# 基本相対不変式の次数による対称錐の特徴付け

九州大学大学院数理学府
山崎 貴史

## 1 序文

自己双対な等質開凸錐を対称錐という. [1] によって, 階数 $m$ の既約な対称錐に付随する基本相対不変式の次数は $1, 2, \cdots, m$ となることが分かっている. しかし一般の既約な等質開凸錐 $V$ に対しては, 付随する基本相対不変式の次数が $1, 2, \cdots, m$ であっても, $V$ は対称錐となるとは限らず, [4] において反例が挙げられている. この問題に対して, 等質開凸錐 $V$ とその双対錐 $V^*$ に付随する基本相対不変式の次数が共に $1, 2, \cdots, m$ ならば $V$ は対称錐となるという予想が立てられた. [7] において, この予想は弱い形で証明されている. 本稿では, 等質開凸錐から生成される $m$-skeleton という図形を用いて, この予想が正しいということを述べる. また, そこから発展して, $m$-skeleton によって一般の等質開凸錐に付随する基本相対不変式の次数を決定するための議論について触れる.

## 2 準備

**定義 2.1.** (1) $n$ 次元実空間 $\mathbb{R}^n$ の直線を含まない開凸錐 $V$ で, $V$ の自己同型群 $G(V)$ が $V$ に推移的に作用するものを等質開凸錐をいう.
(2) $V$, $\widetilde{V}$ をそれぞれ $n$ 次元, $\widetilde{n}$ 次元の等質開凸錐とする. $V$ と $\widetilde{V}$ が同型であるとは, $n = \widetilde{n}$ であって $V = T(\widetilde{V})$ となる線型同型写像 $T$ が存在することをいう.
(3) $n$ 次元の等質開凸錐 $V$ と内積 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ に対して,

$$V^* := \left\{ y \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; \langle x, y \rangle > 0, \quad \forall x \in \overline{V} \setminus \{ 0 \} \right\}$$

を $V$ の双対錐といい, ある内積によって $V$ が双対錐 $V^*$ に一致するとき, $V$ を対称錐という.

**定義 2.2.** (1) 有限次元の二重次数付き実代数 $\mathfrak{A} = \bigoplus_{1 \le i, j \le m} \mathfrak{A}_{ij}$ で

$$\mathfrak{A}_{ij}\mathfrak{A}_{jk} \subset \mathfrak{A}_{ik}, \quad \mathfrak{A}_{ij}\mathfrak{A}_{kl} = \{ 0 \} \quad (j \neq k)$$

を満たすものを階数 $m$ の行列代数という.

(2) 行列代数 $\mathfrak{A}$ 上の線型変換 $x \mapsto x^*$ で

a) $x^{**} = x$,

b) $(xy)^* = y^* x^*$,

c) 任意の $i$, $j$ に対して, $\mathfrak{A}_{ij}^* \subset \mathfrak{A}_{ji}$

を満たすものを involution という.

行列代数 $\mathfrak{A}$ において $\mathfrak{A}$ の"上三角部分代数"を $\mathfrak{T}$ とする：

$$\mathfrak{T} := \bigoplus_{1 \le i \le j \le m} \mathfrak{A}_{ij}.$$

また $\mathfrak{A}$ における交換子 $[xy]$ と結合子 $[xyz]$ を次で定義する：

$$[xy] := xy - yx, \qquad [xyz] := x(yz) - (xy)z.$$

以下では部分空間 $\mathfrak{A}_{ij}$ の次元を $n_{ij}$ で表す：

$$n_{ij} := \dim \mathfrak{A}_{ij}.$$

**定義 2.3.** involution $x \mapsto x^*$ を持つ階数 $m$ の行列代数 $\mathfrak{A}$ で次の条件 (T1)〜(T7) を満たすものを階数 $m$ の $T$-algebra という.

**(T1)** すべての $i$ について $\mathfrak{A}_{ii}$ は実数体 $\mathbb{R}$ に同型である.

この同型写像を $\rho_i$ として $e_i := \rho_i^{-1}(1)$ とし, $x = \sum_{1 \le i,j \le m} x_{ij}$ に対して,

$$\mathrm{Sp}\ x := \sum_{i=1}^{m} \rho_i(x_{ii})$$

と定義する.

