

放物型部分群の交わりと有限型二重旗多様体

Intersection of parabolic subgroups and double flag variety of finite type

近藤健介 青山学院大学 理工学研究科

概要

G を複素数体 $\mathbb{C}$ 上の連結簡約代数群、 $K = G^\theta$ を包含的自己同型 $\theta \in \text{Aut}(G)$ の固定部分群とし、対称対 (G, K) を考える。西山、谷口（青山学院大学）、落合（九州大学）との共同研究において、 (G, K) がエルミート型のときには G の二つの放物型部分群 P_1, P_2 があってそれらの交わりが K の放物型部分群となるものが存在する。一方、 (G, K) が非エルミート型のときには存在しないことが確かめられた。本講演ではこの結果について解説する。

1 Introduction

G を複素簡約代数群とし、 B をそのボレル部分群とする。また、そのリー環を $\mathfrak{g}$ や $\mathfrak{b}$ のように対応するドイツ文字で表す。 G/B を旗多様体と呼ぶ。これは G のボレル部分群の全体とみなすこともできるし、あるいはリー環 $\mathfrak{g}$ のボレル部分環全体とみなすこともできる。また、ボレル部分群を含むような G の部分群 P を放物型部分群という。このとき G/P を部分旗多様体と呼ぶ。

G の包含的自己同型、つまり $\theta^2 = \text{id}$ （ id は恒等写像）となるような自己同型 $\theta \in \text{Aut}(G)$ を取る。このとき θ の固定部分群 $G^\theta = \{g \in G \mid \theta(g) = g\}$ を K と書き K を対称部分群、 (G, K) を対称対と呼ぶ。

P を G の放物型部分群、 Q を K の放物型部分群とする。このとき $\mathfrak{X}_P = G/P$, $\mathfrak{Z}_Q = K/Q$ は部分旗多様体となる。部分旗多様体の直積 $\mathfrak{X}_P \times \mathfrak{Z}_Q$ を二重旗多様体と呼ぶ。二重旗多様体 $\mathfrak{X}_P \times \mathfrak{Z}_Q$ が K の対角的作用によって有限軌道を持つとき、有限型と呼ぶ。同様に、 G の放物型部分群 $P_i (i = 1, 2, 3)$ に対して、三重旗多様体 $\mathfrak{X}_{P_1} \times \mathfrak{X}_{P_2} \times \mathfrak{X}_{P_3}$ は G の対角的作用によって有限軌道を持つとき有限型と呼ばれる。

二重旗多様体 $\mathfrak{X}_P \times \mathfrak{Z}_Q$ の有限性と三重旗多様体 $\mathfrak{X}_{P_1} \times \mathfrak{X}_{P_2} \times \mathfrak{X}_{P_3}$ の有限性には以下に示す条件のもとで関連があることが西山、落合によって示された。

条件 1. K の放物型部分群 Q に対し、 G の放物型部分群 P_1, P_2 が存在していて、 $Q = P_1 \cap P_2$ であり、 $P_1 P_2 \subset G$ が開かつ稠密である。

定理 1. ([Nishiyama-Ochiai.2010]) B を G のボレル部分群とする。条件 1 の下に、三重旗多様体 $\mathfrak{X}_B \times \mathfrak{X}_{P_1} \times \mathfrak{X}_{P_2}$ が G の作用に関して有限型であることと二重旗多様体 $\mathfrak{X}_B \times \mathfrak{Z}_Q$ が K の作用に関して有限型であることは同値になる。

以下、条件 1 を満たす放物型部分群について考えていく。

補題 1. 条件 1 を満たす K の放物型部分群 Q が存在すれば、 $\text{rank}G = \text{rank}K$ が成り立つ。また条件 1 における P_1, P_2 は θ -安定なものに取ることができる。ここで、 θ -安定とは、 G の放物型部分群 P が $\theta(P) = P$ を満たすことを言う。

