}$ の生成元を diagram で表そう.

z_{ij} を $V \otimes V^*$ の標準的な座標, さらに $x_i^{(a)}$ と $x_i^{*(a^*)}$ をそれぞれ a 番目の V と a^* 番目の V^* の座標とする. これらを用いて次の形式的な行列を作る:

$$Z = (z_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}, \quad x^{(a)} = {}^t(x_1^{(a)}, \dots, x_n^{(a)}), \quad x^{*(a^*)} = {}^t(x_1^{*(a^*)}, \dots, x_n^{*(a^*)}).$$

そして diagram で次のように表す:

$$x^{(a)} = \leftarrow \circ^a, \quad x^{*(a^*)} = \bullet^{a^*} \rightarrow, \quad Z = \leftarrow \bullet \rightarrow.$$

$\circ, \bullet$ のラベルは何番目の V, V^* かを表すことにする. また $\bullet$ は一種類しか出てこないのラベルをつけない.

すると $\varphi^{(k)}$ と $\psi_{b^*b}^{(l)}$ は次の cycle と path に対応する ($\bullet$ の個数はそれぞれ k, l とする):

$$\varphi^{(k)} = \left(\bullet \text{---} \bullet \text{---} \cdots \text{---} \bullet \text{---} \bullet \right), \quad \psi_{b^*b}^{(l)} = \bullet^{b^*} \text{---} \bullet \text{---} \cdots \text{---} \bullet \text{---} \bullet^b.$$

cycle は長さ k のみで決まる. path も端点のラベル b^*, b 以外は長さのみで決まる. 長さのみで決まるのは $\bullet$ が一種類しか出てこない (長さを伸ばす素材が一種類しかない) という事実に対応している. V と V^* は複数個 (それぞれ m 個と m^* 個) の直和であるが, $V \otimes V^*$ は直和は許していない³. このことがこの先の鍵になる.

3.2. Diagram を利用して第一基本定理すなわち定理 0.2 を証明しよう. 簡単のため $m = m^* = 1$ の場合を説明するが, 一般の場合も同様である.

$\mathcal{P}(V \otimes V^* \oplus V \oplus V^*) \simeq \mathcal{P}(V \otimes V^*) \otimes \mathcal{P}(V) \otimes \mathcal{P}(V^*)$ の次の部分空間を考える:

$$\mathcal{U} = \mathcal{P}_\alpha(V \otimes V^*) \otimes \mathcal{P}_\beta(V) \otimes \mathcal{P}_{\beta^*}(V^*).$$

ただし多項式環 $\mathcal{P}(U)$ の k 次の斉次部分を $\mathcal{P}_k(U)$ と表す. $\mathcal{P}(V \otimes V^* \oplus V \oplus V^*)$ は $GL(V)$ -空間としてこのような斉次空間の直和に分解されるから, この $\mathcal{U}$ を記述すればよい. さらに次を考える:

$$\mathcal{U}_0 = \bigotimes_{a \in A} \mathcal{P}_1(V^{(a)}) \otimes \bigotimes_{a^* \in A^*} \mathcal{P}_1(V^{*(a^*)}) \otimes \bigotimes_{b \in B} \mathcal{P}_1(V^{(b)}) \otimes \bigotimes_{b^* \in B^*} \mathcal{P}_1(V^{*(b^*)}).$$

ここで $V^{(a)}, V^{(b)}$ は V のコピー, $V^{*(a^*)}, V^{*(b^*)}$ は V^* のコピーである. A は $|A| = \alpha$ をみたす添字集合であり, A^* は A のコピーである ($\iota^*: A \rightarrow A^*$ という全単射を固定する). また B, B^* は $|B| = \beta, |B^*| = \beta^*$ をみたす添字集合である.

$\mathcal{U}_0$ と $\mathcal{U}$ の元を diagram で表そう. $\mathcal{U}_0$ を

$$\mathcal{P}\left(\bigoplus_{c^* \in C^*} V^{*(c^*)} \oplus \bigoplus_{c \in C} V^{(c)}\right)$$

³ $V \otimes V^*$ の複数個の直和を許すと問題はずっと難しくなる. これについては Procesi らの研究がある [P].

の部分空間とみなす (ただし $C = A \sqcup B$, $C^* = A^* \sqcup B^*$ とおく). すると $\mathcal{U}_0$ は $V^{(c)}$, $V^{*(c^*)}$ の座標 $x_i^{(c)}$, $x_i^{*(c^*)}$ の積で張られる (ただし $c \in C$, $c^* \in C^*$) が, これらを次のように表そう:

$$x_i^{(c)} = \overset{i}{\leftarrow} \overset{c}{\circ}, \quad x_i^{*(c^*)} = \overset{c^*}{\bullet} \rightarrow \overset{j}{\leftarrow}.$$

また $\mathcal{U}$ は V , V^* , $V \otimes V^*$ の座標 x_i , x_i^* , z_{ij} の積で張られるが, これらを次のように表そう:

$$x_i = \overset{i}{\leftarrow} \circ, \quad x_i^* = \bullet \rightarrow \overset{j}{\leftarrow}, \quad z_{ij} = \overset{i}{\leftarrow} \bullet \rightarrow \overset{j}{\leftarrow}.$$

すると θ_{c^*c} は次のように表せる:

$$\theta_{c^*c} = t_{x^{*(c^*)} x^{(c)}} = \overset{c^*}{\bullet} \rightarrow \overset{c}{\circ}.$$

さらに $\varphi^{(k)}$ と $\psi^{(l)}$ はそれぞれ cycle と path で表される ($m = m^* = 1$ の場合は $\psi_{b^*b}^{(l)}$ には下付き添字は不要になる. これを簡単に $\psi^{(l)}$ と表そう):

$$\varphi^{(k)} = \left(\bullet \rightarrow \bullet \rightarrow \cdots \rightarrow \bullet \rightarrow \bullet \right), \quad \psi^{(l)} = \bullet \rightarrow \bullet \rightarrow \cdots \rightarrow \bullet \rightarrow \bullet \rightarrow \circ.$$

● の個数はそれぞれ k, l とする.