**(T2)** 任意の $i$, $j$ に対して, $e_i x_{ij} = x_{ij} e_j = x_{ij}, \quad \forall x_{ij} \in \mathfrak{A}_{ij}$.

**(T3)** $\mathrm{Sp}\ [xy] = 0, \quad \forall x, y \in \mathfrak{A}$.

**(T4)** $\mathrm{Sp}\ [xyz] = 0, \quad \forall x, y, z \in \mathfrak{A}$.

**(T5)** $x \neq 0 \Rightarrow \mathrm{Sp}\ xx^* > 0$.

**(T6)** $x, y, z \in \mathfrak{T} \Rightarrow [xyz] = 0$.

**(T7)** $x, y \in \mathfrak{T} \Rightarrow [xyy^*] = 0$.

**注意 2.4.** [3], [5] では Sp の定義を

$$\mathrm{Sp}\ x := \sum_{i=1}^{m} n_i \rho_i(x_{ii}), \quad n_i := 1 + \frac{1}{2}\sum_{s\neq i} n_{is}$$

としているが, 計算を簡単にするため異なる定義をとった. 後述の定義 2.6 (N4) についても同様である.

**定義 2.5.** $\mathfrak{A} = \bigoplus_{1\le i,j\le m}\mathfrak{A}_{ij}$, $\widetilde{\mathfrak{A}} = \bigoplus_{1\le i,j\le m}\widetilde{\mathfrak{A}}_{ij}$ を 2 つの階数 $m$ の $T$-algebra とする. $\mathfrak{A}$ から $\widetilde{\mathfrak{A}}$ への写像 $T$ が同型であるとは, $T$ が代数として同型であり,

$$i < j \text{ かつ } \sigma(i) > \sigma(j) \Rightarrow \mathfrak{A}_{ij} = \{\,0\,\},$$

$$T(\mathfrak{A}_{ij}) \subset \widetilde{\mathfrak{A}}_{\sigma(i)\sigma(j)}$$

となるような置換 $\sigma$ が存在することをいう.

2 つの $T$-algebra $\mathfrak{A}$, $\widetilde{\mathfrak{A}}$ の間に同型写像が存在するとき, $\mathfrak{A}$ と $\widetilde{\mathfrak{A}}$ は同型であるという.

**定義 2.6.** $\langle\cdot,\cdot\rangle$ を内積とする有限次元の二重次数付き結合的実代数 $\mathfrak{N} = \bigoplus_{1\le i<j\le m}\mathfrak{N}_{ij}$ で次の条件 (N1)〜(N5) を満たすものを階数 $m$ の $N$-algebra という.

**(N1)** 任意の $i$, $j$, $k$ $(i<j<k)$ に対して, $\mathfrak{N}_{ij}\mathfrak{N}_{jk} \subset \mathfrak{N}_{ik}$,

**(N2)** $j \neq k \Rightarrow \mathfrak{N}_{ij}\mathfrak{N}_{kl} = \{\,0\,\}$,

**(N3)** $(i,j) \neq (k,l) \Rightarrow \langle \mathfrak{N}_{ij}, \mathfrak{N}_{kl}\rangle = 0$,

**(N4)** 任意の $x_{ij} \in \mathfrak{N}_{ij}$, $y_{jk} \in \mathfrak{N}_{jk}$ に対して,

$$\langle x_{ij}y_{jk}, x_{ij}y_{jk}\rangle = \langle x_{ij}, x_{ij}\rangle \langle y_{jk}, y_{jk}\rangle,$$

**(N5)** 任意の $x_{ik} \in \mathfrak{N}_{ik}$, $y_{jk} \in \mathfrak{N}_{jk}$ $(i<j)$ に対して,

$$\langle x_{ik}, \mathfrak{N}y_{jk}\rangle = 0 \Rightarrow \langle \mathfrak{N}x_{ik}, \mathfrak{N}y_{jk}\rangle = 0.$$

ただし階数 1 の $N$-algebra とは $\{\,0\,\}$ のこととする.

ここで (N4) は次の (N4′) または (N4″) と同値であることに注意しておこう.