証明

P_1, P_2 を条件 1 を満たす放物型部分群とする。この P_1, P_2 はそれぞれ G のボレル部分群 B_1, B_2 を含んでいる。これらのボレル部分群 B_1, B_2 の共通部分は G のカルタン部分群 T を含むので、

$$T \subset B_1 \cap B_2 \subset P_1 \cap P_2 = Q \subset K,$$

となる。従って、 T は K のカルタン部分群にもなり、 $\text{rank}G = \text{rank}K$ を満たす。

ここで、 P_1 のリー代数の T に関するルート空間分解を考えると、 $T \subset K$ であることから P_1 は θ -安定となる。証明終

条件 1 が成り立てば、定理 1 によって二重旗多様体の問題は三重旗多様体の問題に帰着できることが分かる。なので、この講演ではこのような条件を満たすような K の放物型部分群 Q はどれくらいあるか、またそのような Q に対し、条件を満たす G の放物型部分群 P_1, P_2 の組が K による共役を除いてどのくらいあるかを考察し、得られた結果について報告する。

2 エルミート対称対

G を単純とする。対称部分群 K が 1 次元の中心をもつとき、対称対 (G, K) をエルミート型という。

定理 2. 対称対 (G, K) がエルミート型ならば、任意の放物型部分群 $Q \subset K$ に対して条件 1 を満たすような G の放物型部分群 P_1, P_2 が存在する。

証明

ルート系 $\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{t})$ の正系 $\Delta^+(\mathfrak{g}, \mathfrak{t})$ をとり、対応する単純ルート系を Π とし、 $\Delta(\mathfrak{k}, \mathfrak{t})$ の正系を $\Delta^+(\mathfrak{k}, \mathfrak{t}) = \Delta(\mathfrak{k}, \mathfrak{t}) \cap \Delta^+(\mathfrak{g}, \mathfrak{t})$ ととり、対応する単純ルート系を Π_K とする。 (G, K) はエルミート型なので、 Π の唯一つの非コンパクトルートを γ とすると、 $\Pi = \Pi_K \cup \{\gamma\}$ となる。

任意の標準放物型部分群 Q は Π_K の部分集合 Π_Q に対応する。ここで Π_Q は Q の Levi 部分群のルート系を生成するものとする。すると $\Pi_Q \subset \Pi_K \subset \Pi$ により、 Π_Q は G のある標準放物型部分群に対応する。これを P_1 とする。また P_S を Π_K に対応する G の標準放物型部分群とし、その opposite を P_2 とする。このとき $P_1 \cap P_2 = Q$ なので条件 1 が満たされる。証明終

具体例として AIII 型で 定理 2 が成り立っているか確認する。

例 1. AIII 型 ($G = GL_n, K = GL_p \times GL_q$ ($p + q = n$))

Q が次のような形のことを考える。

$$Q = \begin{pmatrix} \text{shaded} & & \\ & \text{shaded} & \\ & & \text{shaded} \end{pmatrix} \subset K = \begin{pmatrix} \text{shaded} & & \\ & \text{shaded} & \\ & & \text{shaded} \end{pmatrix}$$

(Note: The diagrams show two 3x3 matrices. The left matrix Q has shaded blocks on the main diagonal and the anti-diagonal. The right matrix K has shaded blocks on the main diagonal and the anti-diagonal, but with a different pattern of shading. The inclusion symbol is between them.)

その Q に対して P_1, P_2 を次のように取る。

$$P_1 = \begin{pmatrix} \text{shaded} & & \\ & \text{shaded} & \\ & & \text{shaded} \end{pmatrix} \quad P_2 = \begin{pmatrix} \text{shaded} & & \\ & \text{shaded} & \\ & & \text{shaded} \end{pmatrix}$$

(Note: The diagrams show two 3x3 matrices. P1 has shaded blocks on the main diagonal and the anti-diagonal. P2 has shaded blocks on the main diagonal and the anti-diagonal, but with a different pattern of shading. The inclusion symbol is between them.)

