次数付き箙多様体と量子クラスター代数

木村嘉之 (Yoshiyuki Kimura)
京都大学 理学研究科 数学・数理解析専攻 数理解析系
Research Institute for Mathematical Science,
Kyoto University

Contents

1. 導入

1.1. 本稿で紹介するにおける筆者の結果は, パリ第 7 大学の Fan Qin 氏との共同研究に基づく (詳細は準備中で, 本稿では概略のみ記すことにする). 本研究の目的は, Hernandez-Leclerc[HL10] によるモノイダル圏論化やその幾何学的な構成である中島 [Nak11] の結果の非輪状 (acyclic) 型への拡張である. また, 証明の中で, 量子クラスター代数への精密化を行う. 証明は, 中島 [Nak11] の変種の構成の元に, Fourier-Sato-Deligne 変換により, (一般) 量子クラスター指標を得るといった手法による証明である.

1.2. クラスター代数は,**クラスター変数 (cluster variable)**と呼ばれる変異によって再帰的に定義される **(一般には無限個の) 生成元**によって生成される代数で, 各**クラスター(cluster)**は再帰的に定義するときに各段階で得られるクラスター変数のなす部分集合で, ひとつのクラスターに含まれるクラスター変数の単項式の全体は**クラスター単項式 (cluster monomial)**と呼ばれる. クラスター代数は, Fomin-Zelevinsky による動機を離れて, 高次 Teichmuller 理論やその組合せ論, (非可換)Donaldson-Thomas 理論, 可積分系との関連で多くの成功を収め, 活発な研究分野となっており, それ自身研究対象として興味深い.

1.3. **クラスター代数とその基本問題.** クラスター代数の定義を簡単に与える. ここでは, 歪対称型かつ幾何型の係数の場合のみを扱う. 詳しくは, [FZ07] を参照されたい.

整数 $x \in \mathbb{Z}$ に対して,$[x]_+ := \max(x, 0)$ とし,

$$\operatorname{sgn}(x) := \begin{cases} 1 & x > 0; \\ 0 & x = 0; \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$

と約束する.

Date: 2011 年 11 月 8 日, みなべにて.
Key words and phrases. quantum enveloping algebra, quantum coordinate ring, quantum cluster algebra.
This work is supported by Kyoto University Global COE Program ‘Fostering top leaders in mathematics’.

J を有限集合とし, 変数 $\{u_j\}_{j\in J}$ に関する**トロピカル半体 (tropical semifield)**とは, $\{u_j\}_{j\in J}$ により自由に (乗法的に) 生成されたアーベル群であって, 加法 $\oplus$ を

$$\prod_{j\in J} u_j^{a_j} \oplus \prod_{j\in J} u_j^{b_j} = \prod_{j\in J} u_j^{\min(a_j,b_j)}$$

で定義する.

$1 \leq r \leq n$ を整数とし,$\mathbb{P}$ を変数 $x_{r+1},\cdots,x_n$ に関するトロピカル半体とし, $\mathbb{QP}$ を $\mathbb{P}$ の有理数上の群環とする. 定義から,$\mathbb{QP}$ は $x_{r+1},\cdots,x_n$ に関する有理数係数の Laurent 多項式環である. $\mathcal{F}$ を $\mathbb{QP}$ 係数の r 変数多項式環の分数体とする.

定義 1.1. (1) **ラベル付き種 (labeled seed)**とは, 以下の条件を満たす組 $(\widetilde{B},\mathbf{x})$ の事を言う.

- $\widetilde{B}$: $n\times r$ 行列で, 最初の $r\times r$ 部分行列は歪対称
- $\mathbf{x}=\{x_1,\cdots,x_r\}$ は, $\mathcal{F}$ の自由生成元

$\widetilde{B}$ を種の**交換行列 (exchange matrix)**といい, (単に $\mathcal{F}$ の部分集合としてラベル付けを忘れた)$\mathbf{x}$ をラベル付き種の**クラスター(cluster)**という.

(2) 種 $(\widetilde{B},\mathbf{x})$ と $1\leq k\leq r$ に対して, k 方向の**ラベル付き種の変異 (seed mutation)** $\mu_k(\widetilde{B},\mathbf{x}) = (\widetilde{B}',\mathbf{x}')$ を以下で定める.

- $\widetilde{B}' = (b'_{ij})$ を以下で定める.

$$b'_{ij} = \begin{cases} -b_{ij} & i=k \text{ もしくは } j=k \text{ の場合;} \\ b_{ij} + \mathrm{sgn}(b_{ik})[b_{ik}b_{kj}]_+ & \text{それ以外.} \end{cases}$$

- x_k^* を以下の**交換関係式 (exchange relation)**で定め, $\mathbf{x}' = \mathbf{x}\setminus\{x_k\}\cup\{x_k^*\}$ とする.

$$x_k^* x_k = \prod_{i=1}^n x_i^{[b_{ik}]_+} + \prod_{i=1}^n x_i^{[-b_{ik}]_+}.$$

$\mu_k(\widetilde{B},\mathbf{x})$ がラベル付き種を定め, μ_k が対合であること, すなわち $\mu_k^2(\widetilde{B},\mathbf{x}) = (\widetilde{B},\mathbf{x})$ であることが簡単に確かめられる.

$\mathbb{T}_r$ を r-正則な樹木とする. このとき, 各頂点から出ている各辺は, 相異なるように $1,\ldots,r$ によって色付けされているとする.

定義 1.2. クラスターパターン (cluster pattern)とは, 各頂点 $t\in\mathbb{T}_r$ に対するラベル付き種 $(\widetilde{B}_t,\mathbf{x}_t)$ の対応であって, 任意の k で色づけられている t と t' を結ぶ辺に対して, $(\widetilde{B}_{t'},\mathbf{x}_{t'}) = \mu_k(\widetilde{B}_t,\mathbf{x}_t)$ が成り立っているものをいう. 定義から, r-正則な樹木の起点 t_0 での種によって一意的に決まっている. t_0 での種 $(\widetilde{B}_{t_0},\mathbf{x}_{t_0})$ を**初期種 (initial seed)**という.

初期種の選び方は任意であるから, $(\widetilde{B},x)$ を初期種とするクラスターパターンを $t\mapsto(\widetilde{B}_t,\mathbf{x}_t)$ で表す. $(\widetilde{B},\mathbf{x})$ から得られるクラスターとは, 種 $(\widetilde{B}_t,\mathbf{x}_t)$ のクラスター$\mathbf{x}_t$ のことを言う.

定義 1.3. (1) $\mathcal{X}(\widetilde{B},\mathbf{x}) := \bigcup_{t\in\mathbb{T}_t}\mathbf{x}_t$ をクラスター変数のなす集合といい, 各元を**クラスター変数 (cluster variable)**という.

(2) クラスター変数のなす集合 $\mathcal{X}(\widetilde{B},\mathbf{x})$ によって, 生成される $\mathcal{F}$ の $\mathbb{ZP}$ 部分代数 $\mathcal{A}(\widetilde{B},\mathbf{x})$ を (係数付き)**クラスター代数 (cluster algebra)**といい, $\mathbb{ZP}$ を**係数環 (coefficient ring)**という.

(3) クラスター単項式とは, ある $t\in\mathbb{T}$ におけるクラスター$\mathbf{x}_t$ に含まれるクラスター変数の単項式

$$x_{\mathbf{a};t} := \prod_{1\leq i\leq n} x_{i;t}^{a_i} \in \mathcal{F}, \mathbf{a}=(a_i)_{1\leq i\leq n}\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$$

のことを言う. クラスター単項式全体のなす集合を $\mathcal{M}(\widetilde{B},\mathbf{x})$ で表す.

$r=n$ のときを**係数なしクラスター代数 (cluster algebra without coefficient)**といい, $\mathbb{ZP}=\mathbb{Z}$ である.

