対称対の有限型二重旗多様体

落合啓之 (Hiroyuki Ochiai)

九州大学マス・フォア・インダストリ研究所 (Kyushu Univ. IMI)

概 要

簡約代数群 G の部分旗多様体と、その対称部分群 K の部分旗多様体の直積を対称対の２重旗多様体と呼ぶことにする。２重旗多様体への K の対角的な作用が有限個の軌道を持つのはどんな部分旗多様体の組のときか、また、その場合に軌道分解はどうなるか、という問題を考える。この講演は、西山享、近藤健介の講演へと引き続く、概説的な部分を担当する。この講演の内容は、上記２名ならびに、谷口健二、Xuhua He との共同研究の内容に基づく。

1 Prolog

リーマン球面 $\mathbb{P}^1$ 上の異なる 3 点は、ある射影変換によって、$0, 1, \infty$ の 3 点に写すことができる。この事実は、『$X = \{(z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \mid z_1 \neq z_2 \neq z_3 \neq z_1\}$ は $PSL(2, \mathbb{C})$ の等質空間である』と述べることができる。$\overline{X} = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ とすると、$\overline{X}$ は X の一つのコンパクト化である。しかも $\overline{X}$ には $PSL(2, \mathbb{C})^3$ が推移的に作用している。ここに、等質空間を部分群に制限すると作用が推移的でなくなるため軌道に分かれるという現象と、小さな群の等質空間に何かを付加することでより大きな対称性が生まれるという現象を、同時に見て取れる。すなわち、最近でも小林スクールの一連の講演でも強調されているところであるが、対称性の破れと隠れた対称性の発見は基本であり、同じものの両面である。

同じものなのであるが、問題の見かけはだいぶ異なる。等質空間を部分群の作用で軌道分解する方は、できるかどうかは別にして、問題の設定は簡明である。Bruhat 分解の対称対への遥かなる一般化として、松木敏彦の一連の仕事もなじみ深いものである。我々の問題の設定 (Problem 3) もこちらの範疇にある。一方で、対称性を増やす方は、一般論は乏しい。内部から境界は見えないので、境界や外側として何を付け加えるべきかを与える指針がないのである。上に乗っている幾何構造を手がかりにする、Hermite 対称空間の Harish-Chandra 埋め込みや因果対称空間 (金行) への拡張、Jordan 代数における共形変換群の登場、大島コンパクト化 [8, pages 360–361 の図] や素晴らしいコンパクト化 (DeContini-Procesi) などは組織的な例であろう。旗多様体はコンパクトであり、有限軌道を仮定すると開軌道を持つ。従ってその開軌道である等質空間のコンパクト化を与えていることには違いない。しかし、この観点からの理解には至っていないというのが正直なところである。

2 Introduction

G を連結複素簡約線形代数群とする。θ を G の involution, すなわち、位数 2 の自己同型写像とする。K を G の θ による固定部分群 $K = G^\theta = \{g \in G \mid \theta(g) = g\}$ とする。これを G の対称部分群という。

よくある例は

Example 1. $G = GL(p+q)$, $K = GL(p) \times GL(q)$.

Example 2. $G = G' \times G'$, $K = \mathrm{diag}\ G' = \{(g', g') \mid g' \in G'\}$.

前者を不定値ユニタリ群 $U(p,q)$ の場合、AIII 型の場合などと呼ぶことがある。後者を群多様体の場合、群の場合などと呼ぶことがある。

一般の設定に戻る。$P \subset G, Q \subset K$ をそれぞれ放物型部分群とする。考えるのは、$(G/P)\times(K/Q)$ というそれぞれの部分旗多様体の直積である。これには、$G \times K$ が推移的に作用しているが、部分群 diag $K \subset G \times K$ に作用を制限したものが考察の対象である。

Problem 3. 軌道の個数が有限個 $\sharp(K\backslash((G/P) \times (K/Q))) < \infty$ となるのは、G, K, P, Q がどのような場合か？その場合に軌道分解を具体的に与えよ。

