

一般 Kac–Moody Lie 環の表現のパス模型とその応用

Path Model for Representations of Generalized Kac–Moody Algebras and Its Applications

石井 基裕 (筑波大学大学院数理物質科学研究科)
Motohiro Ishii (University of Tsukuba)

1 概要

Kac–Moody Lie 環の可積分加群の結晶基底の一つの実現として Littelmann のパス模型が知られている. この理論を一般 Kac–Moody Lie 環の場合にまで拡張する試みが Joseph–Lamprou ([JL]) によってなされた. Littelmann のパス模型においては, 結晶基底の各元は Lakshmibai–Seshadri パス (LS パス) と呼ばれる Cartan 部分代数の実型の双対空間の中の連続な折れ線に対応するが, Joseph–Lamprou はそれを一般化した一般 Lakshmibai–Seshadri パス (GLS パス) というものを導入し, 型 $\lambda \in P^+$ の GLS パス全体のなすクリスタル $\mathbb{B}(\lambda)$ を定義した. 更に, この $\mathbb{B}(\lambda)$ の指標が最高ウェイト λ の既約最高ウェイト加群の指標と一致することを彼らは証明した. このような事実から, $\mathbb{B}(\lambda)$ は最高ウェイト λ の既約最高ウェイト加群の結晶基底とクリスタルとして同型となることが予想されるが, この問題に対する厳密な証明は与えられていなかった.

本講演では, Joseph–Lamprou による GLS パスのなすクリスタルが, 対応する既約最高ウェイト加群の結晶基底とクリスタルとして同型となることを述べる. また, この結果をもとに, パス模型の表現論への応用がいくつか得られることについて述べる. 主な結果は, 既約最高ウェイト加群のテンソル積の分解則の記述, 既約最高ウェイト加群を Levi 部分代数に制限したときの分岐則の記述, Demazure クリスタルの記述と Demazure 指標公式の類似の公式である. また, Kac–Moody Lie 環の場合の Weyl 群の類似で, あるモノイドを導入し, それを利用して標準パスの特徴づけを与える. この結果は, 表現論的には既約最高ウェイト加群のテンソル積の中の Cartan 成分に対応するクリスタルの元の特徴づけを与える.

謝辞 本研究課題に向けては, 東京工業大学の内藤聡先生と, 筑波大学の佐垣大輔先生に数多くのご指導を頂きました. この場をお借りして御礼申し上げます.

2 準備

2.1 一般 Kac–Moody Lie 環

I を可算添字集合とする. 行列 $A = (a_{ij})_{i,j \in I}$ が Borchers–Cartan 行列であるとは, 以下の 3 条件を満たすことである:

- (1) $a_{ii} = 2$ or $a_{ii} \in \mathbb{Z}_{\leq 0}$ for all $i \in I$,
- (2) $a_{ij} \in \mathbb{Z}_{\leq 0}$ for all $i, j \in I$ with $i \neq j$,
- (3) “ $a_{ij} = 0 \Leftrightarrow a_{ji} = 0$ ” for all $i, j \in I$ with $i \neq j$.

以下では, Borchers–Cartan 行列 A は対称化可能, すなわち, ある対角行列 $D = \text{diag}(d_i)_{i \in I}$, $d_i > 0$, で AD が対称行列となるものが存在するとし, 更に A の対角成分 a_{ii} はすべて偶数であると仮定する (これらの仮定は “量子展開環” を定義する際に必要となる). $I^{re} := \{i \in I \mid a_{ii} = 2\}$, $I^{im} := I \setminus I^{re}$ とおく. Borchers–Cartan 行列 A に付随する Borchers–Cartan データ $(A, \Pi = \{\alpha_i\}_{i \in I}, \Pi^\vee = \{\alpha_i^\vee\}_{i \in I}, P, P^\vee)$ とは, 単純ルート Π , 単純余ルート $\Pi^\vee$, 余ウエイト格子 $P^\vee$, 及びウエイト格子 $P := \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(P^\vee, \mathbb{Z})$ の組である. P^+ で優整ウエイト全体を表す. ルート格子を $Q = \bigoplus_{i \in I} \mathbb{Z}\alpha_i$ とし, $Q^+ := \bigoplus_{i \in I} \mathbb{Z}_{\geq 0}\alpha_i$ とおく. $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}(A)$ を付随する一般 Kac–Moody Lie 環とし, Cartan 部分代数を $\mathfrak{h} := \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{Z}} P^\vee$, その full 双対空間を $\mathfrak{h}^*$ とする.

定義 2.1.1 q を不定元とする. 一般 Kac–Moody Lie 環 $\mathfrak{g}$ に付随する量子展開環 $U_q(\mathfrak{g})$ とは, $\{e_i, f_i \ (i \in I), q^h \ (h \in P^\vee)\}$ を生成元とし, 以下の関係式で定義される $\mathbb{C}(q)$ -代数である.