そして次の対応で定まる $\Xi: \mathcal{U}_0 \rightarrow \mathcal{U}$ という自然な写像を考える:

$$\bigotimes_{a \in A} x_{i_a}^{(a)} \otimes \bigotimes_{a \in A} x_{j_a}^{*(\iota^*(a))} \otimes \bigotimes_{b \in B} x_{i_b}^{(b)} \otimes \bigotimes_{b^* \in B^*} x_{j_{b^*}}^{*(b^*)} \mapsto \prod_{a \in A} z_{i_a j_a} \otimes \prod_{b \in B} x_{i_b} \otimes \prod_{b^* \in B^*} x_{j_{b^*}}^*.$$

Diagram で言うと, この写像 Ξ は次のような操作となる:

各 $a \in A$ に対して, 「 a というラベルの $\circ$ 」と 「 $\iota^*(a)$ というラベルの $\bullet$ 」を融合して, ラベルのない $\bullet$ に置き換える. また $b \in B$, $b^* \in B^*$ というラベルは除去する.

たとえば

$$A = \{a_1, a_2\}, \quad A^* = \{a_1^*, a_2^*\}, \quad B = \{b_1, b_2\}, \quad B^* = \{b_1^*, b_2^*\}$$

で $\iota^*(a_1) = a_1^*$, $\iota^*(a_2) = a_2^*$ のときの例をあげる:

$$\begin{aligned} \Phi(\theta_{b_1^* a_1} \theta_{a_1^* a_2} \theta_{a_2^* b_1} \theta_{b_2^* b_2}) &= \Phi(\bullet \xrightarrow{b_1^*} \circ \xrightarrow{a_1} \bullet \xrightarrow{a_1^*} \circ \xrightarrow{a_2} \bullet \xrightarrow{a_2^*} \circ \xrightarrow{b_1} \bullet \xrightarrow{b_1^*} \circ \xrightarrow{b_2} \bullet \xrightarrow{b_2^*} \circ) \\ &= \bullet \rightarrow \bullet \rightarrow \bullet \rightarrow \circ \bullet \rightarrow \circ \\ &= \psi^{(2)} \psi^{(0)}. \end{aligned}$$

Ξ によって θ_{c^*c} たちの積は $\varphi^{(k)}$ や $\psi^{(k)}$ たちの積に移る. これに注意すると, 第一基本定理はほぼ明らかである. 実際, Ξ は全射で $GL(V)$ の作用を保つから, $\mathcal{U}^{GL(V)}$ の任意の元は $\mathcal{U}_0^{GL(V)}$ から来る. 任意の $\mathcal{U}_0^{GL(V)}$ の元は θ_{c^*c} たちの積で張られて, Ξ でこの積は $\varphi^{(k)}$ や $\psi^{(k)}$ たちの積に移る. よって $\mathcal{U}^{GL(V)}$ の任意の元は $\varphi^{(k)}$ や $\psi^{(k)}$ の積で張られる.

ただしこのままでは無限個の

$$\varphi^{(1)}, \varphi^{(2)}, \dots, \quad \psi^{(0)}, \psi^{(1)}, \dots$$

で生成されることがわかっただけである。実際には,

$$\varphi^{(1)}, \varphi^{(2)}, \dots, \varphi^{(n)}, \quad \psi^{(0)}, \psi^{(1)}, \dots, \psi^{(n-1)}$$

だけで十分だが, それは (通常の) Cayley–Hamilton 定理を利用してわかる. 実際, Cayley–Hamilton 定理を繰り返し適用すると $Z^1, Z^2, \dots$ は $Z^0, \dots, Z^n$ に $\omega^{(1)}, \dots, \omega^{(n)}$ の多項式を掛けたものの和で書ける. このことを $\varphi^{(k)}, \psi^{(l)}$ の定義式に当てはめたらよい.

3.3. 不変式論の第二基本定理も diagram で考えると便利である. 比較的弱いかたちの第二基本定理は diagram の言葉で述べられて, 証明も diagram を利用して理解できる. この第二基本定理はすこし強いかたちに改良できて, それが阿賀岡による Cayley–Hamilton 型定理 (定理 0.1) と密接な関係になるのである.

弱いかたちの第二基本定理をひとことで言うと, 「生成元の関係式は『 $n+1$ 本の交代和 $= 0$ 』というもので尽きる」ということになる. 不変式の生成元 $\varphi^{(k)}, \psi_{b*b}^{(l)}$ を diagram で表して, これに「 $n+1$ 本の交代和」を適用すると生成元の関係式を得るが, 実はすべての関係式はこのようにして得られるのである.

たとえば $n=2$ のとき, 3 本の交代和は 0 になる. そこで交代和を愚直に書き下すと $\varphi^{(k)}, \psi_{b*b}^{(l)}$ たちの関係式をひとつ得る. 一例をあげよう:

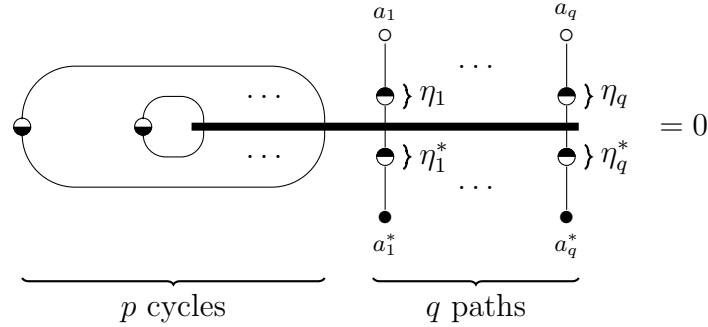
$$\begin{aligned} 0 &= \text{diagram 1} = \text{diagram 2} - \text{diagram 3} - \text{diagram 4} - \text{diagram 5} + \text{diagram 6} + \text{diagram 7} \\ &= \varphi^{(1)}\psi_{11}^{(0)}\psi_{22}^{(0)} - \psi_{11}^{(1)}\psi_{22}^{(0)} - \psi_{11}^{(0)}\psi_{22}^{(1)} - \varphi^{(1)}\psi_{12}^{(0)}\psi_{21}^{(0)} + \psi_{12}^{(0)}\psi_{21}^{(1)} + \psi_{12}^{(1)}\psi_{21}^{(0)}. \end{aligned}$$

実は同様の手順ですべての関係式が得られる. つまり次のような「 $n+1$ 本での交代和 $= 0$ 」という関係式たちがすべての関係式を生成する (ただし $p+q=n+1$ とする) :

$$\underbrace{\lambda_p \{ \bullet \} \quad \lambda_1 \{ \bullet \} \quad \dots}_{p \text{ cycles}} \quad \underbrace{\dots \quad \eta_1 \{ \bullet \} \quad \eta_1^* \{ \bullet \} \quad \dots \quad \eta_q \{ \bullet \} \quad \eta_q^* \{ \bullet \}}_{q \text{ paths}} = 0.$$

ここで $\lambda_1, \dots, \lambda_p, \eta_1, \dots, \eta_q, \eta_1^*, \dots, \eta_q^*$ は $\bullet$ の個数を表している.