群多様体で G' が一般線形群や symplectic 群の場合が Magyar-Weyman-Zelevinsky の考えた設定である。さらに Q が K の mirabolic 部分群の場合は Travkin による Robinson-Shensted-Knuth 対応の拡張版まである。こういったことが「対称対の場合にはどうなるの？」と問題を一般化したのが、西山享である。問題の背景などに関しては、昨年度の表現論シンポジウムでも講演したので、それ [7] も参照していただくこととして、ここではそれとはあまり重複が多くならないようにまとめる。

第 3 節では、まず最初は有限性を仮定せずに、両側剰余類 $K\backslash((G/P) \times (K/Q))$ をどのように記述できるか、いくつか仮定をおいた上で考察する。そして、その記述を用いて、有限性の判定条件や十分条件を挙げる、という方針で進む。第 4 節では、一般線形群の有限型の 3 重旗多様体の分類と軌道分解を [4] に基づいて紹介する。そして、両者の方法の対比を例で見る。

3 軌道のパラメータ付け

3.1 記号

簡単のため K は連結であると仮定する。MWZ では軌道分解に箙の表現論の考え方を用いているが、我々はルート系を使う。その辺りの記号を準備する。$T \subset B \subset G$ を θ-stable な maximal torus ならびに Borel 部分群とする。$\Delta \supset \Delta^+ \supset \Pi$ をそれぞれ、T に対する G のルート系、B に対応する正ルートの全体、単純ルートの全体とする。問題の設定に出てきた G の放物型部分群 P は B を含むように取り、また、B を含むような θ-stable な放物型部分群 $P' \subset G$ を用いて、$Q = P' \cap K$ と表す。$P = LU$, $P' = L'U'$ を Levi 分解とする。L', U' は θ-stable に取ってお

く。$B_K = B \cap K$, $L'_K = L' \cap K$, $U'_K = U' \cap K$ と定義する。B_K は K の Borel 部分群となり、$Q = L'_K U'_K$ は Levi 分解を与える。図式として表すと、

$$\begin{array}{cccccccc} K & \supset & Q & = & L'_K U'_K & \supset & L'_K, U'_K \\ \cap & \square & \cap & & \cap & \square & \cap \\ G & \supset & P' & = & L'U' & \supset & L', U' \end{array}$$

3.2 Bruhat 分解

包含関係 $Q \subset P'$ が誘導する自然な全射 Φ を考える。

$$\begin{array}{ccccc} K\backslash((G/P) \times (K/Q)) & \xrightarrow{\sim} & G\backslash((G/P) \times (G/Q)) & \xrightarrow{\sim} & P\backslash G/Q \\ & & \downarrow & & \Phi \downarrow \\ & & G\backslash((G/P) \times (G/P')) & \xrightarrow{\sim} & P\backslash G/P' \end{array}$$

W を G の T に対する Weyl 群とする。Bruhat 分解は $B\backslash G/B$ が有限集合であり W によってパラメータ付けされることを示している。P, P' は B を含むので、$B\backslash G/B \to P\backslash G/P'$ は全射であり、従って $P\backslash G/P'$ の代表系として、W の部分集合を取ることができる。長さに関する最短元を選ぶことが多い。さらに、$W = N_G(T)/T$ と見て、W の元はしばしば $N_G(T) \subset G$ の元で代表されていると考える。すなわち、有限部分集合 $W_{P,P'} \subset G$ が存在して、$G = \coprod_{w \in W_{P,P'}} PwP'$ と disjoint union に書けている。代表元を取って議論した場合は、代表元の取り方によらないことに注意が必要な命題がある。

3.3 Φ のファイバー

一点 $P\backslash(PwP')/P'$ の逆像 $\Phi^{-1}(P\backslash(PwP')/P') = P\backslash(PwP')/Q$ の記述に移ろう。まず、原点の移動を行う。$P^w = w^{-1}Pw$ とする。一般に部分集合 $H \subset G$ に対して、$P^w_H = (w^{-1}Pw) \cap H$ と定める。