**(N4′)** $\langle x_{ij}y_{jk}, x'_{ij}y_{jk}\rangle = \langle x_{ij}, x'_{ij}\rangle\langle y_{jk}, y_{jk}\rangle, \quad \forall x_{ij}, x'_{ij} \in \mathfrak{N}_{ij},\ y_{jk} \in \mathfrak{N}_{jk}.$

**(N4″)** $\langle x_{ij}y_{jk}, x'_{ij}y'_{jk}\rangle + \langle x_{ij}y'_{jk}, x'_{ij}y_{jk}\rangle = 2\langle x_{ij}, x'_{ij}\rangle\langle y_{jk}, y'_{jk}\rangle,$
$\forall x_{ij}, x'_{ij} \in \mathfrak{N}_{ij},\ y_{jk}, y'_{jk} \in \mathfrak{N}_{jk}.$

**定義 2.7.** $\mathfrak{N} = \bigoplus_{1 \le i < j \le m} \mathfrak{N}_{ij}$, $\widetilde{\mathfrak{N}} = \bigoplus_{1 \le i < j \le m} \widetilde{\mathfrak{N}}_{ij}$ を 2 つの階数 $m$ の $N$-algebra とする. $\mathfrak{N}$ から $\widetilde{\mathfrak{N}}$ への写像 $T$ が同型であるとは, $T$ が代数として同型な等長写像であり, 次の条件を満たす置換 $\sigma$ が存在することをいう.

$$i < j \text{ かつ } \sigma(i) > \sigma(j) \Rightarrow \mathfrak{N}_{ij} = \{\, 0 \,\},$$

$$T(\mathfrak{N}_{ij}) \subset \widetilde{\mathfrak{N}}_{\sigma(i)\sigma(j)}.$$

二つの $N$-algebra $\mathfrak{N}$, $\widetilde{\mathfrak{N}}$ の間に同型写像が存在するとき, $\mathfrak{N}$ と $\widetilde{\mathfrak{N}}$ は同型であるという.

以下, 階数 $m$ の $T$-algebra $\mathfrak{A} = \bigoplus_{1 \le i,j \le m} \mathfrak{A}_{ij}$ に対して,

$$\mathfrak{T}(\mathfrak{A}) := \{\, t \in \mathfrak{T} \mid \rho_i(t_{ii}) > 0 \,\}, \qquad \mathfrak{X}(\mathfrak{A}) := \{\, x \in \mathfrak{A} \mid x^* = x \,\}$$

とおく. $\mathfrak{T}(\mathfrak{A})$ は連結な Lie 群である.

**命題 2.8** ([5])**.** (1) $V(\mathfrak{A}) := \{\, tt^* \mid t \in \mathfrak{T}(\mathfrak{A}) \,\}$ は $\mathfrak{T}(\mathfrak{A})$ が推移的に作用する $\mathfrak{X}(\mathfrak{A})$ の等質開凸錐である.
(2) $\mathfrak{N} := \bigoplus_{1 \le i < j \le m} \mathfrak{A}_{ij}$ は階数 $m$ の $N$-algebra である.
(3) 等質開凸錐, $T$-algebra, $N$-algebra は (1), (2) により, 同型の差を除いて互いに 1 対 1 に対応する.

命題2.8 により対応する $T$-algebra, $N$-algebra の階数を等質開凸錐の階数という. 次に, $l = 1, 2, \cdots, m$ に対して

$$\mathfrak{A}^{(l)} := \bigoplus_{1 \le i,j \le l} \mathfrak{A}_{ij}$$

とおく. $\mathfrak{A}$ の元 $x$ と $l = 1, 2, \cdots, m$ に対して, $x^{(l)} \in \mathfrak{A}^{(l)}$ を

$$\begin{cases} x^{(m)} = x, \\ x^{(l-1)} = \sum_{1 \le i,j \le l-1} (\rho_l(x_{ll}^{(l)}) x_{ij}^{(l)} - x_{il}^{(l)} x_{lj}^{(l)}) \end{cases}$$

で定義する. さらに $x \in \mathfrak{X}(\mathfrak{A})$ と $l = 1, 2, \cdots, m$ に対して, $D_l(x) := \rho_l(x_{ll}^{(l)})$ とおく. これらの $D_l$ を用いて等質開凸錐 $V(\mathfrak{A})$ を次のように記述することができる.

**命題 2.9** ([5])**.** $V(\mathfrak{A}) = \{\, x \in \mathfrak{X}(\mathfrak{A}) \mid D_l(x) > 0, \quad \forall l = 1, 2, \cdots, m \,\}$.