実際にはこれにはまだ無駄がある．すべての関係式を生成するにはこれらのうち $\lambda_1 = \dots = \lambda_p = 1$ のもの、つまり



だけで十分なのである．定理 0.1 が (1.3) と同値なことに注意すると、これは定理 0.1 を $\bullet$ で伸ばして $\circ$ や $\bullet$ で「ふた」をしたもの、つまり (0.1) の関係式である．このような定理 0.1 から得られるものだけで関係式は本質的に尽きているのである．

3.4. Cayley–Hamilton の定理やその高階版 (定理 0.1) をそのまま第二基本定理の生成元と見なすこともできる．

まず通常の Cayley–Hamilton 定理は次の代数 $\mathcal{R}$ の $GL(V)$ -不変元に対する第二基本定理と見なせる：

$$\mathcal{R} = \mathcal{P}(V \otimes V^*) \otimes V \otimes V^*.$$

$GL(V)$ はこの $\mathcal{R}$ に自己同型として自然に作用する．次の $\mathcal{R}$ の元は $GL(V)$ -不変元となる ($z_{ij} \in \mathcal{P}(V \otimes V^*)$ は $V \otimes V^*$ の自然な座標)：

$$Z = (z_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} = \sum_{1 \leq i, j \leq n} z_{ij} \otimes E_{ij}.$$

実際にはこれからすべての不変元が生成される．つまり不変式論の第一基本定理は次のようになる：

定理 3.1. $\mathcal{R}^{GL(V)}$ は $\mathcal{P}(V \otimes V^*)^{GL(V)}$ -代数として Z から生成される．

さらに通常の Cayley–Hamilton 定理はこの生成元の関係式を与えるが、これで実質的に Z の関係式は尽きる．つまり不変式論の第二基本定理は次のようになる：

定理 3.2. $\mathcal{R}^{GL(V)}$ の生成元 Z の関係式はすべて Cayley–Hamilton 定理から生成される ($\mathcal{P}(V \otimes V^*)^{GL(V)}$ -代数のイデアルとして) ．

一方、高階の Cayley–Hamilton 定理 (定理 0.1) は次の代数 $\mathcal{R}_r$ の $GL(V)$ -不変元に対する第二基本定理と見なせる：

$$\mathcal{R}_r = \mathcal{P}(V \otimes V^*) \otimes (V \otimes V^*)^{\otimes r}.$$

$GL(V)$ はこの $\mathcal{R}_r$ に自己同型として自然に作用する. また群環 $\mathbb{C}S_r$ もこの代数に自然に埋め込める. $\mathcal{R}_1 \subset \mathcal{R}_2 \subset \dots$ という自然な埋め込みを考えると, Z は $\mathcal{R}_r$ の $GL(V)$ -不変元となる. 実際はこれからすべての不変元が生成される. つまり不変式論の第一基本定理は次のようになる:

定理 3.3. すべての $\mathcal{R}_r$ の $GL(V)$ -不変元は Z から $(\mathcal{P}(V \otimes V^*)^{GL(V)}, \mathbb{C}S_r)$ -代数として生成される.

さらに定理 0.1 はこれらの生成元のあいだの関係式を与えるが, これで生成元の関係式は本質的に尽きる. つまり不変式論の第二基本定理は次のようになる (正確な表現は省略):

定理 3.4. $\mathcal{R}_r^{GL(V)}$ の生成元 Z の関係式はすべて $q = 1, \dots, r$ に対する定理 0.1 の関係式から生成される ($(\mathcal{P}(V \otimes V^*)^{GL(V)}, \mathbb{C}S_r)$ -代数のイデアルとして).

3.5. $\mathcal{P}(V \otimes V^* \oplus mV \oplus m^*V^*)^{GL(V)}$ の第二基本定理の証明の方針を述べておく.

これも写像 Ξ を利用して証明できる. Ξ を通じて $\varphi^{(k)}, \psi_{b^*b}^{(l)}$ たちの関係式はすべてベクトル不変式の生成元 θ_{c^*c} たちの関係式から来ることがわかる. θ_{c^*c} たちの関係式は「 $n+1$ 本の θ_{c^*c} の交代和 = 0」 というものから生成されたが, このような関係式は Ξ で「 $n+1$ 本の $\varphi^{(k)}, \psi_{b^*b}^{(l)}$ たちの交代和 = 0」 に写される (Ξ は $\bullet$ と $\circ$ を融合して $\bullet$ に置き換えたり, ラベルを付け替えたりするだけだから). このようにして第二基本定理が証明できる.

4. $\mathcal{P}(S_2(V) \oplus S_2(V^*) \oplus mV \oplus m^*V^*)$ における $GL(V)$ -不変元

前節で議論した不変式環以外にも, 同じような考え方でとらえられる不変式環はいろいろある. たとえば次の不変式環である:

$$\mathcal{P}(S_2(V) \oplus S_2(V^*) \oplus mV \oplus m^*V^*)^{GL(V)}.$$

この不変式環も「長さのみで決まる cycle」と「長さと端点のデータだけで決まる path」で生成される. そして第二基本定理は定理 0.1 を用いて記述できるのである.

