

形式次数とテータ対応

市野 篤史*

局所テータ対応とは、(p 進体上の) 古典群の ($\mathbb{C}$ 係数) 表現から、別の古典群の表現を、ある種の分岐則を用いて構成する方法である。この構成の下での、表現の解析的不変量の振る舞いについて述べ、これを表現の分類 (局所 Langlands 対応) を用いて、数論的に解釈する。

本稿は、Wee Teck Gan 氏との共同研究 [GI] に基づく。

1 問題設定

F を p 進数体 $\mathbb{Q}_p$ の有限次拡大、 G を F 上の簡約代数群とする。簡単のため、 G は半単純で F 上分裂すると仮定し、その有理点のなす群 $G(F)$ のことも G と書くことにする。本稿では、 G の複素数体 $\mathbb{C}$ 上の既約許容表現を考える。

さて、 G の既約許容表現 π に対し、 π の不変量 (つまり π の同型類だけによる量) を何らかの意味で計算する、という問題を考える。もし、表現が分類されているならば、安直に π の不変量を分類を用いて表す、という設定にしてみる。これでは設定があまりに素朴すぎる気がするが、筆者は平賀郁氏・池田保氏との共同研究 [HII] において、形式次数とよばれる (解析的) 不変量に対して、この問題に「答える」ことに成功した。つまり、形式次数とは次元のある種の一般化であるが、コンパクト Lie 群に対する Weyl の次元公式の、極めて非自明な一般化を予想として提出したのである。

2 形式次数予想

任意の既約許容表現 π に対して、形式次数を定義することはできない。 π を離散系列表現と仮定する必要があるが、このように仮定しても、離散系列表現はたくさんあるため (F は p 進体なので超カスプ表現が存在する)、問題の興味深さは失われないだろう。

π を G の離散系列表現とする。一般に、 π は無限次元であることに注意する。簡単のため、表現 π とその作用する空間を同一視する。このとき、 π は G のユニタリ表現なので、 G

*京都大学理学研究科

の作用で不変な, π 上のエルミート内積 $(\cdot, \cdot)$ が存在する. π が離散系列表現であることの定義から, G 上の関数

$$f_{v,v'}(g) := (\pi(g)v, v') \quad (v, v' \in \pi, g \in G)$$

は二乗可積分である.

定義. G 上の Haar 測度 dg を固定する. G の離散系列表現 π に対し, 正の実数 $\deg \pi$ で, Schur の直交関係式

$$\int_G f_{v_1, v'_1}(g) \cdot \overline{f_{v_2, v'_2}(g)} dg = \frac{1}{\deg \pi} \cdot (v_1, v_2) \cdot \overline{(v'_1, v'_2)} \quad (v_1, v'_1, v_2, v'_2 \in \pi)$$

をみたすものが存在する. この $\deg \pi$ を π の形式次数とよぶ.

π は離散系列表現なので, 左辺の積分は収束することに注意する. G がコンパクトならば, π は有限次元であり, G の全測度が 1 になるように dg をとれば,

$$\deg \pi = \dim \pi$$

となる. この意味で, 形式次数は次元の一般化である.

形式次数は, $F = \mathbb{R}$ のときは Harish-Chandra によって完全に計算されているが, 我々の設定ではそうではない. そもそも, 形式次数が計算できたとしても, それを「何を用いて」表すのがよいのか, ということ自体がはっきりしていなかった. 形式次数が計算されている例は, 個別にいくつかあったが, それらに対して統一的な理解が得られるとは, 誰も思っていなかったのではないだろうか.

形式次数 $\deg \pi$ は G の Haar 測度 dg の取り方によるので, 話を進める前に dg を固定することにする. 非自明な指標 $\psi : F \rightarrow \mathbb{C}^\times$ を固定することに, ψ だけによる G の Haar 測度を定めることができる. 詳細は割愛するが, G が F 上分裂するときは, F の整数環 $\mathfrak{o}_F$ 上の G の最高次微分形式と, ψ に関する F の自己双対測度から定まるものをとることにする.

分類 (局所 Langlands 対応) とは, 集合の全単射

$$\{G \text{ の既約許容表現の同型類} \} \longleftrightarrow \{ \text{組 } (\phi, \eta) \text{ の同値類} \}$$

のことである. ただし, $\phi : WD_F \rightarrow \widehat{G}$ は L 準同型, η は有限群 S_ϕ の既約表現である. また, $W_F := f^{-1}(\mathbb{Z}) \subset \text{Gal}(\bar{F}/F)$ は F の Weil 群, f は自然な写像

$$f : \text{Gal}(\bar{F}/F) \longrightarrow \text{Gal}(\bar{\mathfrak{f}}/\mathfrak{f}) \cong \widehat{\mathbb{Z}} := \varprojlim_n \mathbb{Z}/n\mathbb{Z},$$

$\mathfrak{f}$ は F の剰余体, $WD_F := W_F \times \text{SL}_2(\mathbb{C})$ は F の Weil-Deligne 群, $\widehat{G}$ は G の ($\mathbb{C}$ 上の) 双対群, $Z_{\widehat{G}}$ は $\widehat{G}$ の中心, S_ϕ は ϕ の像の $\widehat{G}$ での中心化群, S_ϕ は $S_\phi/Z_{\widehat{G}}$ の連結成分のなす群である. 一般の G に対して分類はまだ知られていないが, Ngô により基本補題が証明されたため, Arthur の結果から, 古典群についてはほぼ分類が完成している [A].