- $q^0 = 1$, $q^{h_1} q^{h_2} = q^{h_1+h_2}$ for all $h_1, h_2 \in P^\vee$,
- $q^h e_i q^{-h} = q^{h(\alpha_i)} e_i$, $q^h f_i q^{-h} = q^{-h(\alpha_i)} f_i$ for all $h \in P^\vee$, $i \in I$,
- $[e_i, f_j] = \delta_{ij} \frac{K_i - K_i^{-1}}{q_i - q_i^{-1}}$ for all $i, j \in I$, where $K_i := q^{d_i \alpha_i^\vee}$,
- $\sum_{r=0}^{1-a_{ij}} (-1)^r \begin{bmatrix} 1-a_{ij} \\ r \end{bmatrix}_i x_i^{1-a_{ij}-r} x_j x_i^r = 0$ for $i \in I^{re}$ and $j \in I$, with $i \neq j$, where $x = e$ or f ,
- $[e_i, e_j] = [f_i, f_j] = 0$ if $a_{ij} = 0$.

ただし, 各 $i \in I$ に対して $q_i := q^{d_i}$ であり,

$$[n]_i := \frac{q_i^n - q_i^{-n}}{q_i - q_i^{-1}}, \quad [n]_i! := \prod_{k=1}^n [k]_i, \quad \begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix}_i := \frac{[m]_i!}{[m-n]_i! [n]_i!}.$$

である.

優整ウエイト $\lambda \in P^+$ に対して, $V(\lambda)$ を最高ウエイト λ の既約最高ウエイト $U_q(\mathfrak{g})$ -加群とする. これは, 最高ウエイト・ベクトル u_λ で生成され, 以下の関係式を持つ:

- $q^h u_\lambda = q^{h(\lambda)} u_\lambda$ for all $h \in P^\vee$,
- $e_i u_\lambda = 0$ for all $i \in I$,
- $f_i^{\alpha_i^\vee(\lambda)+1} u_\lambda = 0$ for all $i \in I^{re}$,
- $f_i u_\lambda = 0$ for all $i \in I^{im}$, with $\alpha_i^\vee(\lambda) = 0$.

次の事実が知られている.

定理 2.1.2 ([JKK]). $\lambda, \mu \in P^+$ とする.

- (1) $V(\lambda) \otimes V(\mu)$ は完全可約である.
- (2) $V(\lambda)$ の Levi 部分代数への制限は完全可約である.
- (3) $V(\lambda)$ の結晶基底 $B(\lambda)$ が一意的に存在する.
- (4) $U_q(\mathfrak{g})$ の負部分 $U_q^-(\mathfrak{g})$ の結晶基底 $B(\infty)$ が一意的に存在する.

尚, 一般 Kac–Moody Lie 環の場合の結晶基底の定義については [JKK] を参照されたい.

2.2 クリスタル

Borcherds–Cartan データに対するクリスタルの定義を与える.

定義 2.2.1 ([JKKS]). 集合 B がクリスタルであるとは, 写像

$$\text{wt} : B \longrightarrow P, \quad \varepsilon_i, \varphi_i : B \longrightarrow \mathbb{Z} \sqcup \{-\infty\}, \quad e_i, f_i : B \longrightarrow B \sqcup \{\mathbf{0}\} \text{ for each } i \in I,$$

を持っていて, 以下の条件 (1)~(5) を満たすことである:

- (1) $i \in I, b \in B$ について $\varphi_i(b) = \varepsilon_i(b) + \alpha_i^\vee(\text{wt}(b))$,
- (2) $i \in I, b \in B$ について $e_i b \in B$ ならば $\text{wt}(e_i b) = \text{wt}(b) + \alpha_i$,
- (3) $i \in I, b \in B$ について $e_i b \in B$ ならば
$$\begin{cases} \varepsilon_i(e_i b) = \varepsilon_i(b) - 1 & \text{if } i \in I^{re}, \\ \varepsilon_i(e_i b) = \varepsilon_i(b) & \text{if } i \in I^{im}, \end{cases}$$
- (4) $i \in I, b, b' \in B$ について, “ $b' = e_i b \iff f_i b' = b$ ”,
- (5) $i \in I, b \in B$ について, $\varphi_i(b) = -\infty$ ならば $e_i b = f_i b = \mathbf{0}$.

例 2.2.2 · (cf. 定理 2.1.2) $B(\lambda)$ ($\lambda \in P^+$), $B(\infty)$ はクリスタルである.

· $C = \{c\}$ は, 以下によりクリスタルとなる: 各 $i \in I$ について,

$$\text{wt}(c) = 0, \quad e_i c = f_i c = \mathbf{0}, \quad \varepsilon_i(c) = \varphi_i(c) = 0.$$

· $\mathcal{T}_\mu = \{t_\mu\}$ ($\mu \in P$) は, 以下によりクリスタルとなる: 各 $i \in I$ について,

$$\text{wt}(t_\mu) = \mu, \quad e_i t_\mu = f_i t_\mu = \mathbf{0}, \quad \varepsilon_i(t_\mu) = \varphi_i(t_\mu) = -\infty.$$

定理 2.2.3 ([JKKS]). 各 $\lambda \in P^+$ に対して, クリスタルとしての同型

$$B(\lambda) \cong \mathcal{F}(b_\infty \otimes t_\lambda \otimes c) \subset B(\infty) \otimes \mathcal{T}_\lambda \otimes C$$

が成り立つ. ここで, $\mathcal{F}$ は写像 $f_i, i \in I$, で生成されるモノイドであり, b_∞ はウエイト 0 を持つ唯一つの $B(\infty)$ の元である.