**定義 2.10.** $V$ を $\mathbb{R}^n$ 上の階数 $m$ の等質開凸錐とし, $V$ に対応する $T$-algebra を $\mathfrak{A}$ とする. $\mathfrak{X}(\mathfrak{A}) \cong \mathbb{R}^n$ 上の多項式 $\Delta_1(x), \Delta_2(x), \cdots, \Delta_m(x)$ を次のように定める.

$$\begin{cases} \Delta_m(x) & := D_m(x), \\ \Delta_l(x) & : D_l(x) = \Delta_l(x)\Delta_{l+1}(x)^{\alpha_{l,l+1}} \cdots \Delta_m(x)^{\alpha_{lm}} \text{が成り立ち} \Delta_{l+1}(x), \cdots, \Delta_m(x) \\ & \quad \text{で割れない多項式 } (\alpha_{i,k} \text{は非負整数}). \end{cases}$$

この $\Delta_1(x), \Delta_2(x), \cdots, \Delta_m(x)$ は互いに割れない既約な多項式で, $V$ に付随する基本相対不変式と呼ばれる ([2]).

命題 2.9 と $\Delta_l(x)$ の構成法によって, 等質開凸錐 $V$ は次のように書ける :

$$V = \{ \, x \in \mathbb{R}^n \mid \Delta_l(x) > 0, \quad \forall l = 1, 2, \cdots, m \, \}.$$

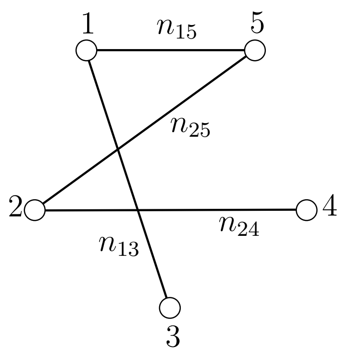
**定義 2.11.** $m$ 個の小円を正 $m$ 角形の頂点となるよう配置して左上隅から反時計回りに番号を振り, いくつかの小円を線分で結ぶ. ここで $i$ と $j$ が結ばれていることを $i \sim j$ で表し, $i < j < k$ について $i \sim j,\ j \sim k \Rightarrow i \sim k$ を満たすように線分が引かれているとする. 2 点 $i, j$ を結ぶ線分に正整数 $n_{ij}$ を付与し,

**(S1)** $i < j < k,\ i \sim j,\ j \sim k \Rightarrow \max(n_{ij}, n_{jk}) \leq n_{ik}$,

**(S2)** $i < j < k < l,\ i \sim j,\ j \sim l,\ i \sim k,\ k \sim l,\ i \sim l,\ j \nsim k \Rightarrow$
$$\max(n_{ij} + n_{ik}, n_{ij} + n_{kl}, n_{jl} + n_{ik}, n_{jl} + n_{kl}) \leq n_{il}$$

を満たすものを $m$-skeleton といい, $(S, (n_{ij}))$ または単に $S$ で表す.

**例 2.12.**




これは [3] において $S_5^2$ 型と分類される $m$-skeleton である.

**命題 2.13** ([3])**.** 階数 $m$ の $N$-algebra $\mathfrak{N}$ に対して, $m$ 個の小円を正 $m$ 角形の頂点となるよう配置して左上隅から反時計回りに番号を振り, $n_{ij} > 0$ であるような $i$ と $j$ を線分で結ぶ. この $n_{ij} > 0$ である 2 点 $i, j$ を結ぶ線分に $n_{ij}$ を付与した図形を $\mathfrak{N}$ の図形といい, $S(\mathfrak{N})$ で表す. このとき $S(\mathfrak{N})$ は $m$-skeleton であり, 同型な $N$-algebra の図形は同型な $m$-skeleton となる.

先の例 2.12 に挙げた $S_5^2$ には階数 5 の $N$-algebra $\mathfrak{N} = \mathfrak{N}_{13} + \mathfrak{N}_{15} + \mathfrak{N}_{24} + \mathfrak{N}_{25}$ が対応し, 付与された整数 $n_{ij}$ は成分 $\mathfrak{N}_{ij}$ の次元となっている.

**注意 2.14.** 一般に $N$-algebra から $m$-skeleton は一意に定まるが, 逆については, 同型な $m$-skeleton に対して同型でない複数の $N$-algebra が対応する場合や, 対応する $N$-algebra が存在しない場合がある.