形式次数予想とは, 形式次数 $\deg \pi$ を G の表現の分類を用いて表す予想である [HII].

形式次数予想. π を G の離散系列表現, (ϕ, η) を対応する組とする. このとき,

$$\deg \pi = \frac{\dim \eta}{\#S_\phi} \cdot |\gamma(0, \text{Ad} \circ \phi, \psi)|.$$

ただし, Ad は $\widehat{G}$ の $\text{Lie}(\widehat{G})$ への随伴表現,

$$\gamma(s, \text{Ad} \circ \phi, \psi) := \varepsilon(s, \text{Ad} \circ \phi, \psi) \cdot \frac{L(1-s, \text{Ad} \circ \phi)}{L(s, \text{Ad} \circ \phi)} \quad (s \in \mathbb{C})$$

は随伴 γ 因子である. また, $\text{Ad} \circ \phi$ は WD_F の有限次元表現なので, その L 因子と ε 因子

$$\begin{aligned} L(s, \text{Ad} \circ \phi) &= P(q^{-s})^{-1} & (P(X) \in \mathbb{C}[X], P(0) = 1, q = \#f) \\ \varepsilon(s, \text{Ad} \circ \phi, \psi) &= A \cdot q^{B(s-1/2)} & (A \in \mathbb{C}, |A| = 1, B \in \mathbb{R}) \end{aligned}$$

を定める方法がある.

形式次数予想は, コンパクト Lie 群に対する Weyl の次元公式を含み, また, 多くの実例に対して確かめられている. 例えば, $G = \text{GL}_n$ のときは証明されている. もちろん, 形式次数予想を証明することが期待できるのは, 局所 Langlands 対応が証明されている場合だけである. G が古典群のときは, 局所 Langlands 対応はほぼ証明されているが, これを認めても形式次数予想は証明されていない.

3 テータ対応

テータ対応とは, ある種の分岐則を用いて, 古典群 G の表現から, 別の古典群 G' の表現を組織的に構成する方法である.

本稿では, 以下の場合だけを考える.

- (1) $G = \text{SO}_m$ ($m = 2n + 1$), $G' = \widetilde{\text{Sp}}_{2n}$,
- (2) $G = \text{O}_m$ ($m = 2n$), $G' = \text{Sp}_{2n}$.

ただし, $\widetilde{\text{Sp}}_{2n}$ は Sp_{2n} の非自明な中心拡大

$$1 \longrightarrow \{\pm 1\} \longrightarrow \widetilde{\text{Sp}}_{2n} \longrightarrow \text{Sp}_{2n} \longrightarrow 1$$

である. このとき, 自然な写像 $G \times \text{Sp}_{2n} \rightarrow \text{Sp}_{2mn}$ を, 図式

$$\begin{array}{ccc} & & \widetilde{\text{Sp}}_{2mn} \\ & \nearrow & \downarrow \\ G \times G' & \longrightarrow & \text{Sp}_{2mn} \end{array}$$

に持ち上げることができる. この図式を用いて, $\widetilde{\mathrm{Sp}}_{2mn}$ の表現 ω に対し, その $G \times G'$ への制限 $\omega|_{G \times G'}$ を定める. $G \times G'$ は $\widetilde{\mathrm{Sp}}_{2mn}$ よりだいぶ「小さい」ので, ω も「小さい」方が $\omega|_{G \times G'}$ を制御しやすい. よって, 以下では, ω は $\widetilde{\mathrm{Sp}}_{2mn}$ の (ψ に関する) 極小表現 (つまり Weil 表現) とする. さらに, $\omega|_{G \times G'}$ の商に現れる表現だけを考えることにする.

これだけ設定を特殊化しても, この分岐則は非常に豊富な構造を持ち, また, 保型形式への応用の観点からも研究されている.

以下では, $p \neq 2$ と仮定する. G の既約許容表現 π に対し,

$$\mathrm{Hom}_{G \times G'}(\omega|_{G \times G'}, \pi \boxtimes \pi') \neq 0 \quad (\star)$$

をみたすような G' の既約許容表現 π' の同型類は, 存在すれば一意的であることが Waldspurger によって証明されている [W]. よって, 写像

$$\theta: \{G \text{ の既約許容表現の同型類} \} \longrightarrow \{G' \text{ の既約許容表現の同型類} \} \cup \{0\}$$

を

$$\theta(\pi) := \begin{cases} \pi' & (\star) \text{ をみたす } \pi' \text{ が存在するとき} \\ 0 & (\star) \text{ をみたす } \pi' \text{ が存在しないとき} \end{cases}$$

によって定めることができる. この写像 θ をできるだけ具体的に記述することは, テータ対応における重要な問題の一つである. 分類を用いて記述する, という方向の研究は, Kudla, Muić, Moeglin によって行われ, 現在ではだいぶ理解が進んでいる [M].