$S_2(V)$ と $S_2(V^*)$ の座標をそれぞれ z_{ij}, z_{ij}^* と表す. また a 番目の V の座標を $x_i^{(a)}$ と, a^* 番目の V^* の座標を $x_i^{*(a^*)}$ と表す. これを diagram で次のように表そう:

$$z_{ij} = \overset{i}{\leftarrow} \circ \overset{j}{\rightarrow}, \quad z_{ij}^* = \overset{i}{\rightarrow} \bullet \overset{j}{\leftarrow}, \quad x_i^{(a)} = \overset{i}{\leftarrow} \overset{a}{\circ}, \quad x_i^{*(a^*)} = \overset{a^*}{\bullet} \overset{i}{\leftarrow}.$$

するとこの場合も同じ考え方で, 不変式は cycle と path で生成されることがわかる (どちらも $\circ$ と $\bullet$ が交互に並び, path の両端にはラベルのついた $\circ$ または $\bullet$ が来る).

第二基本定理も同様にわかる. Diagram で表した生成元たちに「 $n+1$ 本で交代和」を適用すると生成元たちの関係式を得る. これらで生成元のあいだの関係式はすべて生成されるのである. そして実際にはこれは定理 0.1 から得られるものだけで十分である. つま

り ZZ^* に関する定理 0.1 の関係式に「ふた」をすると生成元たちの関係式を得るが、これらから生成元の関係式はすべて生成されるのである。

5. $\mathcal{P}(\Lambda_2(V) \oplus 2mV)$ における $Sp(V)$ -不変元

すこし異なる Cayley–Hamilton 型定理で第二基本定理が記述できるものもある。たとえば次の不変式環である：

$$\mathcal{P}(\Lambda_2(V) \oplus 2mV)^{Sp(V)}.$$

ただし n 次元複素ベクトル空間 V に非退化な交代双線型形式を定めていて、これに関するシンプレクティック群 $Sp(V)$ を考えている。この不変式環も端点を除いて長さのみで決まる cycle と path で生成されるが、第二基本定理はすこし異なる Cayley–Hamilton 型定理で記述される。

$\Lambda_2(V)$ と a 番目の V の座標をそれぞれ z_{ij} , $x_i^{(a)}$ と表す。これを diagram で次のように表そう：

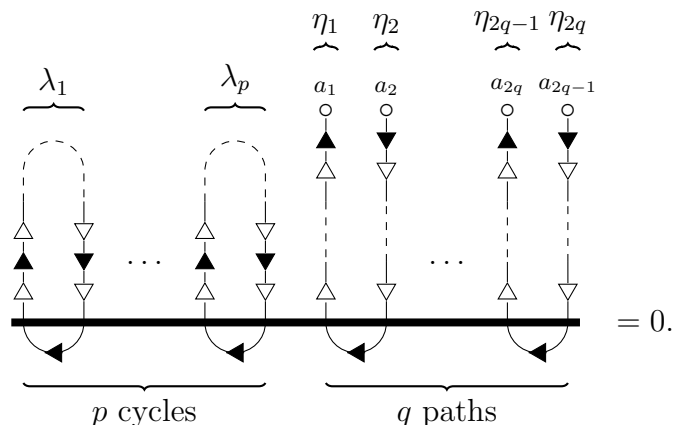
$$z_{ij} = \overset{i}{\leftarrow} \triangleleft \overset{j}{\rightarrow}, \quad x_i^{(a)} = \overset{i}{\leftarrow} \overset{a}{\circ}.$$

$z_{ij} = -z_{ji}$ なので、左右の区別のつく $\triangleleft$ という記号を使っている。また交代双線型形式を表す交代行列 J を次のように表そう：

$$J = \triangleright \longrightarrow \blacktriangleleft \longleftarrow \triangleleft.$$

このように表すと不変式はやはり cycle と path で生成されることがわかる（ $\triangleleft$ と $\blacktriangleleft$ が交互に並ぶ。path の両端にはラベルのついた $\circ$ がある）。

第二基本定理も、ベクトル不変式の第二基本定理を翻訳することでわかる。結局次のかたちの関係式が生成元となる（ $p + q = n/2 + 1$ とする）：



ここで λ_i は $\triangleleft$ と $\blacktriangleleft$ が λ_i 個ずつあることを表す。また η_i は $\triangleleft$ と $\blacktriangleleft$ が η_i 個ずつあることを表す（ただし太い線の下部の $\blacktriangleleft$ は別にカウントする）。実際には $\lambda_1 = \dots = \lambda_p = 1$ の場合

だけで十分であることもわかる. つまり次の関係式に「 $\triangleleft$ と $\blacktriangleleft$ で伸ばして $\circ$ でふたをする」という操作をすればすべての関係式が得られる:

$$(5.1) \quad \underbrace{\begin{array}{c} \circlearrowleft \quad \cdots \quad \circlearrowleft \\ \hline \end{array}}_{p \text{ cycles}} \underbrace{\begin{array}{c} \text{Y} \quad \text{Y} \quad \cdots \quad \text{Y} \quad \text{Y} \\ \hline \end{array}}_{q \text{ lines}} = 0.$$

$q = 1$ のときには, これは [D], [I] で与えられた次の関係式 (言わば Pfaffian 版の Cayley–Hamilton 定理) と本質的に同じものになる:

定理 5.1. ふたつの n 次交代行列 A, B に関して次が成立する:

$$\begin{aligned} \sum_{k+l=m} \text{pf}_{2k}(A, B)(AB)^l &= 0, & n = 2m \text{ のとき}, \\ \sum_{k+l=m} \text{pf}_{2k}(A, B)B(AB)^l &= 0, & n = 2m + 1 \text{ のとき}. \end{aligned}$$

ただし $\text{pf}_{2k}(A, B)$ を次のようにおく (A, B は n 次の交代行列):

$$\text{pf}_{2k}(A, B) = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_{2k} \leq n} \text{pf}(A_{i_a i_b})_{1 \leq a, b \leq 2k} \text{pf}(B_{i_a i_b})_{1 \leq a, b \leq 2k}.$$

通常の Cayley–Hamilton 定理と阿賀岡版 (定理 0.1) との関係はこの pfaffian 版の Cayley–Hamilton 定理と上記の (5.1) との関係に等しい.