1.3.1.　交換行列 $\widetilde{B}$ の変異は, **氷箙 (ice quiver)** の変異を用いても定式化することができる．まず, 箙 $\mathcal{Q} = (\mathcal{Q}_0, \mathcal{Q}_1)$ に対して,out, in: $\mathcal{Q}_1 \to \mathcal{Q}_0$ を始点, 終点を対応させる写像とし, 歪対称行列 $B_{\mathcal{Q}} = (b_{ij})_{i,j \in \mathcal{Q}_0}$ を

$$b_{ij} := \#\{h \in \mathcal{Q}_1; \mathrm{out}(h) = i, \mathrm{in}(h) = j\} - \#\{h \in \mathcal{Q}_1; \mathrm{out}(h) = j, \mathrm{in}(h) = i\}$$

で定める．逆に, 歪対称行列に付随する箙としては,

(1) ループ (edge loop) を含まない．
(2) 長さ 2 のサイクル (2-cycle) を含まない．

のみを考えることで,1:1 対応が得られる．行列の変異は, 上の条件をみたすような箙の変異を用いても以下のように, 定義することが出来る．

(1) 辺の組 $\alpha\colon i \to k$, $\beta\colon k \to j$ に対して, 新たな辺 $[\beta\alpha]\colon i \to j$ を追加する．
(2) k を始点ないし終点とする辺の向きをひっくり返す．
(3) 2-cycle を全て取り除く．

箙 $\mathcal{Q}$ と頂点集合の分割 $\mathcal{Q}_0 = \mathbf{pr} \sqcup \mathbf{fr}$ の組を **氷箙 (ice quiver)** といい, 氷箙に対して同様の構成をすることで, $\widetilde{B} = (b_{ij})_{i \in \mathcal{Q}_0, j \in \mathbf{pr}}$ を

$$b_{ij} := \#\{h \in \mathcal{Q}_1; \mathrm{out}(h) = i, \mathrm{in}(h) = j\} - \#\{h \in \mathcal{Q}_1; \mathrm{out}(h) = j, \mathrm{in}(h) = i\}$$

で定めることで, $r \times n$ 行列で, $\mathbf{pr} \times \mathbf{pr}$ で添字付けられた主要部 $r \times r$ 行列が歪対称行列であるようなものが得られる．$\mathbf{fr}$ の間の辺は, 変異においても用いられないが, 変異によって変化するので, 各変異ごとに取り除くことと約束する．以下では,(氷) 箙に付随する (係数付き) クラスター代数を $\mathcal{A}(\mathcal{Q})$ で表し, クラスター変数の集合を $\mathcal{X}(\mathcal{Q})$, クラスター単項式の集合を $\mathcal{M}(\mathcal{Q})$ で表す．

1.4. **クラスター代数の基本問題．** まず, クラスター代数の基本的な結果は以下である．

定理 1.4 (Laurent 現象)**.** $(\widetilde{B}, \mathbf{x})$ に付随するクラスター代数 $\mathcal{A}(\widetilde{B}, \mathbf{x})$ は,$\mathbf{x}$ に関する $\mathbb{ZP}$ 係数の Laurent 多項式に含まれる．すなわち,

$$\mathcal{A}(\widetilde{B}, \mathbf{x}) \subset \mathbb{ZP}[\mathbf{x}^{\pm 1}].$$

なお, クラスター代数は, 初期種のとり方にはよらないので, 実際には,

$$\mathcal{A}(\widetilde{B}, \mathbf{x}) \subset \bigcap_{t \in \mathbb{T}} \mathbb{ZP}[\mathbf{x}_t^{\pm 1}].$$

が成り立っている．また, 係数部分は, 逆元を追加する操作がないので, 係数環を $\mathbb{Z}[x_{r+1}, \ldots, x_n]$ に取り替えれば, クラスター代数の定義をクラスター変数によって生成される $\mathbb{Z}[x_{r+1}, \ldots, x_n]$ 代数とすれば, 以下が成り立つ．係数環は, $\mathbb{Z}[x_{r+1}, \ldots, x_n]$ を含む $\mathbb{Z}[x_{r+1}^{\pm 1}, \ldots, x_n^{\pm}]$ の部分環であれば, 十分である．本稿では, $\mathbb{Z}[x_{r+1}, \ldots, x_n]$ を係数環として採用する．

1.4.1.　クラスター代数の動機づけなどから鑑みると, クラスター代数の基本的な問題は, まとめると以下の形で述べられる．

予想 1.5. (1) クラスター変数の正値性:

$$\mathcal{X}(\mathcal{Q}) \subset \bigcap_{t \in \mathbb{T}} \mathbb{Z}_{\geq 0}[\mathbf{x}_t^{\pm}].$$

(2) クラスター単項式の集合 $\mathcal{M}(\mathcal{Q})$ を含む $\mathcal{A}(\mathcal{Q})$ の基底 $\mathcal{B}(\mathcal{Q})$ であって, 構造定数がすべて非負であるようなものが存在する.

(1) は (2) とクラスター展開の存在から、直ちに従う. $\mathcal{M}(\mathcal{Q})$ の (1) の正値性は, クラスター単項式の定義から (1) から直ちに従うが, 本質的な意味が分からない (と個人的には思われる). (2) を追求することが, クラスター代数の表現論的な意味付けの理解として重要だと思われる.

1.5. **モノイダル圏論化.**

定義 1.6. $\mathcal{A}$ をモノイダルアーベル圏とする. 単純対象 L が**実 (real)** (**強く実 (strongly real)**)であるとは, $L \otimes L$ が単純対象である (resp. 任意の $m \geq 2$ に対して, $L^{\otimes m}$ が単純対象である) ことをいう.

定義 1.7 (モノイダル圏論化 [HL10, Definition 2.1])**.** $\mathcal{A}$ を (係数付き) クラスター代数とし, $\mathscr{A}$ をモノイダルアーベル圏とする. $\mathscr{A}$ が $\mathcal{A}$ の**モノイダル圏論化 (monoidal categorification)**であるとは, 以下の条件を満たすことをいう.
(0) 表現環 (Grothendieck 環)$K_0(\mathscr{A})$ が $\mathcal{A}$ と環として同型である.
(1) $K_0(\mathscr{A})$ の単純対象の同型類のなす基底 (“標準基底”)$\mathcal{B}$ が, クラスター単項式の集合を含む.

上は, Hernandez-Leclerc における定義において, 最も基本的かつ重要な部分だけを取り出して書いた. 上の定義の (1) において, クラスター単項式に対応する単純対象 L は, クラスター単項式の定義から, $L \otimes L$ は単純であるのみならず, 任意の $m \geq 2$ に対して, $L^{\otimes m}$ は単純である. ゆえに実ならば強くであることがわかる. モノイダル圏論化の構成は, 一般には非常に困難であるが, 双対標準基底の圏論化の視点と双対標準基底からのクラスター代数の動機づけからは, スローガンとして非常に自然である. 特に (1) の条件が, 非常に重要である.
モノイダル圏論化の枠組みで, 以下のことは簡単に得られる. クラスター代数に関して,

- クラスター単項式の一次独立性
- 任意のクラスター変数 (単項式) の任意のクラスター展開での正値性 (正値性予想)

が得られる.

1.5.1. クラスターは, モノイダル圏論化の視点からの意味付けは, 以下で特徴づけられるべきである.[1]

定義 1.8. 単純対象 L が**素 (prime)**であるとは, 非自明な分解 $L \simeq L_1 \otimes L_2$ が存在しないことを言う.

定義 1.9. 素 (かつ実) な単純対象 (の同型類)$L_1, L_2, \ldots, L_n$ が **“クラスター”** [2]をなすとは, 以下の条件を満たすことをいう.
(1) 任意の 0 以上の整数の組 $m_1, \cdots, m_n$ に対して, $L_1^{\otimes m_1} \otimes \ldots \otimes L_n^{\otimes m_n}$ が単純対象をなす.
(2) 単純対象 L であって, 任意の $1 \leq i \leq n$ に対して $L \otimes L_i$ が単純対象であるようなものに対して, ある 0 以上の整数の組 $m_1, \cdots, m_n$ が存在して, 同型 $L \simeq L_1^{\otimes m_1} \otimes \ldots \otimes L_n^{\otimes m_n}$ が存在する.

