

spherical な群作用と多重旗多様体

Spherical group actions and double flag varieties for a symmetric pair

西山享^{*)} (青学大・理工)

KYO NISHIYAMA

何旭華氏ご令嬢、雲霏さん (Fiona) の誕生を祝って

概要. 簡約代数群 G の部分旗多様体とその対称部分群 K の部分旗多様体の直積を考える。これを対称対の二重旗多様体と呼ぶ [NO11]。この講演では、 G または K の球作用 (spherical action) と二重旗多様体上の軌道の有限性が密接に関係していることを報告する。

この報告は香港科技大學の Xuhua He 氏および九州大学の落合啓之氏との共同研究に基づく。また、青山学院大学の谷口健二・近藤健介両氏との議論も本研究の上で大変有益であった。この場を借りて感謝したい。

1. 対称空間と球作用

1.1. 対称対. G を連結複素簡約代数群とし、 $\theta \in \text{Aut}(G)$ を包含的自己同型¹とする。このとき $K = G^\theta = \{g \in G \mid \theta(g) = g\}$ を G の対称部分群、 (G, K) の組を対称対と呼ぶ。 K は簡約代数群であるが、一般に連結とは限らない。以下、簡単のために K を連結と仮定する²。

例 1.1. $G = \text{SL}_n(\mathbb{C})$ とし、包含的自己同型を $\theta(g) = {}^t g^{-1}$ で決める。このとき、 $K = G^\theta = \text{SO}_n(\mathbb{C})$ である。 SL_n の代わりに $G = \text{GL}_n(\mathbb{C})$ とすると $G^\theta = \text{O}_n(\mathbb{C})$ となり、これは連結でない。

例 1.2. $G = \text{GL}_n(\mathbb{C})$ とおき、 $I_{p,q} = \begin{pmatrix} 1_p & 0 \\ 0 & -1_q \end{pmatrix}$ ($p+q=n$) に対して、包含的自己同型を $\theta(g) = I_{p,q} g I_{p,q}^{-1}$ で定義する。容易にわかるように

$$K = \left\{ \begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & h \end{pmatrix} \mid g \in \text{GL}_p, h \in \text{GL}_q \right\}$$

2011 年度表現論シンポジウム講演集原稿 (2011/11/07 – 11/10; 於 国民宿舎 紀州路みなべ)。

*) Supported by JSPS Grant-in-Aid for Scientific Research (B) #21340006.

¹自己同型であって $\theta^2 = \text{id}$ が成り立つもの。

² G が単連結なら K は連結である。一般に G^θ が連結でない場合には、 K としてその連結成分を考えれば以下の話はほとんど変更せずに成り立つ。

である。

1.2. ボレル部分群と旗多様体. G の極大な連結可解部分群 B をボレル部分群、 G/B を旗多様体と呼ぶ。 B の正規化部分群 $N_G(B)$ は B 自身に一致し、すべてのボレル部分群は互いに共役なので、 G/B は G のボレル部分群の全体と自然に同一視できる。 G/B を旗多様体と呼ぶのは、 $G = \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ が一般線型群の場合に、 $\mathbb{C}^n$ の部分空間の旗

$$F_0 = \{0\} \subset F_1 \subset F_2 \subset \cdots \subset F_{n-1} \subset F_n = \mathbb{C}^n \quad \dim F_d = d \quad (1.1)$$

とボレル部分群の間に自然に対応がつくからである。実際、旗 $(F_d)_{d=0}^n$ に対して B を

$$B = \{g \in G \mid g(F_d) \subset F_d \ (0 \leq d \leq n)\}$$

とおけばよい。

ボレル部分群を含むような G の部分群 P を放物型部分群と言う。このとき G/P は部分旗多様体と呼ばれる。この名称の由来も、 $G = \mathrm{GL}_n$ の場合に、 G/P が旗 (1.1) の一部分 (部分旗)

$$F_{d_0} = \{0\} \subset F_{d_1} \subset F_{d_2} \subset \cdots \subset F_{d_k} = \mathbb{C}^n \quad (d = (d_1, d_2, \dots, d_k) \text{ を固定})$$

の全体と考えられるからである。この旗を固定する放物型部分群を

$$P_{(\lambda_1, \dots, \lambda_k)} = \{g \in G \mid g(F_{d_i}) \subset F_{d_i} \ (1 \leq i \leq k)\} \quad \text{ただし} \quad \lambda_i = d_i - d_{i-1}$$

と書く。もし $k = 2$ ならば、部分旗多様体は、ある次元 $d = d_1$ の部分空間全体を表わすから、Grassmann 多様体 $\mathrm{Grass}_d(\mathbb{C}^n)$ に一致し、対応する放物型部分群は極大放物型部分群である。

一般に部分旗多様体は射影多様体だが、 P が放物型部分群であることと G/P が射影多様体であることは同値である。つまり部分旗多様体は『 G の等質空間であって、かつ射影多様体になっているようなもの』と言うことができる。

1.3. 球作用. さて、簡約代数群 G が代数多様体 X に代数的に作用しているとしよう³。このようなとき、 X を G -多様体と呼ぶ。

定義 1.3. G -多様体 X が球多様体であるとは、あるボレル部分群 B が X 上で稠密な開軌道を持つときに言う。このとき、 G の X への作用を球作用と呼ぶ。