$\mathfrak{A}$, $\mathfrak{N}$ をそれぞれ互いに対応する $T$-algebra, $N$-algebra とし, $S$ を $\mathfrak{N}$ の図形とする. $S$ の各頂点 $i$ に対して

$$E_{[i]} := \{ \, i \, \} \sqcup \{ \, j \mid i < j, i \sim j \text{ in } S \, \}, \qquad m_i := |E_{[i]}|,$$

$$\mathfrak{A}_{[i]} := \bigoplus_{j,k \in E_{[i]}} \mathfrak{A}_{jk}, \qquad \mathfrak{N}_{[i]} := \bigoplus_{j,k \in E_{[i]}, j<k} \mathfrak{N}_{jk}$$

とする. このとき, $\mathfrak{A}_{[i]}$, $\mathfrak{N}_{[i]}$ はそれぞれ階数 $m_i$ の $T$-algebra, $N$-algebra となる. また,

$$\begin{aligned} S_{[i]} &: \mathfrak{N}_{[i]}\text{の図形}, \\ x_{[i]} &:= \sum_{j,k \in E_{[i]}} x_{jk} \quad (x \in \mathfrak{A}), \\ \mathfrak{T}_{[i]}(\mathfrak{A}) &:= \left\{ t_{[i]} \;\middle|\; t \in \mathfrak{T}(\mathfrak{A}) \right\}, \\ V_{[i]} = V_{[i]}(\mathfrak{A}) &:= \left\{ uu^* \;\middle|\; u \in \mathfrak{T}_{[i]}(\mathfrak{A}) \right\} \end{aligned}$$

とすると, $V_{[i]}$ は $S_{[i]}$, $\mathfrak{A}_{[i]}$, $\mathfrak{N}_{[i]}$ に対応する等質開凸錐で, $\mathfrak{T}_{[i]}(\mathfrak{A})$ が推移的に作用している.

以下, $I_r$ を $r$ 次単位行列とし, $N$-algebra $\mathfrak{N} = \bigoplus_{1\le i<j\le m} \mathfrak{N}_{ij}$ に対して $\{e_{ij}^p\}_p$ を内積 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ に関する $\mathfrak{N}_{ij}$ の正規直交基底とする. 著者の修士論文 [8] によって, 等質開凸錐 $V$ に対応する $m$-skeleton がただ 1 つ極小頂点を持つとき, 次の定理によって $V$ は実行列の集合として実現できることが分かっている.

**定理 2.15** ([8])**.** *$T$-algebra $\mathfrak{A}$ は, 対応する $N$-algebra の図形がただ 1 つ極小頂点を持つものとする. $\mathfrak{A}$ に対応する等質開凸錐 $V(\mathfrak{A})$ は*

$$V(\mathfrak{A}) = \left\{ A(x) = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1m} \\ {}^t x_{12} & x_{22} I_{n_{12}} & & X(x_{ij}) \\ \vdots & & \ddots & \\ {}^t x_{1m} & {}^t X(x_{ij}) & & x_{mm} I_{n_{1m}} \end{pmatrix} \;\middle|\; \begin{array}{l} A(x) \gg 0 \\ (\text{正定値}) \end{array} \right\}$$

*で表される. ただし $x_{ij} = (x_{ij}^1, \cdots, x_{ij}^{n_{ij}})$ は $\mathfrak{N}_{ij}$ の元を $n_{ij}$ 次元の行ベクトルと見なしたもので, $X(x_{ij})$ は $(p,q)$-成分が*

$$X(x_{ij})_{pq} = \langle x_{ij}, e_{1i}^{p*} e_{1j}^q \rangle \ = \langle e_{1i}^p x_{ij}, e_{1j}^q \rangle$$

*である $n_{1i} \times n_{1j}$ 行列である.*

同論文では, 対応する $m$-skeleton が複数の極小頂点を持つ場合に, 等質開凸錐 $V$ を行列の組の集合として実現する手法も示された. つまり, 各極小頂点 $\omega$ から生成された等質開凸錐 $V_{[\omega]}$ を定理 2.15 によって実現して, それらを"綴じ合わせる"ことで, もとの等質開凸錐を実現することができる. また, 定理 2.15 の証明から, $A(x)$ の右下主小行列式は $D_1(x), D_2(x), \cdots, D_m(x)$ の整数乗の積で表せることが分かる. よって, 次の系が成り立つ.