すると $P_1 \cap P_2 = Q$ となり、また $P_1 P_2 = G$ となる。よって 条件 1 を満たす。

3 非エルミート対称対

G を単純とする。対称部分群 K の中心が有限群であるとき、対称対 (G, K) を非エルミート型という。

定理 3. 対称対 (G, K) が非エルミート型で、 K が単純であるとする。このときどのような放物型部分群 $Q \subset K$ を取っても、条件 1 を満たすような G の放物型部分群 P_1, P_2 は存在しない。

証明 まず、定理 3 の証明のために新しく 命題 1 を用意する。

命題 1. P_1 と P_2 を 条件 1 を満たす G の放物型部分群とする。このとき、 K のどんな単純因子も P_1 もしくは P_2 に含まれる。特に、もし K が単純ならば、 P_1 もしくは P_2 は K を含む。

証明 (命題 1) P_i のリー環を $\mathfrak{p}_i$ と表す。条件 1 より、 $P_1 P_2$ は G の中で稠密であるので、 $\mathfrak{g} = \mathfrak{p}_1 + \mathfrak{p}_2$ となる。補題 1 の証明のように P_1, P_2 に含まれるカルタン部分群 T をとり、これに関するルート空間を $\mathfrak{g}_\alpha$ ($\alpha \in \Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{t})$) とすると、 $\mathfrak{g} = \mathfrak{p}_1 + \mathfrak{p}_2$ により、 $\mathfrak{g}_\alpha$ は $\mathfrak{p}_1$ または $\mathfrak{p}_2$ に含まれる。
 K の一つの単純因子を K_1 とし、また K_1 の最高ルートを δ と表す。 δ を決める際に、正系は Q について矛盾のないように取る。上に示したように、ルート空間 $\mathfrak{g}_{-\delta}$ は $\mathfrak{p}_1$ または $\mathfrak{p}_2$ に含まれる。そして $\mathfrak{g}_{-\delta}$ は $\mathfrak{q}$ の随伴作用の下で $\mathfrak{k}_1$ を生成する。従って、 $\mathfrak{k}_1$ は必ず $\mathfrak{p}_1$ または $\mathfrak{p}_2$ に含まれていなければならない。証明終

証明 (定理 3 つづき) 対称対 (G, K) が非エルミート型で、 K が単純であるとき、条件 1 を満たすような G の放物型部分群 P_1, P_2 が存在するとする。このとき 命題 1 より K の単純因子は P_1, P_2 のいずれかに含まれるが、 K は単純なので K 自身が P_1 または P_2 に含まれる。 $K \subset P_1$ としよう。ここで G/K が非エルミート型であるので、 K は G の極大部分群である。従って P_1 は K または G でなければならないが、それは不可能である。証明終

K は一般には半単純であって、単純とは限らない。単純ではないとき、条件 1 を満たす P_1, P_2 は存在するだろうか。まずは具体例を見てみよう。

例 2. CII 型 $(G = Sp_{2n}(\mathbb{C}), K = Sp_{2p}(\mathbb{C}) \times Sp_{2q}(\mathbb{C}) \quad (p+q=n))$ のとき、どの放物型部分群 $Q \subset K$ に対しても、条件 1 を満たすような G の放物型部分群 P_1, P_2 は存在しない。

証明

$W_G = N_G(T)/T$ を G のワイル群とする。他の群に対しても同様の記法を用いる。 $K = Sp_{2p}(\mathbb{C}) \times Sp_{2q}(\mathbb{C})$ で、 $K \not\subset P_1, P_2$ なら、 $K_1 = Sp_{2p}, K_2 = Sp_{2q}$ としたとき 命題 1 より、 $K_1 \subset P_1, K_2 \subset P_2$ となっている。もし $K_1 \subset P_1' \subset P_1, K_2 \subset P_2' \subset P_2$ をみたす放物型部分群 P_1', P_2' に対し、 $P_1' \cap P_2' \not\subset K$ ならば、 $P_1 \cap P_2 \not\subset K$ なので、 P_1, P_2 として、 $K_1 \subset P_1, K_2 \subset P_2$ をみたすもののうち極小なものを取り、 $P_1 \cap P_2 \not\subset K$ であることを示せば十分。

ここで

$$K_2 = Sp_{2q} = \begin{pmatrix} P & q & P & q \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

なので、 $K_2 \subset P_2$ をみたす P_2 で極小なものは、

$$\tilde{P}_2 = \begin{pmatrix} P & q & P & q \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

