

淡中型双対定理と群位相

Duality theorem and topological structure of groups

辰馬 伸彦

Nobuhiko Tatsuuma

概要

位相群について淡中型双対定理を考える時、定理の成立する位相群の条件を求めることと、後で説明する様に定理の設定の4種に亘る多様性に対応する群との関連付けが問題となる。この問題について、必ずしも十分と言えないが、形式付けが得られたので報告する。

We give a necessary and sufficient condition to topological group for which so-called Tannaka-type duality theorem holds. The condition must be changed according to the four formulations of this theorem.

1 淡中双対定理の 4 つの型

ここで扱うのは、弱淡中型定理である。

位相群 G に対して、そのユニタリ表現の全体の集合 $\Omega \equiv \{D = \{\mathcal{H}^D, T_g^D\}\}$ を G の双対空間 (dual) と呼ぶ。ここに、 $\mathcal{H}^D$ は D の表現 Hilbert 空間、 T_g^D は表現作用素を表す。

Ω 上の、 D で $\mathcal{H}^D$ の作用素を値にとる作用素場 $\mathbf{A} \equiv \{A^D\}_{D \in \Omega}$ が

- (1) $D_1 \sim_W D_2 \implies W A^{D_1} W^{-1} = A^{D_2}$ (ユニタリ同値性),
- (2) $A^{D_1} \oplus A^{D_2} = A^{D_1 \oplus D_2}$ (直和),
- (3) $A^{D_1} \otimes A^{D_2} = A^{D_1 \otimes D_2}$ (テンソル積).
- (4) $\overline{A^D} = A^{\bar{D}}$ (共役表現).

を満たす時、 $\mathbf{A}$ を (G の) 再表現 (birepresentation) と呼ぶ。

ここで A^D の取る作用素の種類には、後で示す様な 4 通りの取り方がある。

例 1.1. 当然、ある $g \in G$ に対して、表現作用素の作る場 $\mathbf{T}_g \equiv \{T_g^D\}$ は再表現の一つである。

G の再表現の全体を $\overline{G}$ と書く．これは， G の bidual であると捉えられる．

Ω 上の有界作用素場の全体には，各成分作用素空間の弱位相の積として得られる位相を入れることが出来る．その位相を $\overline{G}$ に制限したものを， $\overline{G}$ の位相とする．このとき，

$$(1.1) \quad G \ni g \longrightarrow T_g \in \overline{G}$$

は「中へ」の連続準同型である．

ここで，写像 (1.1) が上への同型写像であることを主張するのが標題の**弱淡中型**双対定理である．

勿論，一般の位相群ではこのようなことは成立しない．

上記の再表現 $\mathbf{A} \equiv \{A^D\}$ の定義の中で， D に対する各成分である $\mathcal{H}^D$ の作用素 A^D については，次の4通りの設定が考えられる．

- (u) A^D は $\mathcal{H}^D$ 上のユニタリ作用素．
- (i) A^D は $\mathcal{H}^D$ 上の等長作用素．
- (b) A^D は $\mathcal{H}^D$ 上作用素ノルムが 1 以下の有界作用素．
- (c) A^D は $\mathcal{H}^D$ 上で稠密な定義域をもつ閉作用素．

但し，閉作用素については，ユニタリ同値，直和，テンソル積等の演算が行える様に適当な定義域の制限を加える必要がある．

再表現の定義にこれを加えたものを，それぞれ u-再表現，i-再表現，b-再表現，c-再表現と呼び，その全体を G_u, G_i, G_b, G_c で示すこととする．

明らかに

$$(1.2) \quad G_u \subset G_i \subset G_b \subset G_c.$$

G_u, G_i, G_b の3つには上記の弱位相を， G_c には定義域の元による行列要素を使った位相を入ると (1.2) 式は位相を込めて成立することが容易に分かる (cf. [4])

さらに， G_u, G_i の上では，各成分の弱位相から作った位相と，強位相からのそれが一致すること，および等長作用素の空間は，強位相の意味で完備であることを注意しておく．