定義より、 X が球多様体であることと、任意のボレル部分群に対して、開かつ稠密な軌道が存在することが同値であることは容易にわかる。

次の定理は、球多様体に関する最も基本的で強力な定理である。

定理 1.4 (Brion [Bri89], Vinberg [Vin86]). G -多様体 X が球多様体であることと、 X が既約であって、かつ X 上の B -軌道が有限個であることは同値である。

³この報告では、代数多様体を単に多様体と書き、代数群の作用はすべて代数的なものを考える。以下、これはいちいち断らないことにする。

さて、 G -多様体 X が与えられると、群 G は自然に X 上の関数空間に作用する。 X 上の大域的な正則関数のなす環を $\mathbb{C}[X]$ と書く。すると $\mathbb{C}[X]$ は G の表現空間となっているが、これを正則表現という。

多様体 X がアフィンであれば、正則関数環 $\mathbb{C}[X]$ は十分にたくさんの関数を含んでおり、多様体の点と $\mathbb{C}[X]$ の極大イデアルは一対一に対応している。この意味で X はその関数環から復元される。しかし、例えば X が既約な射影多様体であれば、 $\mathbb{C}[X]$ は定数関数だけからなる⁴。したがって、 X の構造は (大域的な) 関数環からは復元できないことに注意しておく。

表現論による球多様体の特徴付けとして、次の定理がよく知られている。

定理 1.5 (Vinberg-Kimelfeld [VK78]). 既約で正規なアフィン多様体 X に対して、関数環 $\mathbb{C}[X]$ 上の G の表現が重複度 1 に分解することと、 X が球多様体であることは同値である。ここで G の表現が重複度 1 に分解するとは、既約分解したときに、各既約表現の重複度が 1 以下であるときに言う。

既約アフィン多様体 X に対して、 G の球作用のことを重複度自由な作用、 X を重複度自由な多様体であるという。特に X が G の表現空間であって、かつ G の作用に関して球多様体になっていれば X を重複度自由な表現と呼ぶ。

たとえアフィンでなくても、 X が球多様体であれば $\mathbb{C}[X]$ は重複度 1 である。しかし、アフィン多様体以外では、 $\mathbb{C}[X]$ はあまり有用でないことが多い。

さて、球多様体であるような等質空間を球等質空間というが、重要な球等質空間の例を以下二つ挙げる。

1.4. 対称空間と KGB 分解. 対称空間 G/K は球等質空間である。つまりボレル部分群 B は G/K に開軌道を持つ。これは岩沢分解 $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{a} + \mathfrak{n}$ と、可解リー環 $\mathfrak{a} + \mathfrak{n}$ を含むボレル部分環⁵が存在することから容易に従う。

したがって定理 1.4 より G/K 上には B -軌道が有限個しか存在しない。つまり $\#B \backslash G/K < \infty$ であるが、これは見方を変えれば、『旗多様体 G/B 上の K -軌道が有限である』という有名な事実を意味している。 G の実形であるような非コンパクトリー群⁶ $G_{\mathbb{R}}$ の Harish-Chandra 加群の理論と、 G/B 上の K 軌道は密接に関係しており、そのような両側分解 $K \backslash G/B$ に関する理論をしばしば KGB 理論と総称する。

さて、 K は簡約であるから、松島の定理より G/K はアフィン代数多様体である。したがって定理 1.5 より関数環 $\mathbb{C}[G/K]$ は G の表現として重複度 1 で分解する。一方、 $\mathbb{C}[G/K]$ は表現空間として K の自明な表現を G に (代数的に) 誘導したものと同値であるから、誘導表現は

$$\mathrm{Ind}_K^G \mathbf{1}_K \simeq \bigoplus_{\pi \in \Omega_K} \pi$$

⁴ $X = \mathbb{P}^1$ が射影直線の時は、これは最大値の原理から従う。

⁵ボレル部分群のリー環。あるいは極大可解部分リー環。

⁶であって、 K のコンパクト実形を極大コンパクト部分群に持つようなもの。

と重複度 1 で分解することになる。ここで Ω_K は誘導 $\text{Ind}_K^G 1_K$ に現れる G の有限次元既約表現の全体である。これより、Frobenius の相互律によって

$$\pi^K = \begin{cases} \mathbb{C} & (\pi \in \Omega_K) \\ 0 & (\pi \notin \Omega_K) \end{cases}$$

が任意の既約有限次元表現 $\pi \in \text{Irr}(G)$ に対して成り立つことがわかる。ただし π^K は表現 π の K -不変元を表す。

1.5. 部分旗多様体と Bruhat 分解. ボレル部分群 B を含む放物型部分群 P を考えよう。このとき、部分旗多様体 G/P は球等質空間である。実際、Bruhat 分解

$$B \backslash G/B = \coprod_{w \in W} BwB$$

を考えよう。ここで W は G の Weyl 群である。この両側分解から $B \backslash G/P$ への自然な射影が

$$BwB \mapsto BwP$$

として得られるから、 $B \backslash G/P$ も有限個の両側剰余類に分解する。この射影を注意深く見れば、 W_P を P の Levi 部分群の Weyl 群とする時、

$$B \backslash G/P = \coprod_{w \in W/W_P} BwP$$

であることがわかる。この分解もしばしば Bruhat 分解と呼ばれる。

さて、部分旗多様体 G/P は射影多様体であるから、その大域的な正則関数は定数しかなく、正則関数環を考えていては G の表現論にとってあまり興味深い結論を得ることはできない。しかし、射影多様体には斉次関数環が自然に付随しており、斉次関数環上の G の表現を考えることができる。これを以下少し説明しよう。