と W_G -共役である。

ここで $w \in W_G$ と G の部分群 $G' \subset G$ に対し、 $w \cdot G' = wG'w^{-1}$ と表す。

この記法を用いて $P_2 = w_2 \cdot \tilde{P}_2$ ($w_2 \in W_G$) とすると、 $K_2 \subset P_2$ となるためには $w_2 \cdot K_2 = K_2$ でなければならない。このような w_2 は W_K の元であることがわかるので、 $w_2 \in W_K/W_{\tilde{P}_2} = (W_{K_1} \times W_{K_2})/W_{K_2}$ とし

てよい。

同様に、

$$K_1 = S_{P_{2P}} = \begin{pmatrix} P & Q & P & Q \\ \hline \text{shaded} & & \text{shaded} & \\ & \ddots & & \\ \text{shaded} & & \text{shaded} & \\ & \ddots & & \end{pmatrix}$$

なので、 $K_1 \subset P_1$ をみたす P_1 で極小なものは $P_1 = w_1 \cdot \dot{P}_1$

$$\dot{P}_1 = \begin{pmatrix} P & Q & P & Q \\ \hline \text{shaded} & & \text{shaded} & \\ & \text{shaded} & & \\ \text{shaded} & & \text{shaded} & \\ & \text{shaded} & & \end{pmatrix}$$

$w_1 \in W_K / W_{\dot{P}_1} = (W_{K_1} \times W_{K_2}) / W_{K_1}$ と表われる。

ここで、 $Q = P_1 \cap P_2 \subset K$ ならば Q を K のワイル群で動かしても K の放物型部分群なので、

$$\begin{aligned} (w_1, w_2) &\in \Delta W_K \setminus \{(W_K / W_{\dot{P}_1}) \times (W_K / W_{\dot{P}_2})\} \\ &\simeq \Delta(W_{K_1} \times W_{K_2}) \setminus [(W_{K_1} \times W_{K_2}) / W_{K_1}] \times [(W_{K_1} \times W_{K_2}) / W_{K_1}] \\ &\simeq (e, e) \end{aligned}$$

の場合を考えれば十分である。つまり $\dot{P}_1 \cap \dot{P}_2$ が K に含まれるかを考えればよい。

$$\dot{P}_1 \cap \dot{P}_2 = \begin{pmatrix} P & Q & P & Q \\ \hline \text{shaded} & & \text{shaded} & \\ & \text{shaded} & & \\ \text{shaded} & & \text{shaded} & \\ & \text{shaded} & & \end{pmatrix} \not\subset K = \begin{pmatrix} P & Q & P & Q \\ \hline \text{shaded} & & \text{shaded} & \\ & \text{shaded} & & \\ \text{shaded} & & \text{shaded} & \\ & \text{shaded} & & \end{pmatrix}$$

となり、よって $P_1 \cap P_2 \not\subset K$ である。証明終

この例のように K が単純でない場合にも以下の定理が成り立つ。

定理 4 対称対 (G, K) が非エルミート型のとき、どの放物型部分群 $Q \subset K$ に対しても、条件 1 を満たすような G の放物型部分群 P_1, P_2 は存在しない。