6. $\Lambda(V \otimes V^*)$ における $GL(V)$ -不変元

これ以降は, 外積代数における不変式論を考える. ここまで議論してきたことの多くが外積代数でもなりたち, 証明も diagram を利用して理解できる (非可換であることで注意すべき点はあるが).

まず本節では, 外積代数 $\Lambda(V \otimes V^*)$ における $GL(V)$ -不変元に注目する. $\mathcal{P}(V \otimes V^*)^{GL(V)}$ というよくわかっている不変式環の言わば反可換版である. $\mathcal{P}(V \otimes V^*)^{GL(V)}$ は n 変数多項式環と同型だが, 結論を言うと $\Lambda(V \otimes V^*)^{GL(V)}$ もやはり n 個の元から生成される (ただし $n = \dim V$). そしてこの n 個の生成元は互いに反可換で, この反可換性以外の関係式を持たない. つまり $\Lambda(V \otimes V^*)^{GL(V)}$ は n 次元ベクトル空間上の外積代数と同型となる. このように可換と反可換で, 非常にパラレルになる.

このようなパラレルな様子は Cayley–Hamilton 定理に関しても見られる. 通常の Cayley–Hamilton 定理は $\mathcal{P}(V \otimes V^*)^{GL(V)}$ の元を係数とする n 次の関係式だが, 反可換な枠組みでもこれに似た $\Lambda(V \otimes V^*)^{GL(V)}$ を係数とする $2n - 1$ 次の関係式がなりたつのである. この反可換版の Cayley–Hamilton 定理は polynomial identity の理論の先駆けになった Amitsur–Levitzki 定理とも深く関係する (言わば Amitsur–Levitzki 定理の精密化).

Amitsur–Levitzki 定理にはいくつか類似の定理があるが、次節で見るようにこれらも別の外積代数の不変式環に対応づけられる。

このような話がやはり diagram を用いてうまく理解できる。証明もこれまでと同じようにベクトル不変式の第一・第二基本定理の翻訳で得られるのである。

6.1. V を n 次元の複素ベクトル空間として、 $V \otimes V^*$ 上の外積代数 $\Lambda(V \otimes V^*)$ における $GL(V)$ -不変元に注目する。まず第一・第二基本定理を確認しよう。結論を言うと、 $\Lambda(V \otimes V^*)^{GL(V)}$ は次の元たちから生成される（今後は右辺のように外積代数の積の記号 “ $\wedge$ ” は省略して書く）：

$$\varphi^{(k)} = \sum_{1 \leq i_1, \dots, i_k \leq n} z_{i_1 i_2} \wedge z_{i_2 i_3} \wedge \dots \wedge z_{i_k i_1} = \sum_{1 \leq i_1, \dots, i_k \leq n} z_{i_1 i_2} z_{i_2 i_3} \dots z_{i_k i_1}.$$

ここで z_{ij} は $V \otimes V^*$ の標準的な基底である。これは z_{ij} を成分とする

$$Z = (z_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} = \sum_{1 \leq i, j \leq n} z_{ij} \otimes E_{ij} \in \Lambda(V \otimes V^*) \otimes V \otimes V^*$$

という行列を用いて簡潔に $\varphi^{(k)} = \text{tr}(Z^k)$ と表せる。この $\varphi^{(k)}$ の $GL(V)$ -不変性は易しい。そしてこの $\varphi^{(1)}, \varphi^{(2)}, \dots$ から $\Lambda(V \otimes V^*)^{GL(V)}$ が生成されることは、定理 0.2 の証明と同様にベクトル不変式に関する第一基本定理からわかる。

この $\varphi^{(k)}$ は k によっては 0 になる。まず k が偶数のとき 0 になる（つまり $\varphi^{(2r)} = 0$ ）が、これは次の等式からわかる：

$$\varphi^{(2r)} = \sum_{1 \leq i_1, \dots, i_{2r} \leq n} z_{i_1 i_2} z_{i_2 i_3} \dots z_{i_{2r} i_1} = - \sum_{1 \leq i_1, \dots, i_{2r} \leq n} z_{i_2 i_3} \dots z_{i_{2r} i_1} z_{i_1 i_2} = -\varphi^{(2r)}.$$

第二の等号で左端の $z_{i_1 i_2}$ を右端に移動させていて、この際に奇数個の元を飛び越えるので符号が反転する。また $k \geq 2n$ なら $\varphi^{(k)} = 0$ となることが、後で Cayley–Hamilton 型の定理からわかる。これらをまとめると結局次がなりたつ（第一基本定理）：

定理 6.1. $\Lambda(V \otimes V^*)^{GL(V)}$ は $\varphi^{(1)}, \varphi^{(3)}, \dots, \varphi^{(2n-3)}, \varphi^{(2n-1)}$ で生成される。

さらに第二基本定理として次がわかる：

定理 6.2. $\varphi^{(1)}, \varphi^{(3)}, \dots, \varphi^{(2n-3)}, \varphi^{(2n-1)}$ は互いに反可換であり、この反可換性以外に関係式を持たない。よって $\Lambda(V \otimes V^*)^{GL(V)}$ は n 次元ベクトル空間上の外積代数と同型である。

定理 6.2 の証明。まず $\varphi^{(1)}, \varphi^{(3)}, \dots, \varphi^{(2n-1)}$ は奇数次の元だから、互いに反可換である。

あとは $\varphi^{(1)} \varphi^{(3)} \dots \varphi^{(2n-3)} \varphi^{(2n-1)} \neq 0$ を示せばよい。そこで $\Lambda(V \otimes V^*)$ の次の元に注目する（行列 Z の成分をすべて掛け合わせたもの）：

$$z_{11} z_{12} \dots z_{1n} \times z_{21} z_{22} \dots z_{2n} \times \dots \times z_{n1} z_{n2} \dots z_{nn}.$$

この元は $GL(V)$ -不変だから $\varphi^{(1)}, \varphi^{(3)}, \dots, \varphi^{(2n-1)}$ で生成される. しかしこの元は n^2 次だから, $\varphi^{(1)}, \varphi^{(3)}, \dots, \varphi^{(2n-1)}$ をすべて掛け合わせる必要がある $(1+3+\dots+(2n-1) = n^2)$. よって $\varphi^{(1)}\varphi^{(3)}\dots\varphi^{(2n-3)}\varphi^{(2n-1)}$ は 0 にはなりえない. $\square$