まず G の有限次元既約表現で最高ウェイトが λ のものを考え、それを (π_λ, V_λ) と記す。また $v_\lambda \in V_\lambda$ を (ゼロでない) 最高ウェイトベクトルしよう。ベクトル空間 V_λ の射影化⁷を $\mathbb{P}(V_\lambda)$ とし、 v_λ の決める一次元部分空間を $[v_\lambda] \in \mathbb{P}(V_\lambda)$ と書く。このとき、 G は $\mathbb{P}(V_\lambda)$ に自然に作用するが、点 $[v_\lambda]$ の固定部分群は放物型部分群 (それを P と書くことにしよう) であって、軌道 $G \cdot [v_\lambda]$ は部分旗多様体 G/P に同型な滑らかな射影多様体である⁸。また、任意の放物型部分群 P は、 G による共役を除いて、ある既約表現 (π_λ, V_λ) からこのようにして得られる。そこで、以下、 $[v_\lambda]$ の固定部分群が上で考えていた P であるとして一般性を失わない。

⁷ベクトル空間 V の射影化とは、 V の一次元部分空間の全体に他ならない。もし $V = \mathbb{C}^n$ なら $\mathbb{P}(V)$ は $(n-1)$ 次元射影空間そのものである。

⁸このようにして旗多様体 G/P の射影空間への埋め込みが得られるが、この特別の場合が Grassmann 多様体の Plücker 埋め込みである。

このとき $X_\lambda = \overline{G \cdot v_\lambda} \subset V_\lambda$ とおくと、 X_λ はアフィン代数多様体であるが、これを原点を頂点とする G/P のアフィン錐と呼ぶ⁹。斉次関数環は $\mathbb{C}[X_\lambda]$ を意味しており、これは X_λ がアフィンであるから十分たくさんの関数を含んでいる。

さて、実は今の場合、アフィン錐 X_λ もまた球多様体であることがわかる。それには v_λ の (ゼロでない) 定数倍が G/P の開軌道を生成するようなボレル部分群の作用によって得られることを示せば十分だが、それは v_λ が最高ウェイトベクトルであることから従う。結果として、 G -加群 $\mathbb{C}[X_\lambda]$ は重複度自由に分解するが、実は次の定理が成り立つ。

定理 1.6 (Popov-Vinberg [PV72]). 上の設定と記号の下に、部分旗多様体 G/P のアフィン錐を X_λ と書くと、

$$\mathbb{C}[X_\lambda] \simeq \bigoplus_{k \geq 0} V_{k\lambda}^*$$

が成り立つ。ただし V_λ^* は V_λ の双対表現を表す。

2. 多重旗多様体

球作用あるいは球等質空間と多重旗多様体は密接に関係している。この節では、多重旗多様体を定義し、そのいくつかの性質を述べる。

2.1. 三重旗多様体. G は今まで通り、連結な簡約代数群とし、部分旗多様体を $\mathfrak{X}_P = G/P$ などと書くことにしよう。 P_1, P_2, P_3 を G の放物型部分群とする。このとき、3つの部分旗多様体の直積 $\mathfrak{X}_{P_1} \times \mathfrak{X}_{P_2} \times \mathfrak{X}_{P_3}$ を三重旗多様体と呼ぶ。

三重旗多様体 $X = \mathfrak{X}_{P_1} \times \mathfrak{X}_{P_2} \times \mathfrak{X}_{P_3}$ には、 G が対角的に作用しているが、この作用によって X が有限軌道であるかどうかは興味深い問題である。有限軌道を持つ時、三重旗多様体を有限型と呼ぶ。

有限型の三重旗多様体は、 G が A, C 型の際には Magyar-Weymann-Zelevinsky [MWZ99, MWZ00] によって分類されており、 B, D 型の場合には松木 [Mat10] による分類がある。

歴史的には、 P_1, P_2 が極大放物型部分群で P_3 がボレル部分群 B の時に Littelmann によって有限型の三重旗多様体が分類された ([Lit94])。これは球作用ともいささか関係があるので、詳しく説明しよう。

$P_3 = B$ がボレル部分群のときには

$$G \backslash \mathfrak{X}_{P_1} \times \mathfrak{X}_{P_2} \times \mathfrak{X}_B \simeq B \backslash \mathfrak{X}_{P_1} \times \mathfrak{X}_{P_2}$$

である¹⁰から、 G 軌道が有限であることと、 $\mathfrak{X}_{P_1} \times \mathfrak{X}_{P_2}$ 上に有限個の B -軌道があること、つまり $\mathfrak{X}_{P_1} \times \mathfrak{X}_{P_2}$ が球多様体であることは同値である。極大放物型部分群 P_1 はある単純ルート α_1 に対応している。これを説明するために少し記号を準備しよう。