証明 もし $K \subset P_1$ または $K \subset P_2$ なら、定理 3 と同様に、 P_1, P_2 は条件 1 を満たさないことがわかるので、 $K \not\subset P_1, K \not\subset P_2$ の場合を考えればよい。このとき、命題 1 により、 K の非自明な半単純部分群 K_1, K_2 であって $K = K_1 \times K_2, K_1 \subset P_1, K_2 \subset P_2$ を満たすものが存在する。 $K_i, (i = 1, 2)$ のリー環を $\mathfrak{k}_i$ とする。 $\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{t})$ のある正系 $\Delta^+(\mathfrak{g}, \mathfrak{t})$ であって、 $\Delta(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{t})$ に含まれるようなものを取り、 $\Delta^+(\mathfrak{k}_i, \mathfrak{t}) = \Delta^+(\mathfrak{g}, \mathfrak{t}) \cap \Delta(\mathfrak{k}_i, \mathfrak{t})$ とする。 $\Delta(\mathfrak{k}_i, \mathfrak{t}), i = 1, 2$ の正ルート系はそれぞれ W_G, W_{K_1}, W_{K_2} 上の Bruhat orders を決める。 $w_{0,i}$ を $W_{K_i}, i = 1, 2$ のこの順序に関する最長元とする。また $w_{0,K}$ は $w_{0,1}$ と $w_{0,2}$ の積であるとする。条件 1 が成り立つなら $Q = P_1 \cap P_2$ は K の放物型部分群である。この場合、もし $\alpha \in \Delta(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{t}) \setminus \Delta(\mathfrak{k}_i, \mathfrak{t})$ ならば $-\alpha \notin \Delta(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{t}), \alpha \notin \Delta(\mathfrak{p}_2, \mathfrak{t}), -\alpha \in \Delta(\mathfrak{p}_2, \mathfrak{t})$ となる。ここで $\mathfrak{p}_1$ (resp. $\mathfrak{p}_2$) が放物型部分環なので、 $\alpha, -\alpha \in \Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{t})$ のうち少なくとも一つは $\mathfrak{p}_1$ (resp. $\mathfrak{p}_2$) のルートであることを用いた。後で示すように、

$$“-\alpha \in \Delta(\text{Ad}(w_{0,K})\mathfrak{p}_1, \mathfrak{t}) \text{ を満たすような } \alpha \in \Delta(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{t}) \setminus \Delta(\mathfrak{k}_i, \mathfrak{t}) \text{ が存在する}”. \quad (1)$$

これを認めて先に進む。まず、

$$\begin{aligned} \text{Ad}(w_{0,K})\mathfrak{p}_1 \cap \mathfrak{p}_2 &= \text{Ad}(w_{0,1}w_{0,2})\mathfrak{p}_1 \cap \mathfrak{p}_2 \\ &= \text{Ad}(w_{0,2})(\text{Ad}(w_{0,1})\mathfrak{p}_1 \cap \text{Ad}(w_{0,2}^{-1})\mathfrak{p}_2) \\ &= \text{Ad}(w_{0,2})(\mathfrak{p}_1 \cap \mathfrak{p}_2) \subset \mathfrak{k}. \end{aligned}$$

である。

ここで、 $\mathfrak{p}_1 \cap \mathfrak{p}_2 = \mathfrak{q} \subset \mathfrak{k}$ であり、 $w_{0,2} \in W_{K_2} \subset W_K$ であることを使った。しかし、 $-\alpha \in \Delta(\text{Ad}(w_{0,K})\mathfrak{p}_1 \cap \mathfrak{p}_2, \mathfrak{t})$ は $\mathfrak{k}$ のルートでは無い。これは矛盾である。従って、 $Q = P_1 \cap P_2$ は K の放物型部分群にはならない。

(1) の証明が残っている。いま考えている四つ組 $(\mathfrak{g}, \mathfrak{k}, \mathfrak{k}_1, \mathfrak{k}_2)$ は以下の条件を満たす。

1. $(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$ は非エルミート型対称対である。
2. $\text{rank } \mathfrak{g} = \text{rank } \mathfrak{k}$.
3. $\mathfrak{k}$ は単純ではなく、 $\mathfrak{k} = \mathfrak{k}_1 \oplus \mathfrak{k}_2$ は非自明な半単純部分環 $\mathfrak{k}_1, \mathfrak{k}_2$ への $\mathfrak{k}$ の直和分解となる。