Lemma 4.
- $P^w_{P'}\backslash P' \xrightarrow{\sim} P^w\backslash(P^w P') \xrightarrow{\sim} P\backslash(PwP')$ という P'-*equivariant* な自然な同型がある。一つめの写像は自然な包含の誘導するもの、２つめの写像は左からの w のかけ算 $g \mapsto wg$ が誘導するものである。
- $P^w_{P'}\backslash P'/Q \xrightarrow{\sim} P\backslash(PwP')/Q$ という自然な全単射が存在する。

次に進む前に、記号が煩瑣になるので P' の部分群のいくつかを図式化しておく。

$$\begin{array}{ccccccc} Q & \subset & U'Q & \subset & P' & \supset & P^w_{P'} \\ \| & & \| & & \| & & \| \\ U'_K L'_K & \subset & U'L'_K & \subset & U'L' & \supset & P^w_{U'} P^w_{L'} \end{array}$$

なお $L'_K \subset L'$ は U' を normalize するので、$U'L'_K = U'Q$ は P' の部分群である。また、$P^w_{P'} = P^w_{U'}P^w_{L'}$ である。

Lemma 5. 自然な包含写像が誘導する写像 $P^w_{L'}\backslash L'/L'_K \xrightarrow{\sim} P^w_{P'}\backslash P'/(U'L'_K)$ は全単射である。

Definition 6. $\Psi : P\backslash(PwP')/Q \twoheadrightarrow P^w_{L'}\backslash L'/L'_K$ を、写像の合成

$$P\backslash(PwP')/Q \xleftarrow{\sim} P^w_{P'}\backslash P'/Q \twoheadrightarrow P^w_{P'}\backslash P'/(U'Q) \xleftarrow{\sim} P^w_{L'}\backslash L'/L'_K$$

によって定まる全射とする。

この写像 Ψ の行き先は記述可能である。

Lemma 7. $P^w_{L'}$ は L' の放物型部分群であり、L'_K は L' の対称部分群である。

したがって、“KGB 理論により” [3] $P^w_{L'}\backslash L'/L'_K$ は有限集合であり、そのパラメータ付けも比較的よくわかっていると言ってよい。$\mathcal{V}(w) \subset L'$ をその適当な代表系とする。すなわち、$L' = \coprod_{v\in\mathcal{V}(w)} P^w_{L'}vL'_K$ と disjoint union に書けているとしてよい。

3.4 Ψ のファイバー

写像 $\Psi : P\backslash(PwP')/Q \twoheadrightarrow \mathcal{V}(w)$ のファイバーを考える。一点 $P^w_{L'}\backslash(P^w_{L'}vL'_K)/L'_K$ の逆像 $\Psi^{-1}(P^w_{L'}\backslash(P^w_{L'}vL'_K)/L'_K) = P^w_{P'}\backslash(P^w_{P'}vU'Q)/Q$ を記述しよう。やはり原点の移動によって、

Lemma 8.
- 写像 $g \mapsto vg$ によって誘導される $P^{wv}_{P'}\backslash(P^{wv}_{P'}U'Q) \xrightarrow{\sim} P^w_{P'}\backslash(P^w_{P'}vU'Q)$ という $U'Q$*-equivariant* な自然な同型がある。
- $P^{wv}_{P'}\backslash(P^{wv}_{P'}U'Q)/Q \xrightarrow{\sim} P^w_{P'}\backslash(P^w_{P'}vU'Q)/Q$ という自然な同型がある。
- $P^{wv}_{U'}\backslash U'/U'_K \twoheadrightarrow P^{wv}_{P'}\backslash(P^{wv}_{P'}U'Q)/Q$ という自然な全射がある。

この最後の写像は一般には単射ではない。その単射でない度合いは別の群の作用でコントロールできるのである。Levi part への射影 $P' \twoheadrightarrow L'$ が群準同型であること、$P^{wv}_{P'} = P^{wv}_{U'}P^{wv}_{L'}$, ならびに $P^{wv}_{L'} \cap L'_K = P^{wv}_{L'_K}$ であることに注意しておく。