**系 2.16.** *定理 2.15 における $A(x)$ の右下主小行列式の既約因子は, 基本相対不変式 $\Delta_1(x), \Delta_2(x), \cdots, \Delta_m(x)$ のいずれかである.*

# 3　$m$-skeleton と基本相対不変式

以下, 等質開凸錐 $V$ に対して, $V$ に付随する基本相対不変式を $\Delta_{V,i}(x)$ と書く. 同様に, $T$-algebra $\mathfrak{A}$ に対して, 定義 2.10 の手続きによって $\mathfrak{A}$ から生成した基本相対不変式を $\Delta_{\mathfrak{A},i}(x)$ と書く.

**命題 3.1.** 任意の $x \in \mathfrak{X}(\mathfrak{A})$ と $i = 1, 2, \cdots, m$ に対して

$$\Delta_{V,i}(x) = \Delta_{V_{[i]},1}(x_{[i]})$$

が成り立つ.

命題 3.1 によって, 基本相対不変式は, 対応する $m$-skeleton の各頂点から生成した等質開凸錐に付随するものについて考えればよいことが分かる.

等質開凸錐 $V$ に対応する 2 つの同型な $T$-algebra $\mathfrak{A}$, $\widetilde{\mathfrak{A}}$ を取り, 同型写像を $T : \mathfrak{A} \to \widetilde{\mathfrak{A}}$ とする. このとき, 一般に $\Delta_{\mathfrak{A},i}(x) = \Delta_{\widetilde{\mathfrak{A}},i}(Tx)$ となるとは限らないが, 次の関係が成り立つ.

**補題 3.2.** 2 つの $T$-algebra $\mathfrak{A}$, $\widetilde{\mathfrak{A}}$ が写像 $T : \mathfrak{A} \to \widetilde{\mathfrak{A}}$ によって同型であるとする. 置換 $\sigma$ によって $T(\mathfrak{A}_{ij}) = \widetilde{\mathfrak{A}}_{\sigma(i)\sigma(j)}$ となるとすると,

$$\Delta_{\mathfrak{A},i}(x) = \Delta_{\widetilde{\mathfrak{A}},\sigma(i)}(Tx)$$

が成り立つ.

$m$-skeleton $S$ とその頂点 $i$ に対して,

$$F_{[i]} := \left\{ j \in E_{[i]} \setminus \{ i \} \;\middle|\; k < j \Rightarrow k \nsim j, \quad \forall k \in E_{[i]} \setminus \{ i \} \right\}$$

とおく.

**補題 3.3.** $\Delta_i(x)$ は $x_{ii}$ についてちょうど 1 次であり, その 1 次の項は, $x_{ii}$ によらないある多項式 $f(x)$ を用いて

$$f(x) \left( \prod_{j \in F_{[i]}} \Delta_j(x) \right) x_{ii}$$

と表される.

**補題 3.4.** $i < j$ かつ $i \sim j$ となる $i, j$ に対して, $\Delta_i(x)$ は $x_{jj}$ について 1 次以上である. 特に, $E_{[i]} = \{ i, j_2, j_3, \cdots, j_{m_i} \}$ $(i < j_2 < j_3 < \cdots < j_{m_i})$ と表すと, $\Delta_i(x)$ は $x_{ii} x_{j_2 j_2}^{\beta_2} x_{j_3 j_3}^{\beta_3} \cdots x_{j_{m_i} j_{m_i}}^{\beta_{m_i}}$ $(\exists \beta_2, \beta_3, \cdots, \beta_{m_i} > 0)$ の項を持つ.

補題 3.4 から, $\Delta_i(x)$ の次数は $m_i$ 以上となることが分かる. さらに, $\Delta_i(x)$ の次数がちょうど $m_i$ となることは, 任意の $j \in E_{[i]}$ に対して $\Delta_i(x)$ が $x_{jj}$ についてちょうど 1 次となることと同値である.

# 4　対称錐の特徴付け

前節までの理論を用いて, 基本相対不変式の次数によって対称錐を特徴付けよう．[6] によって, 等質開凸錐 $V$ が対称錐であることと, 対応する $T$-algebra $\mathfrak{A}$ の $i \neq j$ である成分 $\mathfrak{A}_{ij}$ の次元が $i, j$ によらない正整数であることは同値だと分かっている．これは, 対応する $m$-skeleton が完全グラフ, つまり任意の $i, j$ $(i < j)$ に対して $i \sim j$ であり, すべての線分に同じ整数が付与されていることと同値である.