4 主結果

一方, 分類を認めても, 形式次数は計算されていない. つまり, テータ対応の下での形式次数の振る舞いは, 先行する研究からは分からない.

定理 1. $G = \mathrm{SO}_{2n+1}$, $G' = \widetilde{\mathrm{Sp}}_{2n}$ とする. π を G の離散系列表現とし, $\pi' := \theta(\pi)$ とおく. このとき, π' は G' の 0 ではない離散系列表現で,

$$\deg \pi' = \deg \pi.$$

定理 2. $G = \mathrm{O}_{2n}$, $G' = \mathrm{Sp}_{2n}$ とする. π を G の既約許容表現とし, $\pi' := \theta(\pi)$ とおく. π' は G' の 0 ではない離散系列表現と仮定する. このとき, π は離散系列表現で,

$$\deg \pi' = \deg \pi \cdot |\gamma(0, \pi, \psi)|.$$

ただし, $\gamma(s, \pi, \psi)$ は, Piatetski-Shapiro, Rallis, Lapid による標準 γ 因子である [LR].

5 主結果の解釈

以下では, 形式次数予想を用いて主結果を解釈する. 分類や, 分類を用いたテータ対応の記述などは, まだ完全には証明されていないが, すべて仮定する.

(ϕ, η) と (ϕ', η') を, それぞれ π と π' に分類で対応する組とする. 特に, $\phi: WD_F \rightarrow \widehat{G}$ と $\phi': WD_F \rightarrow \widehat{G}'$ は L 準同型である.

最初に, $G = \mathrm{SO}_{2n+1}$, $G' = \widetilde{\mathrm{Sp}}_{2n}$ のときを考える. $\widehat{G} = \mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{C})$ であり, $\widehat{G}' = \mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{C})$ とするのがよい. このとき,

$$\phi' = \phi$$

である. また, $S_{\phi'} = S_{\phi}$ はアーベル群である. よって, 定理 1 は形式次数予想から従うことが分かる.

次に, $G = \mathrm{O}_{2n}$, $G' = \mathrm{Sp}_{2n}$ のときを考える. $\widehat{G}' = \mathrm{SO}_{2n+1}(\mathbb{C})$ であり, $\widehat{G} = \mathrm{O}_{2n}(\mathbb{C})$ とするのがよい. このとき,

$$\phi' = \xi \circ \phi$$

である. ただし, $\xi: \widehat{G} \rightarrow \widehat{G}'$ は

$$\xi(g) = \begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & \det g \end{pmatrix}$$

により定まる準同型である. また, $S_{\phi'}$ と S_{ϕ} はアーベル群で,

$$\#S_{\phi'} = \#S_{\phi}$$

であることも分かる. 線形代数より, WD_F の表現としては,

$$\mathrm{Ad} \circ \phi' = (\mathrm{Ad} \circ \phi) \oplus (\mathrm{std} \circ \phi)$$

である. ただし, std は $\widehat{G} = \mathrm{O}_{2n}(\mathbb{C})$ の $\mathbb{C}^{2n}$ への自然な表現である. 特に,

$$\gamma(s, \mathrm{Ad} \circ \phi', \psi) = \gamma(s, \mathrm{Ad} \circ \phi, \psi) \cdot \gamma(s, \mathrm{std} \circ \phi, \psi).$$

一方, 分類より, 定理 2 に現れる標準 γ 因子 $\gamma(s, \pi, \psi)$ は, WD_F の表現 $\mathrm{std} \circ \phi$ により定まる γ 因子 $\gamma(s, \mathrm{std} \circ \phi, \psi)$ と一致する. よって, 定理 2 も形式次数予想から従うことが分かる.

参考文献

- [A] J. Arthur, *The endoscopic classification of representations: orthogonal and symplectic groups*, preprint.
- [GI] W. T. Gan and A. Ichino, *Formal degrees and local theta correspondence*, <http://www.math.kyoto-u.ac.jp/~ichino/>.
- [HII] K. Hiraga, A. Ichino, and T. Ikeda, *Formal degrees and adjoint γ -factors*, J. Amer. Math. Soc. **21** (2008), no. 1, 283–304; *Correction*, J. Amer. Math. Soc. **21** (2008), no. 4, 1211–1213.
- [LR] E. M. Lapid and S. Rallis, *On the local factors of representations of classical groups*, Automorphic representations, L -functions and applications: progress and prospects, Ohio State Univ. Math. Res. Inst. Publ. **11**, de Gruyter, Berlin, 2005, pp. 309–359.
- [M] C. Mœglin, *Conjecture d’Adams pour la correspondance de Howe et filtration de Kudla*, preprint.
- [W] J.-L. Waldspurger, *Démonstration d’une conjecture de dualité de Howe dans le cas p -adique, $p \neq 2$* , Festschrift in honor of I. I. Piatetski-Shapiro on the occasion of his sixtieth birthday, Part I, Israel Math. Conf. Proc. **2**, Weizmann, Jerusalem, 1990, pp. 267–324.