Lemma 9.
- $P^{wv}_{L'_K}$ は $P^{wv}_{U'}$ ならびに U'_K を *normalize* する。したがって、共役による $P^{wv}_{L'_K}$ の $P^{wv}_{U'}\backslash U'/U'_K$ への作用 $u \mapsto kuk^{-1}$ は *well-defined* である。この作用を $\mathrm{Ad}(P^{wv}_{L'_K})$ と書く。
- $(P^{wv}_{U'}\backslash U'/U'_K)/\,\mathrm{Ad}(P^{wv}_{L'_K}) \xrightarrow{\sim} P^{wv}_{P'}\backslash(P^{wv}_{P'}U'Q)/Q$ という自然な全単射が存在する。

U' はリー環と代数的に同一視することができ、その商空間 $P^{wv}_{U'}\backslash U'/U'_K$ への $P^{wv}_{L'_K}$ の作用は線形表現である。この表現によって、軌道は有限個になるとは限らないが、有限個になる場合は、必然的に概均質ベクトル空間になる。

3.5　軌道のパラメータ付け

以上をまとめると次のようになる。

Theorem 10. $K\backslash((G/P)\times(K/Q)) \xrightarrow{\sim} \coprod_{w\in W_{P,P'}} \coprod_{v\in\mathcal{V}(w)} (P^{wv}_{U'}\backslash U'/U'_K)/\operatorname{Ad}(P^{wv}_{L'_K})$.

いわば、このパラメータ付けは $K\backslash((G/P)\times(K/Q))$ を「Bruhat 分解を低層、KGB 分解を中層、表現を上層とする三層構造」によって理解していることになる。この分解は、軌道の有限性を仮定しなくても成立している。

Corollary 11. $(G/P)\times(K/Q)$ が有限型である必要十分条件は任意の $g\in \bigcup_{w\in W_{P,P'}} PwL'$ に対して、$P^g_{U'}\backslash U'/U'_K$ が有限個の $\operatorname{Ad}(P^g_{L'_K})$ 軌道を持つことである。

残念ながら、ここで与えた有限性のための判定条件はそれほど易しいものではなく、例えば、[4] の分類をこの方法で再証明することはいまのところできていない。

4　triple flag variety

Magyar-Weyman-Zelevinsky の 3 重旗多様体の状況を survey する。

4.1　群多様体の設定

前節の G,K,P,Q,P' などをすべて白太字体 $\mathbb{G},\mathbb{K},\mathbb{P},\mathbb{Q},\mathbb{P}'$ で表す。そして改めて G を連結簡約複素線形代数群とする (Example 2 で G' と書いたものである)。$\mathbb{G}=G\times G$ とする。$\theta(g_1,g_2)=(g_2,g_1)$ と定める。$\mathbb{K}=\operatorname{diag}G$ となる。これをしばしば G と同一視する。$\mathbb{G}$ の放物型部分群 $\mathbb{P}=P_1\times P_2$ の形である。ここで P_1,P_2 は G の放物型部分群。$\mathbb{K}$ の放物型部分群は、G の放物型部分群 P_3 を用いて $\mathbb{Q}=\operatorname{diag}P_3$ と表せる。$\mathbb{P}'=P_3\times P_3$ と定義すると、$\mathbb{P}'\cap\mathbb{K}=\mathbb{Q}$ が成立している。このとき、$(\mathbb{G}/\mathbb{P})\times(\mathbb{K}/\mathbb{Q})=(G/P_1)\times(G/P_2)\times(G/P_3)$ となり、これが 3 重旗多様体である。

4.2　ADE+α 分類

G が一般線形群のとき、3 重旗多様体が有限型になる場合は [4] によって分類されていて、$A_{q,r}$, D_{r+2}, E_6, E_7, E_8, $E^{(a)}_{r+3}$, $E^{(b)}_{r+3}$, $S_{q,r}$ である。このうち、特にそのうちのひとつ、例えば P_3 が Borel になる場合は以下のものである。