G の極大トーラスを T とし、そのリー環を $\mathfrak{g}, \mathfrak{t}$ と書く。我々のボレル部分群 B はこの極大トーラスを含むとして一般性を失わない。 $(\mathfrak{g}, \mathfrak{t})$ によって定まるルート系を $\Delta = \Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{t})$ 、 B によって決まる正ルートの全体を Δ^+ とし、対応する単純ルート系を Π で表す。 B を

⁹アフィン錐は G/P の射影空間への埋め込みに依存している。

¹⁰一般に $G \backslash (G/K \times G/H) \simeq K \backslash G/H$ であることに注意せよ。

含む放物型部分群を標準的な放物型部分群と呼ぶ。標準的放物型部分群は Π の部分集合 J によって生成されるルート系がちょうど Levi 部分群になるようなものとして定まる。これを P_J と書く。 G の任意の放物型部分群は、 G による共役をのぞき、このようにして決まる標準的放物型部分群と一対一に対応している。

極大放物型部分群 P_1 は、 Π の極大真部分集合に対応しているが、それはある単純ルート α_1 に対し、 $\Pi \setminus \{\alpha_1\}$ の形をしている。このとき P_1 を α_1 に対応する極大放物型部分群と呼び表す。

さて、単純ルート Π の双対基底として基本ウェイトが定義されるが、 $\alpha_1 \in \Pi$ に対応する基本ウェイトを ϖ_1 と書こう。既に説明したように、 G の最高ウェイトが ϖ_1 の既約有限次元表現 V_{ϖ_1} に対して、ゼロでない最高ウェイトベクトル v_{ϖ_1} を取ると、射影空間の点 $[v_{\varpi_1}] \in \mathbb{P}(V_{\varpi_1})$ の固定部分群がちょうど P_1 となっている。また G/P_1 のアフィン錐 X_{ϖ_1} が V_{ϖ_1} 内にとれる。

極大放物型部分群 P_2 についても全く同じ記号 α_2, ϖ_2 を用いる。

ボレル部分群 B が二重旗多様体 $\mathfrak{X}_{P_1} \times \mathfrak{X}_{P_2}$ 上に有限個の軌道を持つとしよう。このとき、上のようにして考えたアフィン錐の直積 $X_{\varpi_1} \times X_{\varpi_2}$ 上には $\tilde{B} := B \times (\mathbb{C}^\times)^2$ が開軌道を持つことが容易にわかる。そこで簡約群 $\tilde{G} := G \times (\mathbb{C}^\times)^2$ を考えれば、 $\tilde{B}$ はそのボレル部分群であり、定理 1.5 を適用すれば、関数環 $\mathbb{C}[X_{\varpi_1} \times X_{\varpi_2}]$ 上には $\tilde{G}$ が重複度自由に作用している。群 $\tilde{G}$ のうち、トーラス部分 $(\mathbb{C}^\times)^2$ の作用は斉次関数環 $\mathbb{C}[X_{\varpi_1} \times X_{\varpi_2}] = \mathbb{C}[X_{\varpi_1}] \otimes \mathbb{C}[X_{\varpi_2}]$ 上の次数を指定し、定理 1.6 によって、斉次次数が (k, ℓ) である部分空間は表現としてちょうど $V_{k\varpi_1}^* \otimes V_{\ell\varpi_2}^*$ に一致する。したがってこのテンソル積表現は G の表現として重複度 1 で分解する。

これをまとめておこう。

定理 2.1. P_1, P_2 を極大放物型部分群でそれぞれ単純ルート α_1, α_2 に対応するものとし、 ϖ_1, ϖ_2 を基本ウェイトとする。三重旗多様体 $\mathfrak{X}_{P_1} \times \mathfrak{X}_{P_2} \times \mathfrak{X}_B$ が有限型であれば、任意の $k, \ell \geq 0$ に対して、テンソル積表現 $V_{k\varpi_1}^* \otimes V_{\ell\varpi_2}^*$ は G の表現として重複度 1 で分解する。

このようにして、Littelmann によって分類された有限型三重旗多様体 $\mathfrak{X}_{P_1} \times \mathfrak{X}_{P_2} \times \mathfrak{X}_B$ の表現論的意味づけが得られた。

2.2. 対称対の二重旗多様体. P を G の放物型部分群とし、 Q を K の放物型部分群とする。ここでは二種類の旗多様体を考えるので、 G/P を今までのように $\mathfrak{X}_P$ で表し、 K/Q を $\mathcal{Z}_Q$ で表すことにしよう。

定義 2.2. $\mathfrak{X}_P \times \mathcal{Z}_Q = G/P \times K/Q$ を対称対の二重旗多様体と呼ぶ。 $\mathfrak{X}_P \times \mathcal{Z}_Q$ には K が対角的に作用しているが、この作用による K の軌道が有限個のとき、 $\mathfrak{X}_P \times \mathcal{Z}_Q$ を有限型という。

有限型の二重旗多様体上の軌道の分類や、有限型であるための条件については本講演集の落合啓之氏の原稿を参照されたい。この報告でも必要なことを § 3 でまとめるが、この節では、 $Q = B_K$ が K のボレル部分群の場合に球作用と二重旗多様体の関係について述べよう。なお、§ 4 でこの話題を異なる観点から再び取り上げる。