**補題 4.1.** 等質開凸錐 $V$ は, 対応する $m$-skeleton $S$ がただ 1 つ極小頂点を持つものとする．$V$ に付随する基本相対不変式の次数がそれぞれ $1, 2, \cdots, m$ であるとすると, $S$ は完全グラフとなる.

**証明.** $S$ は完全グラフでないとする．$S$ が極大頂点を複数持つとすると, 極大頂点 $\omega$ に対応する基本相対不変式 $\Delta_\omega(x)$ の次数は 1 なので, 補題の仮定に矛盾する.

$S$ が極大頂点をただ 1 つ持つとすると, $j \nsim k$ かつ $1 < j < k < m$ となる $j, k$ が存在する．このとき $j \in E_{[j']}$, $k \in E_{[k']}$, $j', k' \in F_{[i]}$ となる $i, j', k'$ $(j' \neq k')$ が存在し, $m \in E_{[j']} \cap E_{[k']}$ となるので, 補題 3.3 により $\Delta_i(x)$ は $x_{mm}$ について 2 次以上となる．また $i \in E_{[1]}$ なので, 同様に補題 3.3 により $\Delta_1(x)$ は $x_{mm}$ について 2 次以上となる．よって, 補題 3.4 により $\deg \Delta_1 > m$ となって補題の仮定に矛盾する．　□

**注意 4.2.** 対称錐に付随する基本相対不変式については, 任意の $i = 1, 2, \cdots, m$ に対して $\deg \Delta_i = m + 1 - i$ となるが ([1]), 補題 4.1 ではそこまで仮定しない．しかし補題 3.3 と補題 4.1 の結果により, 補題 4.1 の仮定のもとでは, 任意の $i = 1, 2, \cdots, m$ に対して $\deg \Delta_i = m + 1 - i$ となることが容易に分かる．これは次の補題 4.3, 命題 4.4 についても同様である.

**補題 4.3.** 等質開凸錐 $V$ は, 対応する $m$-skeleton $S$ がただ 1 つ極小頂点を持つものとする．$V$ に付随する基本相対不変式の次数がそれぞれ $1, 2, \cdots, m$ であるとすると, $i = 1, 2, \cdots, m$ に対して

$$\begin{aligned} D_i(x) &= \Delta_i(x)\Delta_{i+2}(x)\Delta_{i+3}(x)^2\Delta_{i+4}(x)^{2^2} \cdots \Delta_m(x)^{2^{m-i-2}} \\ &= \Delta_i(x)D_{i+2}(x)D_{i+3}(x)^2 D_{i+4}(x)^3 \cdots D_m(x)^{m-i-1} \end{aligned}$$

が成り立つ.

**証明.** 補題 3.4, 注意 4.2 によって, $\Delta_i(x)$ は $j \geq i$ である $x_{jj}$ についてちょうど 1 次であり, $x_{ii}x_{i+1,i+1} \cdots x_{mm}$ の項を持つことが分かる．よって, 定義 2.10 における関係式について, 各辺の $x_{jj}$ $(i < j)$ の次数を比較することでこの補題を証明できる．　□

**命題 4.4.** 階数 $m$ の等質開凸錐 $V$ と, $V$ に対応する $m$-skeleton $S$ に対して, 次の (1), (2) は同値である.

(1) $S$ はただ 1 つ極小頂点を持ち, $V$ に付随する基本相対不変式の次数がそれぞれ $1, 2, \cdots, m$ である.

(2) $S$ は完全グラフであり, $\exists \alpha = n_{12} = n_{13} = \cdots = n_{1m} > 0$ である.

**証明.** ((1) $\Rightarrow$ (2)) ある $j, k$ に対して $n_{1j} \neq n_{1k}$ であるとする. $D_i$ $(i = 1, 2, \cdots, m)$ をある部分集合に制限すると, $D_1(x)$ は $D_3(x)D_4(x)^2D_5(x)^3 \cdots D_m(x)^{m-2}$ で割り切れないことが分かる. よって, 補題 4.3 に矛盾し, (2) が成り立つ.
((2) $\Rightarrow$ (1)) 系 2.16 によって, $x_{ii}$ $(i = 1, 2, \cdots, m)$ についての次数を比較することで,

$$\det A(x) = \Delta_1(x)\Delta_2(x)^{\alpha-1}$$

となることが分かり, さらに $\deg \Delta_1 = m$, $\deg \Delta_2 = m - 1$ だと分かる. また, $S$ は完全グラフなので, 補題 3.3 によって, $m = \deg \Delta_1 > \deg \Delta_2 > \cdots > \deg \Delta_m = 1$ となり, 任意の $i = 1, 2, \cdots, m$ に対して $\deg \Delta_i = m + 1 - i$ となることが分かる. □