($A_{q,r}$) $P_1=G$ のとき。このとき、3 重ではなく 2 重旗多様体。軌道分解は Bruhat 分解。

(D_{r+2}) P_1,P_2 が共に極大放物型部分群のとき。

($E^{(a)}_{r+3}$) P_1 が極大で Levi のどちらかのサイズが 2、P_2 の段数が 3 であるとき。

($E^{(b)}_{r+3}$) P_1 が極大、P_2 の段数が 3 で Levi のどれかのサイズが 1 であるとき。

($S_{q,r}$) P_1 が mirabolic のとき。

用語の定義を与えておくと、放物型部分群の Levi 部分群が $GL(n_1)\times\cdots\times GL(n_k)$ のとき、$n_i (i=1,\ldots,k)$ を Levi のサイズと呼び、k を段数と呼んでいる。一般線形群の放物型部分群なので、極大ということと段数が 2 ということは同値である。極大放物型部分群で Levi のどちらかのサイズが 1 のものを奇跡的放物型部分群 (mirabolic) という。

３つの放物型部分群の段数 p,q,r を用いて、一点から p,q,r 個の node の枝を持つ tree $T_{p,q,r}$ を作ることができる。例えば、$p=2,q=3,r=5$ の場合は E_8 型の Dynkin 図形ができる。分類におけるラベル ADE は、その Dynkin 図形に対応している。上付きの $^{(a)}$ や $^{(b)}$ は、段数だけでなくサイズにも制約条件がつくことを意味している。

4.3 indecomposable による軌道のパラメータ付け

結果を述べるために記号を固定する。p,q,r を自然数とする。composition $\mathbf{a}=(a_1,\ldots,a_p)\in\mathbf{Z}^p_{\geq 0}$ を加法的半群 $\mathbf{Z}^p_{\geq 0}$ の元と見る。$|\mathbf{a}|=a_1+\cdots+a_p$ は半群としての準同型 $|\cdot|:\mathbf{Z}^p_{\geq 0}\to\mathbf{Z}_{\geq 0}$ を与える。

$$\Lambda_{p,q,r}=\{(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})\mid \mathbf{a}\in\mathbf{Z}^p_{\geq 0},\mathbf{b}\in\mathbf{Z}^q_{\geq 0},\mathbf{c}\in\mathbf{Z}^r_{\geq 0},|\mathbf{a}|=|\mathbf{b}|=|\mathbf{c}|\}$$

は、$\mathbf{Z}^{p+q+r}_{\geq 0}$ の部分半群である。このとき、以下で述べるような部分集合 $\Pi_{p,q,r}\subset\Lambda_{p,q,r}$ が存在して、次の定理が成立する。

Theorem 12. [4, Theorem 2.3] $(G/P_1)\times(G/P_2)\times(G/P_3)$ は有限型であるとし、P_1,P_2,P_3 の *Levi* のサイズをそれぞれ $\mathbf{a}=(a_1,\ldots,a_p)$, $\mathbf{b}=(b_1,\ldots,b_q)$, $\mathbf{c}=(c_1,\ldots,c_r)$ とする。$(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})\in\Lambda_{p,q,r}$ である。半群 $\Lambda_{p,q,r}$ の中で $(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})$ を $\Pi_{p,q,r}$ の元の非負整数係数の一次結合として書き表す方法の全体と $(G/P_1)\times(G/P_2)\times(G/P_3)$ の G 軌道の全体は自然に全単射である。

Section 3 の設定では、$(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})$ を一つ固定して考えていた。一方ここでは、いろいろな $(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})$ を一斉にまとめて考えることで、軌道分解を記述している。これは、箙の表現論では常道なのだが、群 G から始める設定では気がつきづらい。軌道分解を箙の表現論に帰着する鍵となるのは、長さがそれぞれ p,q,r となるような 3 つの旗で、入れ物が共通であるようなものを object とするような圏 $\mathcal{F}_{p,q,r}$ を、tree $T_{p,q,r}$ に結節点に向かう向きを入れた箙の表現の圏の充満部分圏と自然に見なすことができ、これによって２つの圏での分解不能な object が対応しているという事実である。