自然な全単射 $K \backslash \mathfrak{X}_P \times \mathcal{Z}_{B_K} \simeq B_K \backslash G/P$ が存在するから、二重旗多様体 $\mathfrak{X}_P \times \mathcal{Z}_{B_K}$ が有限型であることと、 $\mathfrak{X}_P = G/P$ が K の作用に関して球等質多様体であることは同値である。いま、放物型部分群 P に対して、 G の最高ウェイトが λ の既約有限次元表現であって、 P が $[v_\lambda] \in \mathbb{P}(V_\lambda)$ の固定部分群になっているものを取る (§ 1.5 参照)。

$\mathfrak{X}_P$ が K -球多様体であるとする、 $\mathfrak{X}_P$ のアフィン錐 X_λ は $K \times \mathbb{C}^\times$ の作用によってやはり球多様体である。正則関数環 $\mathbb{C}[X_\lambda] \simeq \bigoplus_{k \geq 0} V_{k\lambda}^*$ は $\mathbb{C}^\times$ の作用によって分解すると、ちょうど斉次成分 $V_{k\lambda}^*$ が同型成分となる。したがって、定理 1.5 によって、 $V_{k\lambda}^*|_K$ は K の表現として重複度自由に分解する。これをまとめると

定理 2.3. 二重旗多様体 $\mathfrak{X}_P \times \mathcal{Z}_{B_K}$ が有限型であるとする。このとき、 P に付随して G の最高ウェイトが λ の有限次元既約表現 V_λ を上のようにとると、任意の $k \geq 0$ に対して G の表現 $V_{k\lambda}^*$ は K -加群として重複度自由に分解する。

3. 二重旗多様体上の軌道の分類

二重旗多様体 $\mathfrak{X}_P \times \mathcal{Z}_Q$ 上の軌道の分類について必要な部分を以下簡単に復習しておく。詳しくは本講演集の落合啓之氏の報告を参照してほしい。

まず K の放物型部分群 Q に対して、 G の θ -安定な放物型部分群 P' であって、 $P' \cap K = Q$ となるものを取る。任意の Q に対してこのような放物型部分群をいつでも選ぶことが可能である。

ボレル部分群 B は G -共役を取ることににより θ -安定として一般性を失わない。すると、このとき $B_K = B \cap K$ は K のボレル部分群である。以下、下記に現れる放物型部分群は、特に断らない限り B または B_K を含む標準的な放物型部分群を考える。

放物型部分群 P, P' には既に説明したように単純ルート系 Π の部分集合が対応している¹¹が、それを $J, J' \subset \Pi$ とする。これを強調したいときには $P_J, P_{J'}$ などと書くことにしよう。また

$$P = LU, \quad P' = L'U'$$

を標準的な Levi 分解とする。つまり L は J より生成された部分ルート系 Δ_J に属するルート空間から生成された部分群であり、同様に L' は J' に対応するとする。 U, U' はそれぞれ P, P' の冪単根基である。

P の Levi 部分群の Weyl 群は J から生成されたルート系の Weyl 群に一致する。これを W_P または W_J で表す。 ${}^J W^{J'}$ を両側剰余類 $W_J \backslash W / W_{J'}$ の最短代表元系としよう。つまり

$${}^J W^{J'} = \{w \in W \mid w^{-1}(\Delta_J^+) \subset \Delta^+, w(\Delta_{J'}^+) \subset \Delta^+\}$$

である。 $w \in {}^J W^{J'}$ に対して

$$P_{L'}(w) := w^{-1}Pw \cap L' \quad L'_K := L' \cap K$$

とおく。すると $P_{L'}(w)$ は L' の放物型部分群であり、 $L'_K = (L')^\theta$ は L' の対称部分群である。したがって

$$V(w) := P_{L'}(w) \backslash L' / L'_K$$

¹¹正ルート系はボレル部分群 B に合わせて取るのであった。

とおくと、KGB 理論より $V(w)$ は有限集合である。我々は L' から代表元系を選んで $V(w) \subset L'$ とみなすことにする。

さらに $w \in {}^J W^{J'}, v \in V(w)$ に対して

$$\begin{cases} \mathcal{U}(w, v) := (U' \cap P(wv)) \backslash U' / (U' \cap K) & : \text{冪単群の両側剰余類} \\ L'_K(w, v) := L' \cap K \cap P(wv) \subset L'_K \end{cases}$$

とおく。ここで $g \in G$ に対して $P(g) := g^{-1}Pg \in \mathfrak{X}_P$ は P と共役な放物型部分群を表す。一般に $L'_K(w, v)$ はもはや簡約群でも可解群でもないが、冪単元 (の代表元系) からなる多様体 $\mathcal{U}(w, v)$ に随伴作用で働いている。そこで、その商空間を $\mathcal{U}(w, v) / \text{Ad}(L'_K(w, v))$ で表す。

以上の記号の下に次の定理が成り立つ。

定理 3.1 (He-N-Ochiai [HNO11]). 次の軌道空間の間の全単射が成り立つ。

$$K \backslash \mathfrak{X}_P \times \mathcal{Z}_Q \simeq \coprod_{w \in {}^J W^{J'}} \coprod_{v \in V(w)} \mathcal{U}(w, v) / \text{Ad}(L'_K(w, v))$$