この4種の再表現それぞれに対して4種の弱淡中型双対定理が構成される．

(u-双対定理) G は (1.1) により G_u と同型である．

(i-双対定理) G は (1.1) により G_i と同型である．

(b-双対定理) G は (1.1) により G_b と同型である．

(c-双対定理) G は (1.1) により G_c と同型である．

(1.2) より

$$(1.3) \quad (c\text{-双対定理}) \implies (b\text{-双対定理}) \implies (i\text{-双対定理}) \implies (u\text{-双対定理}).$$

先に [1], [2] で, 局所コンパクト群は b-双対定理を満たすことを示した.
以下ではこれらの双対定理が成立する為の条件を考える.

2 ユニタリ表現の分離系, T-型群, NOS-群

上記の全ての双対定理に共通して言えることは, 双対定理が成立するためには, G の各点を分離するだけ多くのユニタリ表現の存在の必要性である. これに位相に対する条件を付け加えて次の定義を与える.

以下 G を T_2 -位相群とする.

定義 2.1 G の巡回ユニタリ表現の族 $\Omega_0 \equiv \{D_\alpha \equiv \{\mathcal{H}^{D_\alpha}, T_g^{D_\alpha}, v^{D_\alpha}\}\}_{\alpha \in A}$, ただし, $v^{D_\alpha} \in \mathcal{H}^{D_\alpha}$, $\|v^{D_\alpha}\| = 1$, が**分離系 (SSUR)** をなすとは, 任意に与えられた G の単位元 e の近傍 V に対して, $D \in \Omega_0$ と $\varepsilon > 0$ が有って,

$$(2.1) \quad F(D, \varepsilon) \equiv \{g \in G \mid |1 - \langle T_g^D v^D, v^D \rangle| < \varepsilon\} \subset V.$$

と出来ることを言う.

[4] では次を示した.

補題 2.1 SSUR を持つ T_2 -位相群 G では, 写像 (1.1) は「中へ」の位相群としての同型写像となる.

通常のごとく, G 上のフィルター基 $\mathcal{F} \equiv \{F_\alpha\}_{\alpha \in \Gamma}$ が**コーシー基** であるとは, G の e の任意の近傍 V に対して, $\alpha \in \Gamma$ を次の様にとることが出来ることと, 定義する.

$$\forall \beta, \gamma \succ \alpha \ (\beta, \gamma \in \Gamma), \quad F_\beta^{-1} F_\gamma \subset V.$$

さらに, $\mathcal{F}$ がコーシー基 であると同時に $\mathcal{F}^{-1} \equiv \{F_\alpha^{-1}\}_{\alpha \in \Gamma}$ もまた コーシー基 である時, $\mathcal{F}$ を **両側コーシー基** であると呼ぶこととする.

定義 2.2 G が **完備** であるとは, 任意の コーシー基 $\mathcal{F}$ が G の中で収束することという. G が **両側完備** であるとは, 任意の 両側コーシー基 が G の中で収束することという.

両側コーシー基はコーシー基 であるから, 完備 なら 両側完備 となる.

定義 2.3 SSUR を持つ T_2 -位相群 G が

- (1) 完備である時, G を **T-型群** と言う.
- (2) 両側完備である時, G を **汎 T-型群** と言う.

局所コンパクト群は T-型群であり, T-型群はまた 汎 T-型群であることは容易に判る.

定義 2.4 局所コンパクト群 G が, 1-次元実数加法群 $\mathbf{R}$ の自明でない準同型像となる部分群を持たない時, **NOS-群** (group with no oneparameter subgroup) という.

3 主結果と例

以上の定義を使うと, 次の結果を得ることが出来る.

主定理 位相群 G に対して,

- (1) u -双対定理の成立の為に, G が汎 T-型群であることが必要十分である.
- (2) i -双対定理の成立の為に, G が T-型群であることが必要十分である.
- (3) b -双対定理の成立の為に, G が局所コンパクト群であることが必要十分である.
- (4) c -双対定理の成立の為に, G が NOS-型群であることが必要十分である.