この不変式環の生成元も diagram を用いて表せる. 行列 Z を

$$Z = \leftarrow \bullet \rightarrow$$

と表すと, これを用いて $\varphi^{(2r-1)}$ は次のように表せる ($\bullet$ が $2r-1$ 個):

$$\varphi^{(2r-1)} = \text{tr}(Z^{2r-1}) = \left(\bullet \text{---} \bullet \text{---} \dots \text{---} \bullet \text{---} \bullet \right).$$

外積代数という非可換代数での議論だから, 掛け算の順序は注意が必要だが, $\bullet$ の積の順番は適当に解釈することにする (一貫してさえいれば, 符号しかずれないのであまり神経質になる必要はない). また上で述べた $\text{tr}(Z^{2r}) = 0$ という関係式は「長さ偶数の cycle は 0」と言い換えられる.

6.2. 不変元の生成系 $\varphi^{(1)}, \varphi^{(3)}, \dots, \varphi^{(2n-1)}$ と行列 Z に関して次のような Cayley–Hamilton 定理の類似が成立する:

定理 6.3. $\Lambda(V \otimes V^*) \otimes V \otimes V^*$ において次がなりたつ (ただし Z^0 は単位行列を意味する):

$$nZ^{2n-1} - \varphi^{(1)}Z^{2n-2} - \varphi^{(3)}Z^{2n-4} - \dots - \varphi^{(2n-3)}Z^2 - \varphi^{(2n-1)}Z^0 = 0.$$

この等式に $Z^2, Z^4, \dots$ を掛けてトレースをとると $\varphi^{(2n+1)} = \varphi^{(2n+3)} = \dots = 0$ であることがわかる ($\text{tr}(Z^{2r}) = 0$ だから). 特に不変式環 $\Lambda(V \otimes V^*)^{GL(V)}$ を生成するのに $2n-1$ 次以下の元 $\varphi^{(1)}, \varphi^{(3)}, \dots, \varphi^{(2n-1)}$ だけで十分だとわかる.

なお $GL(V)$ -不変元を係数とする Z の関係式でモニックなものでは, この定理 6.3 の関係式が最小次数である. このことは定理 6.1 からわかる. 実際にはもっと強く, 定理 6.3 は $\Lambda(V \otimes V^*) \otimes V \otimes V^*$ の $GL(V)$ -不変元に対する第二基本定理とも見なせる.

また Z は成分が互いに反可換な行列でもっとも generic なものと思えるから, 成分が互いに反可換な n 次正方行列 A に対して一般に同じ等式が成立する:

$$(6.1) \quad nA^{2n-1} - \text{tr}(A)A^{2n-2} - \text{tr}(A^3)A^{2n-4} - \dots - \text{tr}(A^{2n-3})A^2 - \text{tr}(A^{2n-1})A^0 = 0.$$

定理 6.3 の証明はすこし後で diagram を用いて説明する.

6.3. この Cayley–Hamilton 型の定理は次の Amitsur–Levitzki 定理と深い関係がある:

定理 6.4 (Amitsur–Levitzki [AL]). $2n$ 個の n 次複素正方行列 $A_1, \dots, A_{2n}$ に対して, 次がなりたつ:

$$\sum_{\sigma \in S_{2n}} \text{sgn}(\sigma) A_{\sigma(1)} A_{\sigma(2)} \cdots A_{\sigma(2n)} = 0.$$

これはこの手の関係式 (n 次正方行列のなす代数における任意個の変数の定係数の恒等式) の中でもっとも次数の低いものであることが知られている.

Amitsur と Levitzki が定理 6.4 を発見したときの証明はかなり複雑だったが, その後 Rosset が簡潔で初等的な証明を与えた [R]. その鍵が, 形式的な反可換変数 $e_1, \dots, e_{2n}$ を用いて定める次のような反可換成分の行列である:

$$A = A_1 e_1 + \cdots + A_{2n} e_{2n}.$$

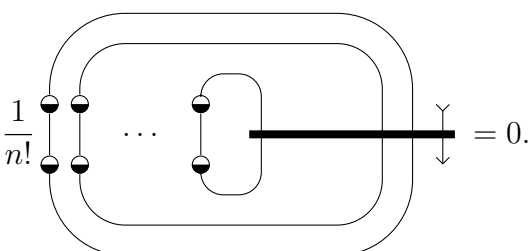
A^{2n} は次のように展開できるから, 定理 6.4 を示すには $A^{2n} = 0$ という関係を示せばよい:

$$A^{2n} = \sum_{\sigma \in S_{2n}} \text{sgn}(\sigma) A_{\sigma(1)} A_{\sigma(2)} \cdots A_{\sigma(2n)} e_1 e_2 \cdots e_{2n}.$$

そしてこの等式 $A^{2n} = 0$ 自身は, 行列 A^2 に通常の Cayley–Hamilton 定理を適用すれば得られる (A^2 の成分は互いに可換だから通常の Cayley–Hamilton 定理が成立して, $\text{tr}(A^2) = \text{tr}(A^4) = \cdots = 0$ ということから A^2 の固有多項式の係数は最高次以外はすべて 0 になる). これが Rosset [R] による定理 6.4 の証明である.

この $A^{2n} = 0$ という等式は, 定理 6.3 から導くこともできる. 実際 A は成分が反可換なので (6.1) が成立する. これに A を左から掛けたものと右から掛けたものを足して $2n$ で割れば $A^{2n} = 0$ を得る. この意味で反可換版の Cayley–Hamilton 型の定理 (定理 6.3) は Amitsur–Levitzki 定理の精密化と言える.

6.4. $A^{2n} = 0$ という式は diagram の等式として次のように表される. A^2 に通常の Cayley–Hamilton の定理を適用するのだから, (1.1) の $\leftarrow \bullet \rightarrow$ を二個つながった $\leftarrow \bullet \bullet \rightarrow$ に置き換えたらい:

(6.2)  = 0.