この定理より次の系が容易に従う。

系 3.2. $P(g) = g^{-1}Pg$ とおくと、 $\mathfrak{X}_P \times \mathcal{Z}_Q$ が有限型である必要十分条件は、任意の $g \in PWL'$ に対して

$$\# \left((U' \cap P(g)) \backslash U' / U'_K \right) / \text{Ad}(L'_K \cap P(g)) < \infty$$

が成り立つことである。

4. 有限型二重旗多様体と球表現

定理 3.1 を $Q = B_K \subset K$ がボレル部分群で $\text{rank } G = \text{rank } K$ の場合に考えてみよう。 G のボレル部分群 B の Levi 分解を $B = TU_0$ と書く。 $(T$ は極大トーラス, U_0 は極大冪単部分群である。)

このとき、 $P' = B$ と取ることができるから、 $L' = T$ で、 $\text{rank } G = \text{rank } K$ の仮定より $L'_K = T$ でもある。また $J' = \emptyset$ (空集合) となるから、 ${}^J W^{J'}$ の代わりに ${}^J W$ と書くことにする。すると $L' = T = L'_K$ だから

$$V(w) = P_{L'}(w) \backslash L' / L'_K = \{*\}$$

は $w \in {}^J W$ によらず、常に一点のみからなる。代表元としては単位元 e を取ってもよいので次の系を得る。

系 4.1. $\text{rank } G = \text{rank } K$ を仮定する。 B_K を K のボレル部分群とすると、軌道空間の全単射

$$K \backslash \mathfrak{X}_P \times \mathcal{Z}_{B_K} \simeq \coprod_{w \in {}^J W} \left((U_0 \cap P(w)) \backslash U_0 / (U_0 \cap K) \right) / \text{Ad } T$$

が成り立つ。特に $\mathfrak{X}_P \times \mathcal{Z}_{B_K}$ が有限型であることと、任意の $w \in {}^J W$ に対して

$$\# \left((U_0 \cap P(w)) \backslash U_0 / (U_0 \cap K) \right) / \text{Ad } T < \infty$$

が成り立つことは同値である。

この有限性の同値条件は、Brion-Vinberg の定理 1.4 から、最長元 $w = w^\circ$ だけで確かめればよい。軌道の有限性は開軌道の存在と同値だからである。最長元に対して、 $P(w^\circ) = (w^\circ)^{-1} P w^\circ = P^\circ$ と書き、その Levi 分解を $P^\circ = L^\circ U^\circ$ と表す。すると、 $U_0 \cap P(w^\circ) = L^\circ \cap U_0$ が L° の極大冪単部分群になっていることにも注意しよう。したがって $\mathfrak{X}_P \times \mathcal{Z}_{B_K}$ が有限型であることと、

$$\# \left((U_0 \cap L^\circ) \backslash U_0 / (U_0 \cap K) \right) / \text{Ad } T < \infty$$

が同値になるが、実はこれをもっと簡単に扱いやすい形に書くことができる。

まず $J \subset \Pi$ に対して

$$J^\circ = -w^\circ(J) \quad (4.1)$$

とおき、

$$\Phi_{J^\circ} = \Delta^+ \setminus (\Delta_{J^\circ}^+ \cup \Delta_{\theta(J^\circ)}^+), \quad V = \prod_{\alpha \in \Phi_{J^\circ}} U_\alpha$$

と定義する¹²。ただし、 U_α はルート α に対応するルート空間 $\mathfrak{g}_\alpha$ をリー環に持つ 1 次元の冪単部分群である。 V は U_0 の θ -安定な正規部分群となる。 $V_K = V^\theta = V \cap K$ とおこう。

補題 4.2. 埋め込み $V \subset U_0$ は、次の全単射を誘導する。

$$(V/V_K) / \text{Ad}(L^\circ \cap U_0 \cap K) \xrightarrow{\sim} (U_0 \cap L^\circ) \backslash U_0 / (U_0 \cap K)$$

この補題の証明は技術的に複雑で、それほど簡単でない。この報告では、詳細は省かざるを得ないが、より簡明な証明が望まれるところである。

さて、補題において、 $L^\circ \cap U_0 \cap K$ は $L_K^\circ = L^\circ \cap K$ の極大冪単部分群であり、 $T \cdot (L^\circ \cap U_0 \cap K)$ は L_K° のボレル部分群 $B_{L_K^\circ}$ になる。補題より、

$$\#(V/V_K) / \text{Ad}(B_{L_K^\circ}) = \# \left((U_0 \cap L^\circ) \backslash U_0 / (U_0 \cap K) \right) / \text{Ad } T$$

だから、右辺が有限であることと、左辺が有限であること、つまり V/V_K 上の共役作用に関する $B_{L_K^\circ}$ -軌道の有限性は同値である。簡約群 L_K° は V/V_K に共役で働いているので、これは V/V_K が L_K° の共役作用に関して球多様体であることを意味する。

リー環の方へ話を翻訳すれば、これは次のように言い換えることができる。

$\mathfrak{V} = \bigoplus_{\alpha \in \Phi_{J^\circ}} \mathfrak{g}_\alpha$ とおき、 $\mathfrak{V}^{-\theta} := \{v \in \mathfrak{V} \mid \theta(v) = -v\}$ を θ の (-1) -固有空間とする。