上の定義に関連して, モノイダル圏論化に現れるモノイダル圏においては, “クラスター” をなすための, 必要条件として以下の予想が期待される. 量子アファイン代数の有限次元表現の圏に関しては, Drinfeld 多項式に関する条件でさだめられたテンソル部分圏 $\mathscr{C}_1$ において成り立っていることが,Hernandez-Leclerc [HL10, Theorem 8.1] によって示され, 一般の $\mathfrak{g}$ と任意の有限個の有限次元既約表現たちに対して,Hernandez [Her10, Theorem 1.1] によって示された.
以下の性質が, 双対標準基底ないしそれの圏論化である Khovanov-Lauda-Rouquier algebra の (次数付き) 有限次元表現の圏において, 期待される. 最近, $\mathfrak{g}$ が有限型 ADE であるときに [HL11] において解決された.

[1]これは, クラスター代数のもう一つの圏論化である加法圏論化の視点からの類似である.
[2]あくまで, 動機付けなので,“” をつけた.

予想 1.10 (simple tensor product conjecture)**.** $L_1, \ldots, L_n \in \mathscr{A}$ を simple object とする. 任意の $1 \leq i < j \leq n$ に対して, $L_i \otimes L_j$ が simple ならば, $L_1 \otimes \ldots \otimes L_n$ は simple である.

上の予想の 1 つの帰結として, 実ならば強くであることが従う. また,"クラスター" は, 有限個の素な単純対象たちであって, $L_i \otimes L_j$ が全て simple であるようなもの集合であって, 極大な部分集合であることが従う.

2. 次数付き箙多様体

本節では, 次数付き箙多様体 (graded quiver variety) の導入と, その性質を簡単に紹介する. [Nak11](や Leclerc によるサーベイ [Lec11]) で扱われている次数付き箙多様体とは, 次数付けが (一般には) 異なることを注意しておきたい.

2.1.

2.1.1. (I, E) を loop を含まない diagram とし, (I, H) を double oriented graph とする. $\mathrm{out}\colon H \to I$ と $\mathrm{in}\colon H \to I$ をそれぞれ始点と終点を対応させる写像とする. $\bar{\ }\colon H \to H$ を向きを入れ替える対合とする.

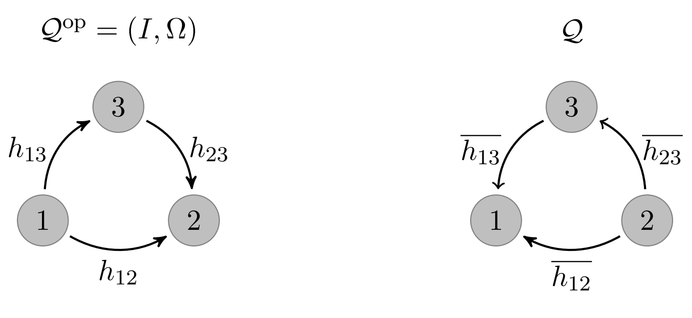
$\Omega \subset H$ を orientation とする, すなわち, $\Omega \subset H$ を $\Omega \cap \overline{\Omega} = \emptyset, \Omega \cup \overline{\Omega} = H$ をみたす部分集合とする. quiver (I, Ω) における $i, j \in I$ に対して, $\mathrm{out}(h) = i$, $\mathrm{in}(h) = j$ なる経路 (path) $r = (h_1, \ldots, h_k)$ とは, edge の列 $(h_1, \ldots, h_k)$ で

$$i = i_0 \xrightarrow{h_1} i_1 \xrightarrow{h_2} \ldots \xrightarrow{h_k} i_k = j$$

なるものを言う. path r に対して, $B_r := B_{h_k} B_{h_{k-1}} \cdots B_{h_1}$ と定める. 向き付けれたサイクル (oriented cycle) とは, 経路 $r = (h_1, \ldots, h_k)$ であって, $\mathrm{out}(r) = \mathrm{in}(r)$ を満たすものをいい, k をサイクルの周期という. quiver が acyclic であるとは, 任意の周期の向き付けれたサイクルを含まないことを言う.

2.1.2. $\mathcal{Q} = (I, \Omega)$ を acyclic quiver とし, $\mathcal{Q}^{\mathrm{op}} = (I, \overline{\Omega})$ をその opposite quiver とする. 以下では $\mathcal{Q}^{\mathrm{op}}$ に含まれる辺を h で表し, 向きを入れ替えたものを $\overline{h}$ で表す.

例 2.1 (bipartite quiver に変異同値ではない acyclic quiver)**.** $\mathcal{Q}$ と $\mathcal{Q}^{\mathrm{op}}$



2.1.3. 以下では, $k = \mathbb{C}$ or $k = \overline{\mathbb{F}_q}$ 上で, $\mathcal{Q}^{\mathrm{op}}$ の表現の圏と, 右 $k\mathcal{Q}$ 加群の圏を (標準的に) 同一視する. S_i で i に付随する simple module とし, Δ_i を S_i の**射影被覆 (projective cover)**, ∇_i を S_i の**入射包絡 (injective envelope)**とする. すなわち Δ_i (∇_i) は, 射影 (resp. 入射) 直既約加群であって, $\mathrm{top}\,\Delta_i = S_i$ (resp. $\mathrm{soc}\,\nabla_i = S_i$) を満たすものである. $\{e_i\}_{i \in I}$ を (原始直交) 冪等元たちとするとき, $\Delta_i = e_i A, \nabla_i = D(Ae_i)$ である. ここで, $D := \mathrm{Hom}_k(\ ,k)$ は k-ベクトル空間に関する双対である. I-次数付きベクトル空間 $W = \bigoplus_{i \in I} W_i$ に対して, $\Delta^W := \bigoplus_{i \in I} W_i \otimes \Delta_i$, $\nabla^W := \bigoplus_{i \in I} W_i \otimes \nabla_i$ と定める.

2.1.4. *ADHM* 方程式. $\widehat{I} := I \times \mathbb{Z}$ と定め, $\widehat{I}$-graded vector space $V = \bigoplus_{(i,a)} V_i(a)$ に対して, その $(i,a) \in \widehat{I}$ 成分を $V_i(a)$, $v_i(a) := \dim V_i(a)$ と書くことにする. また, 有限個の (i,a) を除いて $v_i(a) = 0$ と仮定する. 整数 $n \in \mathbb{Z}$ に対して,

$$\begin{aligned}
\mathrm{L}^\bullet(V, V')^{[n]} &:= \bigoplus_{i \in I, a \in \mathbb{Z}} \mathrm{Hom}_k(V_i(a), V'_i(a+n)), \\
G_V &:= \prod_{(i,a) \in \widehat{I}} GL(V_i(a)), \\
\mathrm{E}^\bullet_\Omega(V, W)^{[n]} &:= \bigoplus_{h \in \Omega, a \in \mathbb{Z}} \mathrm{Hom}_k(V_{\mathrm{out}(h)}(a), V'_{\mathrm{in}(h)}(a+n)), \\
\mathrm{E}^\bullet_{\overline{\Omega}}(V, W)^{[n]} &:= \bigoplus_{h \in \overline{\Omega}, a \in \mathbb{Z}} \mathrm{Hom}_k(V_{\mathrm{out}(h)}(a), V'_{\mathrm{in}(h)}(a+n)).
\end{aligned}$$

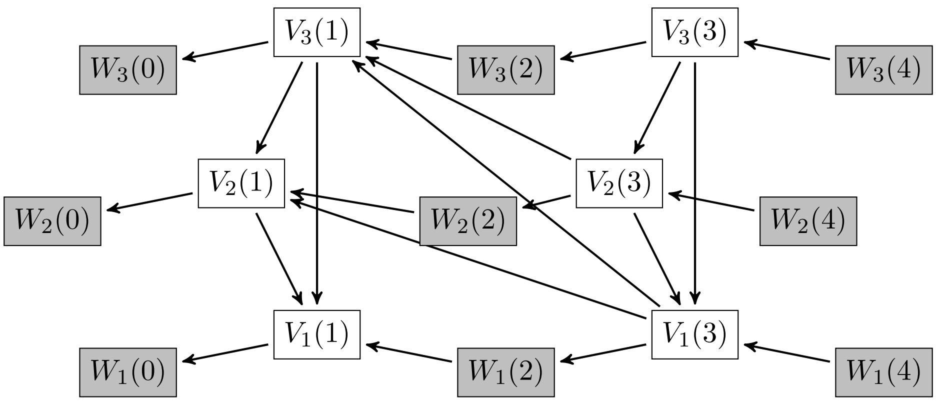
と約束する.