左辺のそれぞれの輪には A とラベル付けした $\bullet$ が 2 個ずつある. $n+1$ 本の交代和だから 0 に等しい (本質的にベクトル不変式の第二基本定理) が, 同時にこの交代和は A^{2n} と書き換えられる. この書き換えはさっきも説明したが, 実際には diagram で考える方が理解しやすい. 交代和を書き下すと, 長さ偶数の cycle は 0 だから, cycle がひとつも生じない項, つまり矢羽から矢尻まで「一筆書き」で $2n$ 個すべての $\bullet$ を通る項だけを考えることになる. この一筆書きの経路の個数を数えると, この交代和は A^{2n} と書き換えられる.

また diagram で Cayley–Hamilton 型の定理（定理 6.3）や (6.1) は次のように表される:

$$(6.3) \quad \frac{1}{n!} \left(\text{diagram} \right) = 0.$$

これも $n + 1$ 本の交代和である. それぞれの輪には $\bullet$ が 2 個ずつあるが, 一番外側の輪だけは 1 個だけである (結局 (6.2) より $\bullet$ がひとつ減っている). $n + 1$ 本の交代和だから 0 に等しいが, その一方で長さ偶数の cycle が 0 であることに注意してこの交代和を書き下すと定理 6.3 の左辺になる.

7. 他の Amitsur–Levitzki 型の定理と外積代数での不変式論

Amitsur–Levitzki 定理 (定理 6.4) の類似で外積代数の不変式論と関係するものがいくつかある.

7.1. まず定理 6.4 の類似として, 次がよく知られている:

定理 7.1 (Kostant [K]). $2n - 2$ 個の n 次複素交代行列 $A_1, \dots, A_{2n-2}$ に対して, 次がなりたつ:

$$\sum_{\sigma \in S_{2n-2}} \text{sgn}(\sigma) A_{\sigma(1)} A_{\sigma(2)} \cdots A_{\sigma(2n-2)} = 0.$$

定理 6.4 に似ているが, 行列を交代行列に制限すると行列の個数を 2 個減らせるのである. この証明は定理 6.4 よりはずっと難しく, 初めて Kostant がこの定理を発見したときにはリー環のコホモロジーの理論を使って証明した. その後も定理 6.4 のような初等的で簡潔な証明は得られていなかった.

しかしこの Amitsur–Levitzki 型の定理も, 定理 6.4 と同様に外積代数における不変式論に対応づけられて, 定理 6.3 と似た Cayley–Hamilton 型の定理から導くこともできる. 具体的にはこの定理 7.1 は外積代数 $\Lambda(\Lambda_2(V))$ の $O(V)$ -不変元に対応づけられる (V は非退化な対称双線型形式が定義された n 次元複素ベクトル空間). $\Lambda_2(V)$ の基底 $a_{ij} = e_i \wedge e_j$ をとると, これは $\Lambda(\Lambda_2(V))$ の生成系になる ($e_1, \dots, e_n$ は V の対称双線型形式に関する正規直交基底). この生成系を並べた行列

$$A = (a_{ij}) = \sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{ij} \otimes e_i \otimes e_j \in \text{Mat}_n(\Lambda(\Lambda_2(V))) = \Lambda(\Lambda_2(V)) \otimes V \otimes V$$

を考えると $\Lambda(\Lambda_2(V))^{O(V)}$ は次で生成される（そしてこれらは互いに反可換．証明は略すが，さらに反可換性以外の関係式を持たないこともわかる）：

$$\begin{aligned} \operatorname{tr}(A^3), \operatorname{tr}(A^7), \operatorname{tr}(A^{11}), \dots, \operatorname{tr}(A^{4m-1}), & \quad n = 2m + 1, \\ \operatorname{tr}(A^3), \operatorname{tr}(A^7), \operatorname{tr}(A^{11}), \dots, \operatorname{tr}(A^{4m-5}), & \quad n = 2m. \end{aligned}$$

$l \not\equiv 3 \pmod{4}$ のとき $\operatorname{tr}(A^l) = 0$ となり，これも鍵の一つである．

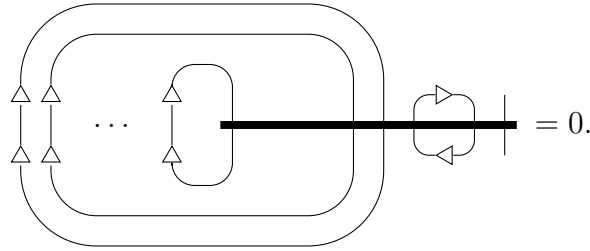
これらの生成元に関して次の Cayley–Hamilton 型の定理が成立する：

定理 7.2. $\operatorname{Mat}_n(\Lambda(\Lambda_2(V))) = \Lambda(\Lambda_2(V)) \otimes V \otimes V$ において次がなりたつ：

$$\begin{aligned} nA^{2n-3} - \sum_{0 \leq k \leq m-1} \operatorname{tr}(A^{4k+3}) A^{2n-3-4k-3} &= 0, & n = 2m + 1, \\ (n-2)A^{2n-3} - \sum_{0 \leq k \leq m-2} \operatorname{tr}(A^{4k+3}) A^{2n-3-4k-3} &= 0, & n = 2m. \end{aligned}$$

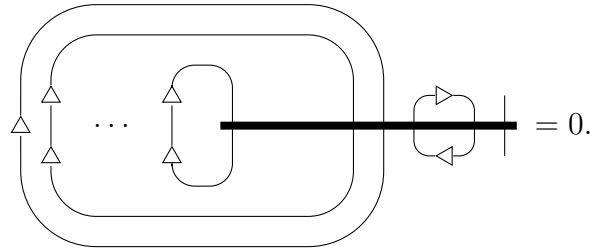
この定理から定理 7.1 を導くのは易しい．まず前節で述べたのと同じ手順で $A^{2n-2} = 0$ という等式が得られて，さらにこの等式から定理 7.1 がわかる．

またこの $A^{2n-2} = 0$ は直接 diagram で表して証明することもできる．対応するのが次の diagram の等式である（これも $n+1$ 本の交代和）：



ただし A を $A = \text{---} \triangleleft \text{---}$ と表す．直交群を定める対称双線型形式を通じて V と V^* は同一視できるから矢尻と矢羽の区別はつけない． $l \not\equiv 3 \pmod{4}$ のとき $\operatorname{tr}(A^l) = 0$ となることに注意すると，この交代和を書き下したときに，すべての $\triangle$ を「一筆書き」する項しか残らないことがわかる．