□

以下に例を与える.

例 (3.1) $\mathcal{H}$ を無限次元のヒルベルト空間とする. G を $\mathcal{H}$ 上のユニタリ作用素の全体の群に, 弱位相を入れたものとする.

このとき, G は SSUR を持ち, 両側完備ではあるが, 完備ではない. すなわち汎 T-型群であるが T-型群ではない.

上記の定理から, u -双対定理が成立するが, i -双対定理が成立しない例となる.

例 (3.2) 引用文献 [3], [4] で挙げた帰納極限群 G は, 一般には局所コンパクトではないが, SSUR を持ち, 完備である. つまり T-型群であり, i -双対定理が成立する. しかし b -双対定理は成り立たない.

例 (3.3) 有限次元の Lie 群は局所コンパクトであると共に, 1-径数部分群を持つ. 従って b -双対定理は成立するが c -双対定理は成立しない.

例 (3.4) 局所コンパクト完全不連結群が c -双対定理の成立する例である.

4 証明の概略

局所コンパクト群に対する双対定理の成立の証明は, [2] を引用する.

u- と i- 各双対定理成立の証明は [4] §7, §8 に詳しく述べてあるので, 此处では, そのあらすじを述べる.

G が SSUR を持つとの仮定から, 補題 2.1 を使うと, 双対定理を証明するには, (1.1) が, G から $\overline{G}$ の上への写像で有ること示せばよい. 即ち任意の再表現 $\mathbf{A} \equiv \{A^D\}_{D \in \Omega}$ に対して G の元 g_0 が存在して, 全ての D で $A^D = T_{g_0}^D$ となることを言えばよい.

一方, SSUR の存在を使い, D と $\varepsilon > 0$ を走らせると, G 上の集合の族,

$$(4.1) \quad K(D, \varepsilon) \equiv \{g \in G \mid |1 - \langle T_g^D A^D v^D, v^D \rangle| < \varepsilon\}$$

が, $\{A^D\}$ がユニタリ作用素の族の時は**両側コーシー基**に, 等長作用素の族の時は**コーシー基**になることが示される.

即ち, G が汎 T-型群すなわち両側完備なら G_u の上で, T-型群すなわち完備なら G_i の上で, 上記のフィルター基は G の (1.1) による像の元 g_0 に収束する. つまり $A^D = T_{g_0}^D$ ($\forall D \in \Omega$) が出る.

逆に双対定理が成立するとして考える. 写像 (1.1) が位相を含めて同型であるとすれば, $\overline{G}$ の位相が, 作用素空間の弱位相から定義されていることから, G が SSUR を持つことが必要であることが分かる.

もし, G が両側完備でなければ, (1.1) による G の像の上の両側コーシー基で G_u では収束するが, G の像では収束しないものがとれる. 即ち写像 (1.1) は「上へ」ではない.

同様に G が完備でなければ, (1.1) は G_i の「上へ」の写像でなくなる.

即ち, u-双対定理が成立する為には, G は汎 T-型群であることが, また i-双対定理の為には T-型群であることが必要である.

b-双対定理については, G_b は弱コンパクトであるところの作用素空間の積空間の中で単位球内の閉部分空間から一点 0 を除いた局所コンパクト集合として実現されている (cf. [4] §0).

最後に G が 1-径数部分群を持つならば, 対応して G_c の中にユニタリでない閉作用素からなる部分群を作ることが出来る (cf. [4] §5). これは c-双対定理が成り立たないことを示している.

参考文献

- [1] N. Tatsuuma, A duality theorem for locally compact groups, J. Math. Kyoto Univ., **6**(1967), 187–293.

- [2] 辰馬 伸彦, 位相群の双対定理, (1994), 紀伊国屋書店
- [3] N. Tatsuuma, Duality theorem for inductive limit group (in Japanese), RIMS Kôkyûroku, **1722**(2010), 48–67,
- [4] N. Tatsuuma, A duality theorem for inductive limit group, to appear.
- [5] N. Tatsuuma, Duality theorems and topological structure of groups, submitted.