分解不能な object の自然なパラメータ集合 $\Pi_{p,q,r}$ の正式な定義は原論文に譲るが、そのリストは平易に述べることができるので紹介しておく。composition $\mathbf{a}$ に対して、0 を除いて大きさの順

に並べ替えてできる分割を $\mathbf{a}^+$ と書く。例えば、$\mathbf{a}=(0,2,1,0,3,2)$ に対して $\mathbf{a}^+=(3,2,2,1)$ である。

Theorem 13. [4, Theorem 2.4] $(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})\in\Lambda_{p,q,r}$ が $\Pi_{p,q,r}$ に属する必要十分条件は、分割の組 $\{\mathbf{a}^+,\mathbf{b}^+,\mathbf{c}^+\}$ が以下のリストに属することである（3つの分割の順序の入れ替えも許す）。

$\{(1),(1),(1)\}$,
$\{(3,3),(2,2,2),(2,1,1,1,1)\}$,
$\{(4,2),(2,2,2),(1,1,1,1,1,1)\}$,
$\{(m+1,m),(m,m,1),(1,1,\dots,1)\},\quad (m\geq 2)$,
$\{(m,m),(m,m-1,1),(1,1,\dots,1)\},\quad (m\geq 2)$,
$\{(n-1,1),(1,1,\dots,1),(1,1,\dots,1)\},\quad (n\geq 2)$.

[4, Remark 2.5] では、この定理と Deligne-Simpson 問題との関係が触れられている。明日の大島の概説講演を参照されたい。

4.4 Bruhat 分解の場合 ($A_{q,r}$ の場合)

3つの部分旗多様体のうちの一つが一点のとき、すなわち、$P_1=G$ のときを考える。このとき $p=1$ である。composition から partition を作る写像 $\mathbf{a}\mapsto\mathbf{a}^+$ で長さは長くはなれないから、$(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})\in\Pi_{1,q,r}$ ならば $\{\mathbf{a}^+,\mathbf{b}^+,\mathbf{c}^+\}=\{(1),(1),(1)\}$ である。したがって、

$$\Pi_{1,q,r}=\{((1),\mathbf{e}_i,\mathbf{e}_j)\in\mathbf{Z}^1\times\mathbf{Z}^q\times\mathbf{Z}^r\mid 1\leq i\leq q, 1\leq j\leq r\}$$

となる。ただし、$\mathbf{e}_i$ は第 i 成分のみが 1 の単位ベクトルである。これを用いて Theorem 13 の内容を述べてみよう。$\Lambda_{1,q,r}$ の元 $(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})$ を $\Pi_{1,q,r}$ の元 $((1),\mathbf{e}_i,\mathbf{e}_j)$ の非負整数 m_{ij} を係数とする 1 次結合で表す

$$(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})=\sum_{i,j}m_{ij}((1),\mathbf{e}_i,\mathbf{e}_j)$$

ような方法は、長方形の行列 $(m_{ij})\in M(q,r;\mathbf{Z}_{\geq 0})$ で、各行の和が $b_1,\dots,b_q$, 各列の和が $c_1,\dots,c_r$ となるものと対応している。$n=b_1+\cdots+b_q$ 個のものを $b_1,\dots,b_q$ 個に分けるやり方の全体は、$S_n/(S_{b_1}\times\cdots\times S_{b_q})$ と対応させることができるので、この集合は対称群の両側剰余類分解

$$(S_{b_1}\times\cdots\times S_{b_q})\backslash S_n/(S_{c_1}\times\cdots\times S_{c_r})\cong\mathrm{diag}\, S_n\backslash((S_n/(S_{b_1}\times\cdots\times S_{b_q}))\times(S_n/(S_{c_1}\times\cdots\times S_{c_r})))$$

と自然に対応している。これによって Bruhat 分解との対応がつく。

4.5 mirabolic の場合 ($S_{q,r}$ の場合)