定理 4.3 (He-N-Ochiai [HNO11]). $\text{rank } G = \text{rank } K$ を仮定する。このとき、次の 3 つの条件 (1)–(3) はすべて同値である。

¹²いまは $\text{rank } G = \text{rank } K$ を仮定しており、 $T \subset K$ と取れるから、 $\theta(J^\circ) = J^\circ$ である。ここでは、一般の場合も念頭に置いて、このように書いておく。

- (1) 二重旗多様体 $\mathfrak{X}_P \times \mathcal{Z}_{B_K}$ は有限型である。
- (2) 旗多様体 $\mathfrak{X}_P = G/P$ は K の左からの積による作用に関して球多様体である。
- (3) ベクトル空間 $\mathfrak{V}^{-\theta}$ は L_K° の随伴作用に関して重複度自由な表現である。つまり $\mathfrak{V}^{-\theta}$ 上の多項式環は、 L_K° の表現として重複度 1 で分解する。

単純群の表現がいつ重複度自由になるかは Kac による分類 [Kac80] がある。簡約代数群 L_K° は一般に単純とは限らないが、「表現がいつ重複度自由な表現か」という問題は、具体的な場合にはそれほど難しくないのではないと思われる。

5. 三重旗多様体の場合

三重旗多様体は、対称対の二重旗多様体の特別な場合とみなすことができる。それには次のように考えればよい。

今まで考えてきた簡約代数群 G に対して、 $\mathbb{G} = G \times G$, $\mathbb{K} = \text{diag } G$ とおく。このとき $\mathbb{K}$ は $\mathbb{G}$ の包含的自己同型 $\theta(g_1, g_2) = (g_2, g_1)$ に関する固定部分群となっており、 $(\mathbb{G}, \mathbb{K})$ は対称対である。同型 $\mathbb{G}/\mathbb{K} \simeq G$ が成り立つので、この対称対を群多様体に付随した対称対と呼ぶ。

三重旗多様体 $\mathfrak{X}_{P_1} \times \mathfrak{X}_{P_2} \times \mathfrak{X}_{P_3}$ に対して、 $\mathbb{P} = P_1 \times P_2$ とおくと、これは $\mathbb{G}$ の放物型部分群である。また $P_3 \simeq \text{diag } P_3 \subset \text{diag } G = \mathbb{K}$ により、 P_3 を $\mathbb{K}$ の放物型部分群とみなすことができる。これを $\mathbb{Q} = \text{diag } P_3$ と書こう。すると

$$\mathfrak{X}_{P_1} \times \mathfrak{X}_{P_2} \times \mathfrak{X}_{P_3} \simeq (G \times G)/(P_1 \times P_2) \times (G/P_3) \simeq \mathbb{G}/\mathbb{P} \times \mathbb{K}/\mathbb{Q}$$

となり、 G の対角的作用は、 $\mathbb{K}$ の対角的作用に対応する。このとき、直積の第一成分は $\mathbb{G} = G \times G$ の部分旗多様体、第二成分は $\mathbb{K} = \text{diag } G$ の部分旗多様体と解釈することができる。

さて、 $P_3 = B$ がボレル部分群の時は、§ 4 で扱った場合に相当しているものの、そこで課した階数の条件 $\text{rank } G = \text{rank } K$ は、ここでは成り立っていない。しかし、この場合にも軌道の有限性の問題は、表現の重複度自由性に帰着することができる。詳細を省き、結果だけ紹介しよう。

P_i ($i = 1, 2$) に対応する単純ルートの部分集合を J_i ($i = 1, 2$) と書く。また $\mathbb{J} = J_1 \times J_2 \subset \Pi \times \Pi$ に対して、

$$\begin{aligned} \mathbb{J}^\circ &= J_1^\circ \times J_2^\circ \\ \Phi_{\mathbb{J}^\circ} &= \Delta^+ \setminus (\Delta_{J_1^\circ}^+ \cup \Delta_{J_2^\circ}^+) \end{aligned}$$

とおく (J° については式 (4.1) 参照)。 $L_{J_1^\circ \cap J_2^\circ}$ を $J_1^\circ \cap J_2^\circ$ によって生成されたルート系を持つ Levi 部分群としよう。

定理 5.1 (He-N-Ochiai [HNO11]). 三重旗多様体 $\mathfrak{X}_{P_1} \times \mathfrak{X}_{P_2} \times \mathfrak{X}_B$ が有限型であるための必要十分条件は

$$\bigoplus_{\alpha \in \Phi_{\mathbb{J}^\circ}} \mathfrak{g}_\alpha$$

が $L_{J_1^\circ \cap J_2^\circ}$ の随伴表現として重複度自由であることである。

6. 旗多様体上の閉軌道の余法束とファイバーの概均質性

最後に二重旗多様体 $\mathfrak{X}_P \times \mathcal{Z}_Q$ において P がボレル部分群の場合を考えよう。この場合、 $\mathfrak{X}_B \times \mathcal{Z}_Q$ が有限型であるのは、要するに G/Q が球等質空間になる場合であり、 B が G/Q 上に閉軌道を持つことと、有限軌道であることが同値である。