2.1.5. $\widehat{I}_0 := I \times 2\mathbb{Z}$, $\widehat{I}_1 := I \times (2\mathbb{Z}+1)$ と定める. $\widehat{I}_0$-graded vector space $W = \bigoplus_{(i,a) \in \widehat{I}_0} W_i(a)$ と $\widehat{I}_1$-graded vector space $V = \bigoplus_{(i,a) \in \widehat{I}_1} V_i(a)$ に対して,

$$\mathbf{M}^\bullet(V, W) := \mathrm{E}_\Omega(V, V)^{[0]} \oplus \mathrm{E}_{\overline{\Omega}}(V, V)^{[-2]} \oplus \mathrm{L}(W, V)^{[-1]} \oplus \mathrm{L}(V, W)^{[-1]}$$

各成分を $((B_{h,a})_{h \in \Omega}, (B_{\overline{h},a})_{\overline{h} \in \overline{\Omega}}, (\alpha_{i,a})_{(i,a) \in \widehat{I}_0}, (\beta_{i,a})_{(i,a) \in \widehat{I}_1})$ で表す. (単に, (B, α, β) とも書く.)

例 2.2. W が $I \times [0, 4]$ に台をもつ場合の $\mathbf{M}^\bullet(V, W)$



"運動量写像" $\mu\colon \mathbf{M}^\bullet(V, W) \to \mathrm{L}^\bullet(V, V)^{[-2]}$ を

$$\mu_{(i,a)}(B, \alpha, \beta) := \alpha_i(a-1)\beta_i(a) + \sum_{h \in \Omega; \mathrm{in}(h) = i} B_h(a-2) B_{\overline{h}}(a) - \sum_{h \in \Omega; \mathrm{out}(h) = i} B_{\overline{h}}(a) B_h(a)$$

で定める.

2.1.6. [Nak11] や [Lec11] で扱われている通常の graded quiver variety は, biparite quiver (I, Ω) に対して, $I = I_0 \sqcup I_1$ という分割を用いて,

$$\xi_i = \begin{cases} 0 & \text{if } i \in I_0 \\ 1 & \text{if } i \in I_1 \end{cases}$$

$\widehat{I}_0 := I_0 \times 2\mathbb{Z} \sqcup I_1 \times 2\mathbb{Z}+1$, $\widehat{I}_1 := I_0 \times (2\mathbb{Z}+1) \sqcup I_1 \times 2\mathbb{Z}$ と bipartite orientation に応じて, "ずらした" 格好になっている. $\mathbf{M}^\bullet(V, W)$ は $\hat{I}_1$-graded vector space V, $\hat{I}_0$-graded vector space W に対して, $\mathbf{M}^\bullet(V, W) = \mathrm{E}_\Omega(V, V)^{[-1]} \oplus \mathrm{E}_{\overline{\Omega}}(V, V)^{[-1]} \oplus \mathrm{L}(W, V)^{[-1]} \oplus \mathrm{L}(V, W)^{[-1]}$ として定義される. 次数付けは, 向きに依存しない形になっているが, bipartite quiver に対してしか定義されない.

2.1.7. *Graded quiver variety.* $(B,\alpha,\beta)\in\mu^{-1}(0)$ が**安定 (stable)**であるとは, B-invariant かつ $\operatorname{Ker}\beta$ に含まれる $V'\subset V$ なる $\widehat{I}_1$-graded subspace が 0 に限ることをいう. $\mu^{-1}(0)^s$ で stable な表現全体のなす部分集合を表す.

$\widehat{I}_1$-graded vector space V に対して,

$$G_V := \prod_{(i,a)} GL(V_i(a))$$

とおく. G_V は V の基底変換で, 以下のように $\mathbf{M}^\bullet(V,W)$ に作用する.

$$g\cdot(B,\alpha,\beta) := ((g_{\mathrm{in}(h)}(a)B_h g_{\mathrm{out}(h)}(a)^{-1}),(g_{\mathrm{in}(\overline{h})}(a-2)B_{\overline{h}}g_{\mathrm{out}(\overline{h})}(a)^{-1}),(g_i(a)\alpha_i(a)),(\beta_i g_i(a)^{-1}))$$

μ は G_V-equivariant で, また安定性条件は, G_V-不変であることは明らかであるので, $\mu^{-1}(0)^s$ に G_V が作用している.

$$\mathcal{M}^\bullet(V,W) := \mu^{-1}(0)^s/G_V,$$
$$\mathcal{M}_0^\bullet(V,W) := \mu^{-1}(0)/\!/G_V$$

と定める.

ここで, $\mathcal{M}_0^\bullet(V,W)$ は, アフィン商で, $\operatorname{Spec}(k[\mu^{-1}(0)]^{G_V})$ で, $\mu^{-1}(0)$ の閉軌道 (= 半単純表現) の集合である. $\mathcal{M}^\bullet(V,W)$ は, 安定性条件から, $\mu^{-1}(0)$ へは G_V は自由に作用しており, 集合論的な商であるが, 幾何学的不変式論における幾何学的商になっている. また構成から, 自然な射影射

$$\pi\colon \mathcal{M}^\bullet(V,W)\to\mathcal{M}_0^\bullet(V,W)$$

が存在する. $0\in\mathcal{M}_0^\bullet(V,W)$ の逆像を $\mathcal{L}^\bullet(V,W)$ で表す. $\mathcal{M}^\bullet(V,W)$ $(\mathcal{M}_0^\bullet(V,W))$ を **smooth (resp. affine) graded quiver variety**という.

2.1.8. graded quiver variety は, (ふつうの)quiver variety のある $\mathbb{C}^*$ 作用に関する固定点として得られており, 我々の設定では,

$$t(B_\Omega,B_{\overline{\Omega}},\alpha,\beta)=(B_\Omega,t^{-2}B_{\overline{\Omega}},t^{-1}\alpha,t^{-1}\beta)$$

で定めている. smooth graded quiver variety がなめらかであるのは, smooth quiver variety が非特異であることから従う.

2.1.9. 非特異であることは, 接空間を定める以下の 3 term の複体を用いて具体的に確かめられることができる. $\widehat{I}_1$-graded vector space V, $\widehat{I}_0$-graded vector space W に対して, 3-term complex

$$\mathrm{L}(V,V)^{[0]}\xrightarrow{\iota}\mathbf{M}^\bullet(V,W)\xrightarrow{d\mu}\mathrm{L}(V,V)^{[-2]}$$

をそれぞれ, 運動量写像の微分と無限小作用で定めると, ι は単射かつ $d\mu$ は全射で, $\operatorname{Ker}(d\mu)/\operatorname{Im}(\iota)$ は接バンドルを定める. 特に,

$$\dim\mathcal{M}^\bullet(V,W)=\operatorname{rank}\operatorname{Ker}(d\mu)/\operatorname{Im}(\iota)$$

2.1.10. 任意の $(i,a)\in\widehat{I}_1$ に対して, $V_i'(a)\subset V_i(a)$ が成り立っているとする. このとき, 0 は半単純表現であるから, 0 を直和することで, $\mathcal{M}_0^\bullet(V',W)$ を $\mathcal{M}_0^\bullet(V',W)$ の closed subvariety として埋め込むことができる. この埋め込みに関して, inductive limit をとることで, $\mathcal{M}_0^\bullet(W)$ を定義する.

$$\mathcal{M}_0^\bullet(W) := \bigcup_V \mathcal{M}_0^\bullet(V,W)$$

$\mathcal{M}_0^\bullet(V,W)$ には, 自然に stratificaition が存在し, (空もしれない)$\mathcal{M}_0^{\bullet\mathrm{reg}}(V,W)\subset\mathcal{M}_0^\bullet(V,W)$ で closed free orbit のなす (存在すれば最大の開) 集合とする. $\pi^{-1}\mathcal{M}_0^{\bullet\mathrm{reg}}(V,W)$ 上では, $\pi\colon\mathcal{M}_0^\bullet(V,W)\to$

$\mathcal{M}_0^{\bullet\mathrm{reg}}(V,W)$ は同型であり, 特に, $\mathcal{M}_0^{\bullet\mathrm{reg}}(V,W)$ は smooth である. $\mathcal{M}_0^{\bullet\mathrm{reg}}(V,W)$ は空でなければ, $\mathcal{M}_0^{\bullet}(V,W)$ 内の開集合をなし, “stratification”

$$\mathcal{M}_0^{\bullet}(W) = \bigsqcup_{V} \mathcal{M}_0^{\bullet\mathrm{reg}}(V,W)$$

を得る.