P_1 が奇跡的であるとする。このとき $p=1$, $\mathbf{a}=(1,n-1)$ である。$\Pi_{2,q,r}$ の元のうち、分割 $\mathbf{a}^+$ に 1 以外の part が 2 つ以上あったら $\mathbf{a}$ を表す和に参加できないため、$\{(1),(1),(1)\}$ と $\{(1,t-1),(1,\dots,1),(1,\dots,1)\}$ $(t\geq 2)$ に限られる。これらの分割に対応する composition は

- $(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j)$,　ここで $1 \le i \le q, 1 \le j \le r$,
- $((1, t-1), \sum_{i\in I} \mathbf{e}_i, \sum_{j\in J} \mathbf{e}_j)$, ここで $t \ge 1$, $I \subset \{1,\dots,q\}$, $J \subset \{1,\dots,r\}$ は濃度が t の任意の部分集合,

のいずれかである。和の $\mathbf{a} = (1, n-1)$ の第 1 成分を見ると、後者は一回しか和に参加できないことがわかり、軌道のパラメータ集合は

$$\left\{ \begin{array}{l|l} I \subset \{1,\dots,q\}, & \sharp I = \sharp J \ge 1, \\ J \subset \{1,\dots,r\}, & (m_{ij}) \text{ の行の和が } \mathbf{b} - \sum_{i\in I} \mathbf{e}_i, \\ (m_{ij}) \in M(q, r; \mathbf{Z}_{\ge 0}) & (m_{ij}) \text{ の列の和が } \mathbf{c} - \sum_{j\in J} \mathbf{e}_j \end{array} \right\}$$

と書ける。

特に P_2, P_3 がともに Borel 部分群のときは、$\mathbf{b} = \mathbf{c} = (1,\dots,1)$ である。このとき $\sharp I = \sharp J$ となるような $I, J \subset \{1,\dots,n\}$ に対して、$I^c, J^c \subset \{1,\dots,n\}$ を補集合とすると、$(m_{ij}) \in M(n, n; \mathbf{Z}_{\ge 0})$ は全単射 $I^c \to J^c$ と次の意味で対応する。$m_{ij} = 0, 1$ であり、$i \in I^c$ がその全単射で $j \in J^c$ に写されるときのみ $m_{ij} = 1$.

4.6 mirabolic の場合, Theorem 10 による軌道のパラメータ付け

3 重旗多様体では 3 つの放物型部分群の役割は対等だが、それを対称対の 2 重旗多様体 $(\mathbb{G}/\mathbb{P}) \times (\mathbb{K}/\mathbb{Q})$ と見なすやり方は、どれを P_3 とするかで最大 3 通りある。後の西山の講演では、P_3 を Borel とする取り方を扱うが、ここでは、P_3 が mirabolic, P_1 と P_2 が Borel であるようにとった場合を書いてみよう。Borel 部分群 B を上三角な正則行列の全体、奇跡的部分群 P_3 を対角ブロックが左上から $GL(1) \times GL(n-1)$ となっているような放物型部分群で B を含むものとする。$P_3 = U_3 L_3$, $L_3 = GL(1) \times GL(n-1)$ であり、U_3 は $(n-1)$ 次元の可換なベキ単群である。

4.1 節の記号を踏襲する。このとき、$\mathbb{P}\backslash\mathbb{G}/\mathbb{P}' = (B\backslash G/P_3) \times (B\backslash G/P_3)$ である. n 次対称群の元 $w \in S_n$ は、$w \mapsto (E_{i,w(j)})_{i,j=1,\dots,n}$ によって、$G = GL(n)$ の元と見なし、$S_n \subset G$ を部分群と見なす。埋め込みによって $S_n \xrightarrow{\sim} B\backslash G/B$ は全単射になる。商写像 $B\backslash G/B \twoheadrightarrow B\backslash G/P_3$ は写像 $S_n \ni w \mapsto w(1) \in \{1,\dots,n\}$ と同一視することができる。