対称対の分類によると (cf. [Bourbaki.1968] or [Knapp.2002])、このような四つ組は以下のリストのうちの一つである。

1. $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}_{2p+m}, \mathfrak{k} = \mathfrak{so}_{2p} \oplus \mathfrak{so}_m, \mathfrak{k}_1 = \mathfrak{so}_{2p}, \mathfrak{k}_2 = \mathfrak{so}_m, p \geq 2, m \geq 3$.
2. $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}_{4+m}, \mathfrak{k} = \mathfrak{so}_4 \oplus \mathfrak{so}_m = \mathfrak{sl}_2 \oplus \mathfrak{sl}_2 \oplus \mathfrak{so}_m, \mathfrak{k}_1 = \mathfrak{sl}_2, \mathfrak{k}_2 = \mathfrak{sl}_2 \oplus \mathfrak{so}_m, m = 1 \text{ or } m \geq 3$.
3. $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}_{4+4}, \mathfrak{k} = \mathfrak{so}_4 \oplus \mathfrak{so}_4 = \mathfrak{sl}_2 \oplus \mathfrak{sl}_2 \oplus \mathfrak{sl}_2 \oplus \mathfrak{sl}_2, \mathfrak{k}_1 = \mathfrak{sl}_2 \oplus \mathfrak{sl}_2, \mathfrak{k}_2 = \mathfrak{sl}_2 \oplus \mathfrak{sl}_2$.
4. $\mathfrak{g} = \mathfrak{sp}_{2p+2q}, \mathfrak{k} = \mathfrak{sp}_{2p} \oplus \mathfrak{sp}_{2q}, \mathfrak{k}_1 = \mathfrak{sp}_{2p}, \mathfrak{k}_2 = \mathfrak{sp}_{2q}, p, q \geq 1$.
5. $\mathfrak{g} = \mathfrak{e}_6, \mathfrak{k} = \mathfrak{sl}_6 \oplus \mathfrak{sl}_2, \mathfrak{k}_1 = \mathfrak{sl}_6, \mathfrak{k}_2 = \mathfrak{sl}_2$.
6. $\mathfrak{g} = \mathfrak{e}_7, \mathfrak{k} = \mathfrak{so}_{12} \oplus \mathfrak{sl}_2, \mathfrak{k}_1 = \mathfrak{so}_{12}, \mathfrak{k}_2 = \mathfrak{sl}_2$.
7. $\mathfrak{g} = \mathfrak{e}_8, \mathfrak{k} = \mathfrak{e}_7 \oplus \mathfrak{sl}_2, \mathfrak{k}_1 = \mathfrak{e}_7, \mathfrak{k}_2 = \mathfrak{sl}_2$.
8. $\mathfrak{g} = \mathfrak{f}_4, \mathfrak{k} = \mathfrak{sp}_6 \oplus \mathfrak{sl}_2, \mathfrak{k}_1 = \mathfrak{sp}_6, \mathfrak{k}_2 = \mathfrak{sl}_2$.
9. $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_2, \mathfrak{k} = \mathfrak{sl}_2 \oplus \mathfrak{sl}_2, \mathfrak{k}_1 = \mathfrak{sl}_2, \mathfrak{k}_2 = \mathfrak{sl}_2$.

まず 1 の場合について考える。 $\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{t})$ の正系は次のようになっているとしてよい。

$$\begin{aligned}\Delta^+(\mathfrak{g}, \mathfrak{t}) &= \{e_i \pm e_j \mid 1 \leq i < j \leq p+q\} \cup \{e_i \mid 1 \leq i \leq p+q\}, \\ \Delta^+(\mathfrak{k}_1, \mathfrak{t}) &= \{e_i \pm e_j \mid 1 \leq i < j \leq p\}, \\ \Delta^+(\mathfrak{k}_2, \mathfrak{t}) &= \{e_i \pm e_j \mid p+1 \leq i < j \leq p+q\} \cup \{e_i \mid p+1 \leq i \leq p+q\},\end{aligned}$$

但し、 $q = \lfloor m/2 \rfloor$ である。ここで $\mathfrak{t}$ 上の線形変換 ϵ_i を、 $\epsilon_i(e_j) = -e_i$ ($j = i$ のとき), $\epsilon_i(e_j) = e_i$ ($j \neq i$ のとき) で定義する。このとき、

$$w_{0,1} = \begin{cases} \epsilon_1 \cdots \epsilon_p & (p \text{ が偶数のとき}) \\ \epsilon_1 \cdots \epsilon_{p-1} & (p \text{ が奇数のとき}) \end{cases} \quad w_{0,2} = \begin{cases} \epsilon_{p+1} \cdots \epsilon_{p+q} & (m \text{ が奇数または } m \in 4\mathbb{Z} \text{ のとき}) \\ \epsilon_{p+1} \cdots \epsilon_{p+q-1} & (m \in 2\mathbb{Z} \setminus 4\mathbb{Z} \text{ のとき}). \end{cases}$$