2.2. q**-Cartan matrix $\mathbf{C}_q$.** $\widehat{I}$-graded vector space V, V' が任意の $(i,a)\in\widehat{I}$ に対して, $\dim V_{i,a} \geq \dim V_{i,a}$ $\mathbb{Z}^{\widehat{I}}$ 上の endomorphism $\mathbf{C}_q$ を

$$\mathbf{C}_q(v_i(a)) := v_k(a+1) + v_k(a-1) - \sum_{h\in\Omega;\mathrm{out}(h)=i} v_{\mathrm{in}(h)}(a+1) - \sum_{h\in\Omega\,\mathrm{in}(h)=i} v_{\mathrm{out}(h)}(a-1)$$

で定める.

3 項の複体 $C^{\bullet}(V,W) = \{C^{\bullet}_{i,a}(V,W)\}_{(i,a)\in\widehat{I}_0}$ を

$$V_i(a+1) \xrightarrow{\sigma_{i,a}} \bigoplus_{h\in\Omega;\mathrm{out}(h)=i} V_{\mathrm{in}(h)}(a+1) \oplus \bigoplus_{h\in\Omega;\mathrm{in}(h)=i} V_{\mathrm{out}(h)}(a-1) \oplus W_i(a) \xrightarrow{\tau_{i,a}} V_i(a-1),$$

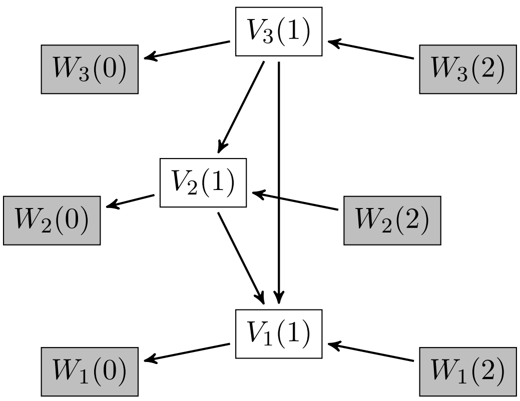
$\sigma_{i,a} := \bigoplus_{h\in\Omega;\mathrm{out}(h)=i} \varepsilon(h)B_h(a) \oplus \bigoplus_{h\in\Omega;\mathrm{in}(h)=i} \varepsilon(h)B_{\overline{h}}(a) \oplus \beta_i$ $\tau_{i,a} := \sum_{h\in\Omega;\mathrm{in}(h)=i} B_h(a-2) + \sum_{h\in\Omega;\mathrm{out}(h)=i} B_{\overline{h}}(a) + \alpha_i$ と定める. 安定性条件より, $\mathrm{Ker}\,\sigma_{i,a} = 0$ が分かる. $(\mathrm{rank}\,C^{\bullet}_{i,a}(V,W))_{(i,a)\in\widehat{I}} = w - \mathbf{C}_q v$ に他ならない. (V,W) が**ℓ-支配的 (ℓ-dominant)**であるとは, $\mathrm{rank}\,C^{\bullet}(V,W) \geq 0$ なることを言う. 定義から $(0,W)$ は ℓ-支配的である. dominant な対 (V,W) に対して, $\widehat{I}_0$-graded vector space $C^{\bullet}(V,W)$ を $\{\mathrm{rank}\,\mathrm{Ker}\,\tau_{i,a}/\,\mathrm{Im}\,\sigma_{i,a}\}_{(i,a)\in\widehat{I}_0}$ で定める.

2.2.1. 階層 $\mathcal{M}_0^{\bullet\mathrm{reg}}$ について, 以下の性質が成り立つ.

命題 2.3. (1) $\mathcal{M}_0^{\bullet\mathrm{reg}}(V,W) \neq \emptyset$ であること, $\mathcal{M}^{\bullet}(V,W) \neq \emptyset$ かつ (V,W) が ℓ-支配的

(2) もし $\mathcal{M}_0^{\bullet\mathrm{reg}}(V,W) \subset \overline{\mathcal{M}_0^{\bullet\mathrm{reg}}(V',W)}$ ならば, $V' \leq V$ すなわち, 任意の (i,a) に対して, $\dim V'_i(a) \geq \dim V_i(a)$ が成立する.

2.3. **level 1 case. 以下では, W は $[0,2]\times I$ に台をもつと仮定する.** すなわち (I,Ω) に対して以下のような framed quiver を考える.



もっとも簡単な場合ではあるが, 以下に述べるように, 非自明ながら, 重要な例をなす. 以下では V は常に $\{1\}\times I$-graded vector space である. すなわち,

$$\mathbf{M}^{\bullet}(V,W) = \mathrm{E}_{\Omega}(V,V)^{[0]} \oplus \mathrm{L}(V,W)^{[-1]} \oplus \mathrm{L}(W,V)^{[-1]}$$

仮定から, μ は常に 0 である.

2.3.1. $W(2)=0$ *case.* 任意の $i \in I$ に対して, $w_i(2)=0$ が成り立つ場合を考える [Nak96, §3]. (I,Ω) は acyclic quiver で, 付随する "deframed quiver" も acyclic quiver であるから $\mathcal{M}_0^\bullet(V,W)=0$ である. よって, 以下が成り立つ.

命題 2.4 ([Nak96, Theorem 3.5])**.** $\mathcal{M}^\bullet(V,W)$ は滑らかで射影的な多様体で,

$$\dim \mathcal{M}^\bullet(V,W) = \sum_{i\in I} w_i(0)v_i(1) + \sum_{h\in\Omega} v_{\mathrm{out}(h)}(1)v_{\mathrm{in}(h)}(1) - \sum_{i\in I} v_i(1)v_i(1)$$

が成り立つ.

(I,Ω) を箙として, S, V を I で次数付けられたベクトル空間とするとき, $\mathrm{Gr}(S,V) := \prod_{i\in I}\mathrm{Gr}(\dim S_i, \dim V_i)$ を V の $\underline{\dim}S$ 次元の I で次数付けられた部分ベクトル空間をパラメトライズするグラスマン多様体の積とする.

$$\widetilde{\mathrm{Gr}}_{(I,\Omega)}(S,V) := \{(B,S') \in \mathrm{E}_\Omega(V,V)\times \mathrm{Gr}(S,V) \mid B_h S'_{\mathrm{out}(h)} \subset S'_{\mathrm{in}(h)} \text{ for } {}^\forall h\in\Omega\ \}$$

とし, 第 1 成分への射影のファイバーを**箙グラスマン多様体 (quiver Grassmann variety)**といい, $\mathrm{Gr}_{(I,\Omega)}(S,(B,V))$ で表す. これは, 箙の表現 (B,V) の箙の表現としての部分空間 (= 部分表現) をパラメトライズする多様体に他ならない.

命題 2.5 ([Rei08, Proposition 3.9])**.** (V,W) に対して, $\mathrm{Gr}_{(I,\Omega)}(V,\nabla^{W(0)})$ で入射加群 $\nabla^{W(0)}$ の次元ベクトル V の箙グラスマン多様体を表す. このとき, 同型が存在する.

$$\mathcal{M}^\bullet(V,W) \cong \mathrm{Gr}_{(I,\Omega)}(V,\nabla^{W(0)})$$

対応は, $(B,\beta)\in\mathcal{M}^\bullet(V,W)$ に対して,

$$\Phi_i(B,\beta) := \bigoplus_{\mathrm{out}(r)=i} \beta_{\mathrm{in}(r)}B_r \colon V_i \to \bigoplus_{\mathrm{out}(r)=i} W_{\mathrm{in}(r)}(0)$$

とおくと, $\Phi=\Phi(B,\beta)=(\Phi_i(B,\beta))_{i\in I}$ は加群の射 $\Phi\colon (B,V)\to\nabla^{W(0)}$ を定め, $[(B,\beta)]\mapsto \mathrm{Im}\,\Phi$ で与えられる.