$i \in \{1,\dots,n\}$ に対して、$w(1) = i, w(2) < w(3) < \cdots < w(n)$ という代表元 $w \in S_n$ を取ることができる。このとき $B^w_{L_3} = B_{L_3}$ である。$\mathbb{L}' = L_3 \times L_3$ であるから $\mathbb{P}^{\mathbf{w}}_{\mathbb{L}'} = B_{L_3} \times B_{L_3}$ となる。したがって、$\mathbb{P}^{\mathbf{w}}_{\mathbb{L}'}\backslash\mathbb{L}'/\mathbb{L}'_{\mathbb{K}} \cong B_{L_3}\backslash L_3/B_{L_3} \cong S_1 \times S_{n-1}$ である。

最後のファイバーの記述に移る。$\mathbb{U}' = U_3 \times U_3$, $\mathbb{U}'_{\mathbb{K}} = \mathrm{diag}\, U_3$ である。$\mathbf{w} = (w_1, w_2)$, $v \in S_1 \times S_{n-1}$ とすると $\mathbb{P}^{\mathbf{wv}}_{\mathbb{U}'} = B^{w_1 v}_{U_3} \times B^{w_2}_{U_3}$, $\mathbb{P}^{\mathbf{wv}}_{\mathbb{U}'}\backslash\mathbb{U}'/\mathbb{U}'_{\mathbb{K}} \cong B^{w_1 v}_{U_3}\backslash U_3/B^{w_2}_{U_3} \cong \exp(\oplus_{j\in\Gamma}\mathbb{C}E_{1j})$ である。ここで j の和のわたる範囲 Γ は $\Gamma = \{j \mid 2 \le j \le n, w_1 v(1) > w_1 v(j), w_2(1) > w_2(j)\}$ である。一方で、$\mathbf{P}^{\mathbf{wv}}_{\mathbb{L}'_{\mathbf{K}}} = \mathrm{diag}\,(B^{w_1 v} \cap B^{w_2} \cap L_3) \cong GL(1) \times \exp(\oplus_{i,j}\mathbb{C}E_{ij})$ である。ここで、和の i, j は $2 \le i \le j \le n$, $w_1 v(i) \le w_1 v(j)$ の範囲をわたる。特にこの群は極大トーラスを含んでいる。極大

トーラスの作用に関して $\oplus_{j\in\Gamma}\mathbb{C}E_{1j}$ は $\{0,1\}^\Gamma$ 個の軌道に分かれる。この群の作用に関していつ軌道がくっつくかを考えると、軌道の代表系は、条件 $i \in \Gamma'$, $i < j$, $w_1v(i) \le w_1v(j)$ ならば $j \notin \Gamma'$ を満たすような部分集合 $\Gamma' \subset \Gamma$ の全体である。

参考文献

[1] P. Achar and A. Henderson, Orbit closures in the enhanced nilpotent cone, Adv. Math. **219** (2008), no. 1, 27–62.

[2] T. Matsuki, An example of orthogonal triple flag variety of finite type, math.arXiv:1011.6468.

[3] T. Matsuki and T. Oshima, Embeddings of discrete series into principal series, *in* The Orbit Method in Representation Theory, Birkhäuser, 1990, 147–175.

[4] P. Magyar, J. Weyman and A. Zelevinsky, Multiple flag varieties of finite type, Adv. Math. **141** (1999), 97–118.

[5] P. Magyar, J. Weyman and A. Zelevinsky, Symplectic multiple flag varieties of finite type, J. Alg. **230** (2000), 245–265.

[6] Kyo Nishiyama and Hiroyuki Ochiai, Double flag varieties for a symmetric pair and finiteness of orbits, Journal of Lie Theory, **21** (2011), 79–99.

[7] 西山享, 落合啓之, 多重旗多様体上の軌道の有限性について, 表現論シンポジウム講演集 (2010), 82–95.

[8] T. Oshima, Fourier analysis on semisimple symmetric spaces, *in* Non-commutative harmonic analysis and Lie groups, Springer Lecture Note in Math. **880** (1981), 357–369.