$P' = L'U'$ を § 3 で取ったように $Q = P' \cap K$ となるような θ -安定な放物型部分群とする。すると、軌道の分類定理 3.1 より、 G/Q が G の左からの作用によって球等質空間ならば、 U'/U'_K は $\text{Ad } L'_K$ の作用で球多様体になることがわかる。ここで $Q = L'_K U'_K$ は Q の Levi 分解になっていることに注意しよう。

リー環 $\mathfrak{g}$ の (複素化された) Cartan 分解を $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{s}$ で表せば、代数多様体として $U'/U'_K \simeq \mathfrak{u}' \cap \mathfrak{s}$ であるが、この同型は $\text{Ad } L'_K$ -同変である。したがって次の定理を得る。

定理 6.1 (He-N-Ochiai [HNO11]). 上の記号の下に、二重旗多様体 $\mathfrak{X}_B \times \mathcal{Z}_Q$ が有限型ならば、 $\mathfrak{u}' \cap \mathfrak{s}$ は L'_K の随伴作用に関して、重複度自由な表現である。したがって、特に L'_K の概均質ベクトル空間である。

さて、上で取った $Q = P' \cap K$ となるような放物型部分群 P' を考えると、 $\mathfrak{X}_{P'} = G/P'$ において P' を通る K -軌道は $K/P' \cap K = K/Q$ と同型であって、閉軌道になる。この軌道を $\mathcal{O}$ で表すと、余接多様体 $T^*\mathfrak{X}_{P'}$ における $\mathcal{O}$ の余法束 $T^*\mathcal{O}$ は $\mathcal{O} \simeq \mathcal{Z}_Q$ 上のベクトル束であり、そのファイバーはちょうど $\mathfrak{u}' \cap \mathfrak{s}$ である。このファイバーには Q が自然に作用しているが、 L'_K はその Levi 部分群となっている。上の定理より、 $\mathfrak{X}_B \times \mathcal{Z}_Q$ が有限型になるような Q に対しては、ファイバーへの Q の作用もまた概均質的であることがわかる。

一方、閉軌道 $\mathcal{O}$ 上の余法束 $T^*\mathfrak{X}_{P'}$ に対して、ファイバーへの Q の作用が概均質的でない例が坂田圭司-山下博 [SY05] や Barchini-Zierau [BZ08] によって知られており、このことは離散系列表現の随伴多様体の構造や対応する閉軌道の余法束の構造と絡んで興味深いと思われる。

REFERENCES

- [Bri89] Michel Brion, *Spherical varieties: an introduction*, Topological methods in algebraic transformation groups (New Brunswick, NJ, 1988), Progr. Math., vol. 80, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1989, pp. 11–26.
- [BZ08] L. Barchini and R. Zierau, *Certain components of Springer fibers and associated cycles for discrete series representations of $\text{SU}(p, q)$* , Represent. Theory **12** (2008), 403–434, With an appendix by Peter E. Trapa.
- [HNO11] Xuhua He, Kyo Nishiyama, and Hiroyuki Ochiai, *Double flag varieties of finite type and parametrization of orbits*, 2011, notes (preprint in preparation).
- [Kac80] V. G. Kac, *Some remarks on nilpotent orbits*, J. Algebra **64** (1980), no. 1, 190–213.
- [Lit94] Peter Littelmann, *On spherical double cones*, J. Algebra **166** (1994), no. 1, 142–157.
- [Mat10] T. Matsuki, *An example of orthogonal triple flag variety of finite type*, ArXiv/1011.6468 (2010).
- [MWZ99] Peter Magyar, Jerzy Weyman, and Andrei Zelevinsky, *Multiple flag varieties of finite type*, Adv. Math. **141** (1999), no. 1, 97–118.
- [MWZ00] ———, *Symplectic multiple flag varieties of finite type*, J. Algebra **230** (2000), no. 1, 245–265.

- [NO11] Kyo Nishiyama and Hiroyuki Ochiai, *Double flag varieties for a symmetric pair and finiteness of orbits*, J. Lie Theory **21** (2011), no. 1, 79–99.
- [PV72] V. L. Popov and È. B. Vinberg, *A certain class of quasihomogeneous affine varieties*, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. **36** (1972), 749–764.
- [Vin86] È. B. Vinberg, *Complexity of actions of reductive groups*, Funktsional. Anal. i Prilozhen. **20** (1986), no. 1, 1–13, 96.
- [VK78] È. A. Vinberg and B. N. Kimel'fel'd, *Homogeneous domains on flag manifolds and spherical subsets of semisimple Lie groups*, Funktsional. Anal. i Prilozhen. **12** (1978), no. 3, 12–19, 96.
- [SY05] 坂田圭司・山下博, リー代数の対称対に付随するリチャードソン軌道, 2005, 日本数学会 2005 年度年会 (日本大学) 函数解析学分科会アブストラクト.

DEPARTMENT OF PHYSICS AND MATHEMATICS, AOYAMA GAKUIN UNIVERSITY, FUCHINOBE 5-10-1,
CHUO, SAGAMIHARA 252-5258, JAPAN

E-mail address: kyo@gem.aoyama.ac.jp