証明は, $\mathrm{Ker}\,\Phi(B,\beta)$ が $\mathrm{Ker}\,\beta$ に含まれる maximal な B-invariant subspace であることから, 対 (B,β) の安定性と Φ が単射であることが必要十分であることから従う.

注意. なお, "双対" な frameing $W(0)=0$ なる条件で, "双対" な安定性条件, すなわち $\mathrm{Im}\,\alpha$ を含むような B-invariant subspace は V に限るという安定性条件のもと得られる条件は, (B,α) から定まる自然な加群の射 $\Psi=(\Psi_i)_{i\in I}$

$$\Psi_i(B,\alpha) := \sum_{\mathrm{in}(r)=i} B_r\alpha_{\mathrm{out}(r)} \colon \bigoplus_{\mathrm{in}(r)=i} W_{\mathrm{out}(r)} \to V_i$$

に対して $\mathrm{Im}\,\Psi$ は, $\mathrm{Im}\,\alpha$ を含む最小の B-invariant な空間をなし, $\Psi_i(B,\alpha)\colon \Delta^{W(2)}\to(V,B)$ が全射であることと必要十分となり, 双対的に射影加群の商加群全体のなす箙グラスマン多様体と同一視される.

注意. 一般に、箙と関係式で定義される多元環の枠付き表現のモジュライと入射加群 (射影加群) に付随する箙グラスマン多様体との同型は, 多元環 A に対して, $\mathrm{E}_\Omega(V,V)$ を (冪零) 表現多様体 $\mathsf{Rep}_A(V)$ に置き換えて, 同様の幾何学的不変式論を用いた構成を行うことで, [Shi09, Theorem 2.3] や, [Fed10, Theorem 3] で証明されている. [3]

[3] [Fed10, Theorem 3] で述べられている滑らかさは成り立たない.

2.3.2. 一般の W に対しては, 以下の記述がある. path r に対して $z_r := \beta_{\mathrm{in}(r)} B_r \alpha_{\mathrm{out}(r)}$ と定めると, $z = (z_r)$ は加群の射 $z\colon \Delta^{W(2)} \to \nabla^{W(0)}$ を定める. 長さ 0 の path$r$ に対しても, $z_r := \beta_{\mathrm{in}(r)} \alpha_{\mathrm{out}(r)}$ と定める. そこで, $[0,2] \times I$-graded vector space W に対して, $\mathbf{E}_W := \mathrm{Hom}_{\mathcal{Q}}(\Delta^{W(2)}, \nabla^{W(0)})$ とおく. また, $\mathrm{Gr}(V(1), \nabla^{W(0)})$ 上のベクトル束 $\widetilde{\mathrm{Gr}}_{(I,\Omega)}(V,W)$ を

$$\widetilde{\mathrm{Gr}}_{(I,\Omega)}(V,W) := \{(X,z) \in \mathrm{Gr}_{(I,\Omega)}(V, \nabla^{W(0)}) \times \mathbf{E}_W \mid \mathrm{Im}(z) \subset X\}$$

とさだめ, $\pi\colon \widetilde{\mathrm{Gr}}_{(I,\Omega)}(V,W) \to \mathbf{E}_W$ を第二成分への射影とする. 原点のファイバーが射影的であるから, π は射影射である. 以下は, [Nak11, Proposition 4.6] の acyclic quiver への一般化である.

命題 2.6. (1) 同型 $\mathcal{M}_0^\bullet(W) \cong \mathbf{E}_W$ が

$$[(B,\alpha,\beta)] \mapsto (\beta_{\mathrm{in}(r)} B_r \alpha_{\mathrm{out}(r)})$$

で与えられる.

(2) 同型 $\mathcal{M}^\bullet(V,W) \cong \widetilde{\mathrm{Gr}}_{(I,\Omega)}(V,W)$ が, $([B,\alpha,\beta]) \mapsto (\mathrm{Im}\,\Phi(B,\beta), (\beta_{\mathrm{in}(r)} B_r \alpha_{\mathrm{out}(r)}))$ で与えられる. 特に, $\mathcal{M}^\bullet(V,W)$ は既約. また以下の図式は可換である.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{M}^\bullet(V,W) \arrow[r, "\cong"] \arrow[d, "\pi"'] & \widetilde{\mathrm{Gr}}_{(I,\Omega)}(V,W) \arrow[d, "\pi"] \\
\mathcal{M}_0^\bullet(V,W) \arrow[r, "\cong"'] & \mathbf{E}_W
\end{tikzcd}$$

2.4. **Transversal Slice.** (V^0, W) を ℓ-支配的な対とし, I-graded vector space $W^\perp$ を $\underline{\dim} W^\perp = \underline{\mathrm{rank}} C^\bullet(V^0, W)$ で定める. また, $V^\perp$ を $\underline{\dim} V^\perp = \underline{\dim} V - \dim V^0$ で定める. このとき, $\dim W - \mathbf{C}_q \underline{\dim} V = \dim W^\perp - \mathbf{C}_q \underline{\dim} V^\perp$ が成り立つ. T を $x \in \mathcal{M}_0^{\bullet\mathrm{reg}}(V^0, W)$ における接空間とする. 以下の横断片 (transversal slice) の存在は, [Nak11, Theorem 3.14] の類似である.

命題 2.7. 上の設定のもと, U, U_T, $U_{\mathfrak{S}}$ をそれぞれ $x \in \mathcal{M}_0^\bullet(V,W)$, $0 \in T$, $0 \in \mathcal{M}_0(V^\perp, W^\perp)$ という (解析的局所) 近傍と (解析的局所) 双正則射 $U \to U_T \times U_{\mathfrak{S}}$ で, 以下の図式を可換にするものが存在する. また, stratum $\mathcal{M}_0^{\bullet\mathrm{reg}}(V', W)$ は, stratum $U_T \times \mathcal{M}_0^{\bullet\mathrm{reg}}(V'^\perp, W^\perp)$ に移される.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{M}^\bullet(V,W) & \pi^{-1}(U) \arrow[l, hook'] \arrow[r, "\cong"] \arrow[d, "\pi"] & U_T \times \pi^{-1}(U_{\mathfrak{S}}) \subset \mathcal{M}^\bullet(V^\perp, W^\perp) \arrow[d, "\mathrm{id} \times \pi"] \\
\mathcal{M}_0^\bullet(V,W) & \pi^{-1}(U) \arrow[l, hook'] \arrow[r, "\cong"] & U_T \times U_{\mathfrak{S}} \quad \subset \mathcal{M}_0^\bullet(V^\perp, W^\perp)
\end{tikzcd}$$

2.5. **双対バンドル.** $\mathbf{E}_W$ の双対空間を考える. 任意の $k\mathcal{Q}$ 加群 M に対して自然な双対性 $\mathrm{Hom}_{k\mathcal{Q}}(\Delta_i, M) \cong Me_i \cong D\,\mathrm{Hom}_{k\mathcal{Q}}(M, \nabla_i)$ が存在する ([ASS06, 2.11 Lemma]). よって, $\mathbf{E}_W^* \cong \mathrm{Hom}_{k\mathcal{Q}}(\nabla^{W(0)}, \nabla^{W(2)})$ と自然に同一視される. annihilator バンドルは, この同一視のもと, 以下のように記述される. すなわち,

$$\widetilde{\mathrm{Gr}}^\perp_{(I,\Omega)}(V,W) \cong \{(z^*, X) \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{Q}}(\nabla^{W(0)}, \nabla^{W(2)}) \times \mathrm{Gr}_{(I,\Omega)}(V, \nabla^{W(0)}) \mid X \subset \mathrm{Ker}(z^*)\}$$

第一成分への射影 $\pi^\perp\colon \widetilde{\mathrm{Gr}}^\perp_{(I,\Omega)}(V,W) \to \mathrm{Hom}_{k\mathcal{Q}}(\nabla^{W(0)}, \nabla^{W(2)})$ のファイバーは, $\mathrm{Ker}(z^*)$ の箙グラスマン多様体に他ならない.