階数 $m$ の等質開凸錐 $V$ とその双対錐 $V^*$ について, 対応する $m$-skeleton をそれぞれ $S$, $S^*$ とすると, $S^*$ は $S$ の頂点に, $S$ と逆に番号を振った図形に同型となる. よって, $V$ と $V^*$ に付随する基本相対不変式の次数が共に $1, 2, \cdots, m$ であるとき, 対応する $m$-skeleton は共に極小頂点が 1 点となる. また, $i < j < k < l$ かつ $i \sim j \sim k \sim l$ となる $i, j, k, l$ に対して,

$$n_{ik} = n_{il} \Rightarrow n_{jk} = n_{jl}$$

が成り立つ. これらのことと命題 4.4 によって, 次のように対称錐を特徴付けることができる.

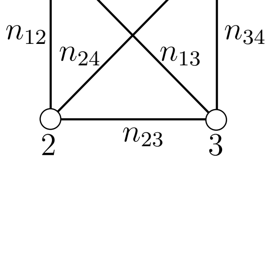
**定理 4.5.** 既約な等質開凸錐 $V$ が対称である必要十分条件は, $V$ と双対錐 $V^*$ に付随する基本相対不変式の次数が共に $1, 2, \cdots, m$ となることである.

# 5　一般の等質開凸錐の場合

前節では, $m$-skeleton に付与された整数に関する条件を用いて, 対称錐を基本相対不変式の次数によって特徴付けた. 一般の等質開凸錐についても, 対応する $m$-skeleton から基本相対不変式の次数を決定できることが予想される.

階数 4 以下のものについては, 実際に基本相対不変式を計算して予想が成り立つことが確かめられた.

**例 5.1.** [3] において $S_4^7$ 型と分類される $m$-skeleton の場合 :



$\deg\Delta := (\deg\Delta_1, \deg\Delta_2, \cdots, \deg\Delta_m)$ とすると,

$$\begin{cases} \deg\Delta = (4,3,2,1) & (n_{12} = n_{13} = n_{14}), \\ \deg\Delta = (5,3,2,1) & (n_{12} = n_{13} < n_{14},\ n_{23} = n_{24}), \\ \deg\Delta = (6,3,2,1) & (n_{12} < n_{13} = n_{14}), \\ \deg\Delta = (7,3,2,1) & (n_{12} < n_{13} < n_{14},\ n_{23} = n_{24}), \\ \deg\Delta = (6,4,2,1) & (n_{12} = n_{13} < n_{14},\ n_{23} < n_{24}), \\ \deg\Delta = (8,4,2,1) & (n_{12} < n_{13} < n_{14},\ n_{23} < n_{24}) \end{cases}$$

となる. $n_{13} = n_{14}$ のときは, 前節で述べたように $n_{23} = n_{24}$ となることに注意.

# 参考文献


[1] J. Faraut and A. Korányi, *Analysis on Symmetric Cones*, Clarendon Press, Oxford, 1994.

[2] H. Ishi, *Basic relative invariants associated to homogeneous cones and applications*, J. Lie Theory, **1** (2001), 155–171.

[3] S. Kaneyuki and T. Tsuji, *Classification of homogeneous bounded domains of lower dimension*, Nagoya Math. J., **53** (1974), 1–46.

[4] 野村隆昭, "等質開凸錐, クラン, そして基本相対不変式", 2010 年度表現論シンポジウム講演集, 96–104.

[5] E. B. Vinberg, *The theory of convex homogeneous cones*, Trans. Moscow Math. Soc., **12** (1963), 340–403.

[6] E. B. Vinberg, *The structure of the group of automorphisms of a homogeneous convex cone*, Trans. Moscow Math. Soc., **13** (1965), 63–93.

[7] 渡辺有介, "等質凸錐に付随する基本相対不変式", 京都大学修士論文, 2006.

[8] 山崎貴史, "等質開凸錐の行列による実現", 九州大学修士論文, 2011.

[9] 山崎貴史, "等質開凸錐の行列による実現", 京都大学数理解析研究所講究録, 掲載予定.