また定理 7.2（Cayley–Hamilton 型定理）は diagram で次のように表される：



やはりこれも $n+1$ 本の交代和である． $l \not\equiv 3 \pmod{4}$ のとき $\operatorname{tr}(A^l) = 0$ となることに注意すると，この交代和を書き下したときに，「長さ $4k+3$ の cycle と $A^{2n-3-4k-3}$ 」という項以外は A^{2n-3} という項しか出ないことがわかる．

7.2. 定理 7.1 の他に次のような Amitsur–Levitzki 定理の類似もある:

定理 7.3. n 個の n 次複素交代行列 $A_1, \dots, A_n$ と $n-1$ 個の n 次複素対称行列 $B_1, \dots, B_{n-1}$ に対して, 次がなりたつ:

$$\sum_{\sigma \in S_n, \tau \in S_{n-1}} \text{sgn}(\sigma) \text{sgn}(\tau) A_{\sigma(1)} B_{\tau(1)} A_{\sigma(2)} B_{\tau(2)} \cdots A_{\sigma(n-1)} B_{\tau(n-1)} A_{\sigma(n)} = 0.$$

対称行列の個数をもうひとつ増やしたものは以前から知られていた:

定理 7.4 (Giambruno [G]). n 個の n 次複素交代行列 $A_1, \dots, A_n$ と n 個の n 次複素対称行列 $B_1, \dots, B_n$ に対して, 次がなりたつ:

$$\sum_{\sigma, \tau \in S_n} \text{sgn}(\sigma) \text{sgn}(\tau) A_{\sigma(1)} B_{\tau(1)} A_{\sigma(2)} B_{\tau(2)} \cdots A_{\sigma(n-1)} B_{\tau(n-1)} A_{\sigma(n)} B_{\tau(n)} = 0.$$

この場合は証明はずっと易しくなり, 前節で述べた Rosset [R] による定理 6.4 の証明とほぼ同じ方法が使える. しかし定理 7.3 のように対称行列の個数を $n-1$ 個にすると, もっと精密に扱わなければ証明できない.

定理 7.3 は, n 次元複素ベクトル空間 V の 2 次交代テンソル積と V^* の 2 次対称テンソル積の直和の上の外積代数 $\Lambda(\Lambda_2(V) \oplus S_2(V^*))$ における $GL(V)$ -不変元と対応づけられる. この外積代数において $GL(V)$ -不変元は自明なものしかない. つまり $\Lambda(\Lambda_2(V) \oplus S_2(V^*))^{GL(V)} = \mathbb{C}1$ である. これもベクトル不変式の第一基本定理を翻訳することでわかる.

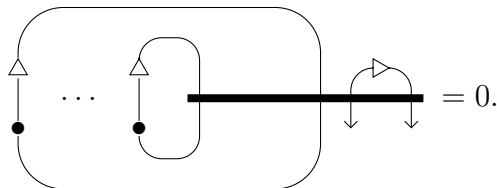
簡単に説明しよう. $\Lambda_2(V)$ の基底 $a_{ij} = e_i \wedge e_j$ と $S_2(V^*)$ の基底 $b_{ij} = e_i^* e_j^*$ をとる (e_i は V の基底, e_i^* はその双対基底). これらを成分とする行列 $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ を考える. ベクトル不変式の第一基本定理を翻訳すると, まず不変元が $\text{tr}(AB)^k$ というかたちのもので生成されることがわかるが, 実際には $k \geq 1$ に対してこれらはすべて 0 になってしまうのである.

またこの状況に対応する Cayley–Hamilton 型の定理として次の関係式がなりたち, これから定理 7.3 はすぐ出る:

定理 7.5. $\text{Mat}_n(\Lambda(\Lambda_2(V) \oplus S_2(V^*))) = \Lambda(\Lambda_2(V) \oplus S_2(V^*)) \otimes V \otimes V^*$ において次がなりたつ:

$$(AB)^{n-1} A = 0.$$

これは diagram で次のように表される:



ただしこれは $n + 1$ 本の交代和であり, また A, B を次のように表す:

$$A = \leftarrow \triangleleft \longrightarrow, \quad B = \triangleright \longrightarrow \bullet \longrightarrow \leftarrow.$$

$n + 1$ 本の交代和なので左辺は 0 に等しい. そして $\text{tr}(AB)^k = 0$ に注意してこの交代和を書き下すと, ここにある n 個の $\triangleleft$ と $n - 1$ 個の $\bullet$ すべてを「一筆書き」するものしか残らないことになる.

REFERENCES

- [A] Y. Agaoka, *On Cayley-Hamilton's theorem and Amitsur-Levitzki's identity*, Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. **63**, (1987), no. 3, 82–85.
- [AL] A. S. Amitsur and J. Levitzki, *Minimal identities for algebras*, Proc. Amer. Math. Soc. **1**, (1950), 449–463.
- [C] P. Cvitanović, *Group theory: Birdtracks, Lie's, and exceptional groups*, Princeton University Press, Princeton, NJ, 2008.
- [D] D. Ž. Đoković, *On the product of two alternating matrices*, Amer. Math. Monthly **98** (1991), no. 10, 935–936.
- [G] A. Giambruno, *On $\ast$ -polynomial identities for $n \times n$ matrices*, J. Algebra **133** (1990), 433–438.
- [GW] R. Goodman and N. R. Wallach, *Symmetry, representations, and invariants*, Springer, 2009.
- [I] M. Itoh, *A Cayley-Hamilton theorem for the skew Capelli elements*, J. Algebra **242** (2001), no. 2, 740–761.
- [K] B. Kostant, *A theorem of Frobenius, a theorem of Amitsur-Levitzki and cohomology theory*, J. Math. Mech. **7** (1958), 237–264.
- [P] C. Procesi, *Lie groups. An approach through invariants and representations*, Universitext. Springer, New York, 2007.
- [R] S. Rosset, *A new proof of the Amitsur-Levitzki identity*, Israel J. Math. **23** (1976), no. 2, 187–188.