3. 量子表現環

次数付き箙多様体 $\mathcal{M}_0^\bullet(W)$ 上の偏屈層のクラスと制限関手を定義し, 量子表現環を導入する.

3.1. **A class of perverse sheaves $\mathscr{P}_W$.** $\mathbb{C}$ 上の代数多様体 X に対して, $\mathscr{D}^b_c(X)$ で構成可能層のなす導来圏とし, $j \in \mathbb{Z}$ に対して, シフト関手を $[j]\colon \mathscr{D}^b_c(X) \to \mathscr{D}^b_c(X)$ で表す. 局所閉部分多様体 $Y \subset X$ に対して, $\mathbf{1}_Y := \underline{\mathbb{C}}_Y[\dim Y]$ とし, Y の regular part Y^{reg} 上の局所系 $\mathcal{L}$ に付随する交差コホモロジー複体を $\mathbf{IC}(Y, \mathcal{L})$ で表す. $\mathbf{IC}(Y, \underline{\mathbb{C}}_{Y^{\mathrm{reg}}})$ を単に, $\mathbf{IC}(Y)$ で表す. ここで, $\mathbf{IC}(Y, \mathcal{L})|_{Y^{\mathrm{reg}}} = \mathcal{L}[\dim Y^{\mathrm{reg}}]$ という約束とする. $\pi\colon \mathcal{M}^\bullet(V, W) \to \mathcal{M}^\bullet_0(V, W)$ に対して, $\mathcal{M}^\bullet(V, W)$ 上の偏屈層 $\mathbf{1}_{\mathcal{M}^\bullet(V,W)}$ とその押し出し $\pi_V(W) := \pi_*(\mathbf{1}_{\mathcal{M}^\bullet(V,W)})$ を考える. π は射影射かつ $\mathcal{M}^\bullet(V, W)$ は滑らかな多様体であるから, 分解定理より, $\pi_W(V)$ は半単純複体であり, $\mathbb{D}$ を Verdier 双対とすると, $\mathbb{D}(\pi_W(V)) = \pi_W(V)$ を満たす. $\mathscr{P}_W$ で, $\mathcal{M}^\bullet_0(V, W)$ 上のある (V, W) に対して $\pi_W(V)$ にシフトを除いて, 直和因子に現れる単純偏屈層の同型類のなす集合を表し , $\mathscr{Q}_W$ で, $\mathscr{P}_W$ を含む $\mathscr{D}^b_c(\mathcal{M}^\bullet_0(W))$ の加法的かつ shift で閉じた部分圏とする. (split) Grothendieck 群 $K_0(\mathscr{Q}_W)$ には, シフトにより t 作用が入り, $\mathbb{Z}[t^\pm]$-加群の構造が入り , $\mathscr{P}_W$ は $K_0(\mathscr{Q}_W)$ の $\mathbb{Z}[t^{\pm 1}]$-自由基底をなす.

3.2. **Transversal slice and classification of $\mathscr{P}_W$.** 横断片を用いた議論により , $\mathscr{P}_W$ は, 以下の形に限るということが分かる.

命題 3.1.

$$\mathscr{P}_W = \{\mathbf{IC}(\mathcal{M}^{\bullet\mathrm{reg}}(V, W)) \mid (V, W) \text{ is } \ell\text{-dominant}\}$$

以下では, ℓ-dominant な (V, W) に対して, $\mathbf{IC}(\mathcal{M}^{\bullet\mathrm{reg}}(V, W))$ を $\mathbf{IC}_W(V)$ と書くことにする.

3.3. **Restriction functor.** [Nak11, 3.5] や [VV03, 4] と同様に, “テンソル積多様体”$\mathcal{T}_0(W^1; W^2)$ を用いて, 図式

$$\mathcal{M}_0(W^1) \times \mathcal{M}_0(W^1) \longleftarrow \mathcal{T}_0(W^1; W^2) \hookrightarrow \mathcal{M}_0(W)$$

を考えることで, 制限関手

$$\widetilde{\mathrm{Res}}_{W^1,W^2} := \kappa_! \iota^* \colon \mathscr{Q}_W \to \mathscr{Q}_{W^1} \boxtimes \mathscr{Q}_{W^2}$$

が定義でき,

$$\mathcal{K} := \bigoplus_W K_0(\mathscr{Q}_W)$$

は $\mathbb{Z}[t^\pm]$ 余代数をなす. 分解定理より, その $\{\mathbf{IC}_W(V)\}$ に関する構造定数は全て正である. 双対基底を $\{L_W(V)\}$ で表す. 以下では, その双対 $\mathcal{K}^*$ に $\mathbb{Z}[t^{\pm 1}]$ 代数の構造を入れる.

また、横断片から定まる対応 $\mathbf{IC}_W(V) \to \mathbf{IC}_{W^\perp}(V^\perp)$ に関して, $\widetilde{\mathrm{Res}}$ が整合的であるから, 以下を定義することができる.

$$\mathcal{R}_t := \left\{ (f_W)_W \in \prod_W \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[t^\pm]}(K_0(\mathscr{Q}_W), \mathbb{Z}[t^\pm]) \mid \langle f_W, \mathbf{IC}_W(V)\rangle = \left\langle f_{W^\perp}, \mathbf{IC}_{W^\perp}(V^\perp)\right\rangle \text{ for any } W \right\}$$

ℓ-支配的な対 (V, W) は $(0, C^\bullet(V, W))$ に還元される.

$L_W(0)$ で定められる元を L_W で表す. $\mathcal{R}_t$ は $L := \{L_W\}$ を基底として持つ. 横断片に関する議論により, L に関する構造定数もまた、すべて正である . $\mathcal{R}_t$ を**量子表現環 (quantum Grothendieck ring)**といい, L をその**標準基底**という. これは, Lusztig の双対標準基底の類似である. この場合には, [Kim10] や [GLS11] で扱われている**量子座標環 (量子冪単部分群)**$\mathcal{O}_q[N(c^2)]$ ないし $A_q(\mathfrak{n}(c^2))$ の (双対) 標準基底と一致し, 本稿の結果から, [Kim10] で述べた量子化予想を解決すると考えている (work in progress). また、量子アファイン環の有限次元表現のなす圏の表現環の量子類似の一般化で, $\mathcal{R}_t$ は, 次数付き箙多様体上の合成積代数 (ないし米田代数) の (次数付き) 表現の整合的な族のモノイダル圏の (量子) 表現環と思える.

3.4. q **指標の t 類似.** $\widehat{\mathcal{Y}} := \mathbb{Z}[t^{\pm 1}][W_i(a), V_i(a)]_{(i,a)\in\widehat{I}}$ とおく. ここでは, $W_i(a)$, $V_i(a)$ は不定元とみなす. w, v を W, V の次元ベクトルとしたとき, $m(v,w) := \prod_{(i,a)\in\widehat{I}} W_i(a)^{w_i(a)} V_i(a)^{v_i(a)}$ と表す. $\widehat{\mathcal{Y}}$ に,

$$\bar{t} = t^{-1}, \overline{m} = t^{2\binom{m,m}{\cdot}} m$$

$$m^1 * m^2 = t^{2d(m^1,m^2)} m^1 m^2$$

ただし, $d(m^1, m^2)$ は 3 term complex $C^\bullet(V^1, W^1; V^2, W^2)$

$$\mathrm{L}(V^1,V^2) \to \mathrm{E}_\Omega(V^1,V^2)^{[0]} \oplus \mathrm{L}(W^1,V^2)^{[-1]} \oplus \mathrm{L}(V^1,W^2)^{[-1]} \oplus \mathrm{E}_\Omega^{[-2]}(V^1,V^2) \to \mathrm{L}(V^1,V^2)^{[-2]}$$

の rank として定義され, $d((v,w),(v,w)) = \dim \mathcal{M}^\bullet(V,W)$ である. ここで, $\mathscr{P}_W$ は, $\{\pi_W(V)\}$ たちによって分解定理により生成されていたことを思い出すと,

$$\widehat{\chi_{q,t}} \colon \mathcal{K}^* := \prod_W \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[t^{\pm 1}]}(K_0(\mathscr{Q}_W), \mathbb{Z}[t^{\pm 1}]) \to \widehat{\mathcal{Y}}$$

を以下で定めると,

$$\widehat{\chi_{q,t}}(f) = \sum_V \langle f, \pi_W(V) \rangle\, t^{d((v,w),(v,w))} W^w V^v$$

単射であることが分かり, $\mathcal{R}_t$ を $\widehat{\mathcal{Y}}$ へ埋め込む事ができる. これを (truncated)q 指標の t 類似という. 横断片と余積の整合性を用いて, $m(v,w) = m(v^\perp, w^\perp)$ なる関係式を入れた環 $\mathcal{Y}$ への $\mathcal{R}_t$ の埋め込み $\chi_{q,t} \colon \mathcal{R}_t \to \mathcal{Y}$ が得られる.