である。すると明らかに $w_{0,K} = w_{0,1}w_{0,2}$ は $e_1 + e_{p+1} \in \Delta(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{t}) \setminus \Delta(\mathfrak{k}, \mathfrak{t})$ を $-(e_1 + e_{p+1})$ に写す。よって (1) が成り立つ。

他の場合、 $w_{0,K} = w_{0,1}w_{0,2}$ が W_G の最長元であることを以下に示す。もしそうだとすると、 $\mathfrak{p}_1$ は放物型部分環なので、

$$\Delta(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{t}) \cup \Delta(\text{Ad}(w_{0,K})\mathfrak{p}_1, \mathfrak{t}) = \Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{t}) \quad (2)$$

である。

既に述べたように $\alpha \in \Delta(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{t}) \setminus \Delta(\mathfrak{k}, \mathfrak{t})$ ならば $-\alpha \notin \Delta(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{t})$ であるので (2) から $-\alpha \in \Delta(\text{Ad}(w_{0,K})\mathfrak{p}_1, \mathfrak{t})$ が得られる。これで (1) が証明された。

以下、 $w_{0,K} = w_{0,1}w_{0,2}$ が W_G の最長元であることを確かめる。まず 2 の場合について考える。このとき正系を次のようにとてよい。

$$\begin{aligned}\Delta^+(\mathfrak{k}_1, \mathfrak{t}) &= \{e_1 - e_2\}, \\ \Delta^+(\mathfrak{k}_2, \mathfrak{t}) &= \{e_1 + e_2\} \cup \{e_i \pm e_j \mid 3 \leq i < j \leq q+2\} \cup \{e_i \mid 3 \leq i \leq q+2\},\end{aligned}$$

ここで 1 のときと同じように $q = \lfloor m/2 \rfloor$ とした。すると $w_{0,1}$ はルート $e_1 - e_2$ に関する鏡映であり、 r をルート $e_1 + e_2$ に関する鏡映、 $w'_{0,2}$ を W_{SO_m} の最長元とすると、 $w_{0,2} = rw'_{0,2}$ である。このとき $w_{0,K} = w_{0,1}w_{0,2} = \epsilon_1\epsilon_2w'_{0,2}$ は W_G の最長元である。

3.4.6.7.8.9. の場合のとき、 W_{K_i} ($i = 1, 2$) の最長元 $w_{0,i}$ は $-\text{id}$ であることが容易に確かめられる。よって、 $w_{0,K} = w_{0,1}w_{0,2} = -\text{id}$ は W_G の最長元である。

最後に 5 の場合について考える。 w_0 を W_G の最長元とする。 w_0 の $\mathfrak{k}_1 \cap \mathfrak{t}$ への制限は $W_{K_1} \simeq W_{SL_6}$ の最長元 $w_{0,1}$ である ([Plate V, Bourbaki1968])。さらに、 $\Delta(\mathfrak{k}_2, \mathfrak{t})$ は $\mathfrak{g}$ の最高ルートと最低ルートから成るので w_0 の $\mathfrak{k}_2 \cap \mathfrak{t}$ への制限は $-\text{id} = w_{0,2}$ である。よって $w_0 = w_{0,1}w_{0,2} = w_{0,K}$ である。証明終

参考文献

- [Bourbaki.1968] N. Bourbaki, Groupes et Algebres de Lie, ch. IV-VI, Actualites Sci. Indust. no. 1337, Hermann, Paris, 1968; Masson, Paris, 1981.
- [Knapp.2002] Anthony W. Knapp, *Lie groups beyond an introduction*, second ed, Progress in Mathematics, vol. 140, Birkhauser Boston Inc, Boston, MA, 2002.
- [Nishiyama-Ochiai.2010] K.Nishiyama and H.Ochiai, *Double flag varieties for a symmetric pair and finiteness of orbits*, J. Lie Theory 21 (2011), no. 1, 79-99.