4. 量子クラスター指標

[Nak11] において, (量子) クラスター単項式が (双対) 標準基底 L に含まれるという結果において, 本質的な役割を果たしたのは, Fourier-Sato-Deligne 変換による, Caldero-Chapoton 公式との一致であった. $\pi^\perp(z^*)$ が $\mathrm{Ker}(z^*)$ に対する箙グラスマン多様体であることから, 以下の定義を考えることが自然である.

$$\mathscr{L}_W := \{\mathbf{IC}_W(V) \in \mathscr{P}_W \mid \operatorname{codim} \operatorname{supp} T(\mathbf{IC}_W(V)) = 0\}.$$

と定める, ここで $T\colon \mathscr{D}^b(\mathbf{E}_W) \cong \mathscr{D}^b(\mathbf{E}_W^*)$ を Fourier-Sato-Deligne 変換とする. 構成から, $\mathbf{IC}_W(0) \in \mathscr{L}_W$ であるが, 一般には, $\mathscr{L}_W = \{\mathbf{IC}_W(0)\}$ とは限らないので, L_W の代わりに以下の基底を考える. $r(v,w)$ を $T(\mathbf{IC}_W(V))$ を (交差コホモロジー複体として) 定義する局所系の rank とし,

$$\mathbb{L}_W := \sum_{\mathbf{IC}_W(V)\in\mathscr{L}_W} (-1)^{d((v,w),(v,w))} r(v,w) L_{C^\bullet(V,W)}$$

と定める. 構成から, $\mathbb{L}$ は L と unitriangular な $\mathcal{R}_t$ の基底をなす. $\mathbb{L}_W$ の役割は以下である. $[0,2] \times I$-graded vector space W に対して, $\mathbf{E}_W^*$ の "generic" kernel を ${}^\sigma W$ とする. 量子クラスター代数に関する詳細の一切は省略するが, $\mathsf{ind} W$ は level 1 z-quiver から定義される index で $\widetilde{B}$ は level 1 z-quiver から定まる matrix である. z-quiver は自然に量子クラスター代数を定め, 以下の公式から $\chi_{q,t}$ の像は量子クラスター代数に他ならないことが分かる.

定理 4.1 (Qin-K)**.**

$$\chi_{q,t}(\mathbb{L}_W) = \sum_V P_t(\mathrm{Gr}_{(I,\Omega)}(V, {}^\sigma W)) x^{\mathsf{ind} W + \widetilde{B} v}$$

ここで, 右辺は [Qin10] による量子クラスター単項式を与える公式 (**量子 Caldero-Chapoton 公式**) の一般化そのもので、**一般量子クラスター指標 (generic quantum cluster character)**と呼ぶ. [Nak11] によって用いられた Kac による標準分解 (canonical decomposition) 理論の代わりに, Derksen-Fei による入射表示による標準分解 (canonical decomposition) 理論 [DF09] を用いれば, 入射表示を 2 項の複体と思ったときに, 0-ホモトピックな部分を取り除くことが, クラスター代数

における**係数**を取り出すことに他ならず, rigid な presentation と $\mathrm{Ker}(z^*)$ が rigid であることが, 必要十分となり, クラスター単項式に対応するような W において, $\mathbb{L}_W = L_W$ となり, クラスター単項式が (双対) 標準基底に含まれることが従う .

References

[ASS06] Ibrahim Assem, Daniel Simson, and Andrzej Skowroński, *Elements of the representation theory of associative algebras. Vol. 1*, London Mathematical Society Student Texts, vol. 65, Cambridge University Press, Cambridge, 2006, Techniques of representation theory. MR 2197389 (2006j:16020)

[BZ93] A. Berenstein and A. Zelevinsky, *String bases for quantum groups of type A_r*, I. M. Gelfand Seminar, Adv. Soviet Math., vol. 16, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1993, pp. 51–89. MR 1237826 (94g:17019)

[DF09] Harm Derksen and Jiarui Fei, *General presentations of algebras*, preprint arXiv, `http://arxiv.org/abs/0911.4913v2`, 11 2009.

[Fed10] Stanislav Fedotov, *Framed moduli and grassmannians of submodules*, preprint arXiv, `http://arxiv.org/abs/1010.4761`, 10 2010.

[FZ07] S. Fomin and A. Zelevinsky, *Cluster algebras. IV. Coefficients*, Compos. Math. **143** (2007), no. 1, 112–164. MR 2295199 (2008d:16049)

[GLS11] C. Geiss, B. Leclerc, and J. Schröer, *Cluster structures on quantum coordinate rings*, E-print arXiv `http://arxiv.org/abs/1104.0531v2`, 04 2011.

[Her10] D. Hernandez, *Simple tensor products*, Inventiones Mathematicae **181** (2010), 649–675, 10.1007/s00222-010-0256-9.

[HL10] David Hernandez and Bernard Leclerc, *Cluster algebras and quantum affine algebras*, Duke Math. J. **154** (2010), no. 2, 265–341. MR 2682185 (2011g:17027)

[HL11] D. Hernandez and B. Leclerc, *Quantum grothendieck rings and derived hall algebras*, E-print arXiv `http://arxiv.org/abs/1109.0862`, Jan 2011.

[Kim10] Y. Kimura, *Quantum unipotent subgroup and dual canonical basis*, E-print arXiv `http://arxiv.org/abs/1010.4242`, to appear in Kyoto J. of Math., 2010.

[Lec11] B. Leclerc, *Quantum loop algebras, quiver varieties, and cluster algebras*, E-print arXiv `http://arxiv.org/abs/1102.1076`. To appear in the proceedings of ICRA XIV "Representations of Algebras and Related Topics", published by the European Mathematical Society, 02 2011.

[Nak96] Hiraku Nakajima, *Varieties associated with quivers*, Representation theory of algebras and related topics (Mexico City, 1994), CMS Conf. Proc., vol. 19, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1996, pp. 139–157. MR 1388562 (97m:16022)

[Nak11] H. Nakajima, *Quiver varieties and cluster algebras*, Kyoto Journal of Mathematics **51** (2011), no. 1, 71–126.

[Qin10] F. Qin, *Quantum cluster variables via Serre polynomials*, E-print arXiv `http://arxiv.org/abs/1004.4171`, 2010.

[Rei08] Markus Reineke, *Framed quiver moduli, cohomology, and quantum groups*, J. Algebra **320** (2008), no. 1, 94–115. MR 2417980 (2009d:16021)

[Shi09] Ian Shipman, *On representation schemes and grassmanians of finite dimensional algebras and a construction of lusztig*, preprint arXiv, `http://arxiv.org/abs/0911.1948v2`, 11 2009.

[VV03] M. Varagnolo and E. Vasserot, *Perverse sheaves and quantum Grothendieck rings*, Studies in memory of Issai Schur (Chevaleret/Rehovot, 2000), Progr. Math., vol. 210, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 2003, pp. 345–365. MR 1985732 (2004d:17023)

Research Institute for Mathematical Science, Kyoto University, Kyoto 606-8502, Japan
E-mail address: `ykimura@kurims.kyoto-u.ac.jp`
URL: `http://researchmap.jp/ysykmr/`