2.3 モノイド $\mathcal{W}$ とその性質

この節では, 与えられた Borcherds–Cartan データに対して定まるモノイド $\mathcal{W}$ を導入する. 各 $i \in I$ に対して, $\mathfrak{h}^*$ 上の線形変換 r_i を $r_i(\mu) := \mu - \alpha_i^\vee(\mu)\alpha_i$, $\mu \in \mathfrak{h}^*$, で定める. すると, この r_i は可逆であり, その逆変換は以下ようになる:

$$r_i^{-1}(\mu) = \mu + \frac{1}{1 - a_{ii}} \alpha_i^\vee(\mu) \alpha_i, \quad \mu \in \mathfrak{h}^*.$$

定義 2.3.1 $\tilde{r}_i$ ($i \in I$) を生成元とし, 以下の関係式で定義されるモノイドを $\mathcal{W}$ とする:

- (1) 各 $i \in I^{re}$ に対して $\tilde{r}_i^2 = 1$,

(2) $i, j \in I^{re}$, $i \neq j$ のとき, $r_i r_j \in GL(\mathfrak{h}^*)$ の位数が $m \in \{2, 3, 4, 6\}$ であるならば,

$$(\tilde{r}_i \tilde{r}_j)^m = (\tilde{r}_j \tilde{r}_i)^m = 1,$$

(3) $i \in I^{im}$, $j \in I \setminus \{i\}$, $a_{ij} = 0$ のとき, $\tilde{r}_i \tilde{r}_j = \tilde{r}_j \tilde{r}_i$.

$\mathcal{W} \ni \tilde{r}_i \mapsto r_i \in GL(\mathfrak{h}^*)$ によって定まるモノイドの準同型 $\mathcal{W} \rightarrow GL(\mathfrak{h}^*)$ は well-defined である. $w \in \mathcal{W}$ の長さを $\ell(w)$ で表す. 以下, $\mathcal{W}$ の元 $\tilde{r}_i$ も r_i と表す. $\mathcal{W}$ の部分モノイド $\mathcal{W}_{re} := \langle r_i \mid i \in I^{re} \rangle$ は Coxeter 群となる. $\Pi_{re} := \{\alpha_i\}_{i \in I^{re}}$, $\Pi_{im} := \{\alpha_i\}_{i \in I^{im}}$ をそれぞれ単純実ルートと単純虚ルートとし, $\Delta_{re} := \mathcal{W}_{re} \Pi_{re}$, $\Delta_{im} := \mathcal{W}_{re} \Pi_{im}$ とおく. $\mathfrak{g}$ のルート系を $\Delta = \Delta^+ \sqcup \Delta^-$ とし, $\Delta_{re}^+ := \Delta_{re} \cap \Delta^+$ とおく. $\Delta_{im} \subset \Delta^+$ であることに注意されたい. 各 $\beta = w\alpha_i \in \Delta_{re}^+ \sqcup \Delta_{im}$ に対して, $r_\beta := wr_i w^{-1}$ と定める.

定義 2.3.2 $w \in \mathcal{W}$, $\beta \in \Delta_{re}^+ \sqcup \Delta_{im}$ について,

$$w \rightarrow r_\beta w : \Longleftrightarrow \ell(r_\beta w) > \ell(w)$$

と定義し, この 2 項関係の *transitive closure* として $\mathcal{W}$ 上に半順序 $\geq$ を定める.

注意 2.3.3 $\beta \in \Delta_{im}$ に対しては, 常に $w \rightarrow r_\beta w$ である. また, $\mathcal{W}$ は *Exchange Property*, *Deletion Property*, *Word Property*, *Lifting Property* を持つことが証明できる (cf. [BB]).

3 パス模型

3.1 ルート作用素

$\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$ を $\mathfrak{h}$ の実型とし, その full 双対空間を $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^*$ とする. また $\mathbb{P}$ を区分的線型かつ連続な写像 $\pi : [0, 1] \rightarrow \mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^*$ で, $\pi(0) = 0$ を満たすものの全体の集合とする (パスの集合). 各 $\pi \in \mathbb{P}$, $i \in I$, $t \in [0, 1]$ に対して $h_i^\pi(t) := \alpha_i^\vee(\pi(t))$ と定め, $m_i^\pi := \min\{h_i^\pi(t) \mid t \in [0, 1]\}$ とおく. $\mathbb{P}$ 上には, r_i, r_i^{-1} ($i \in I$) を区分的に作用させることにより, ルート作用素 e_i, f_i を定義することができる. より詳しく説明すると, $\pi \in \mathbb{P}$ に対して, 関数 $h_i^\pi(t)$ に依存して決まる $[0, 1]$ のある条件を満たす部分区間の上で, r_i (resp., r_i^{-1}) を作用させるという作用素として f_i (resp., e_i) を定義する. 条件を満たす部分区間が存在しないときは $\mathbf{0}$ と定義する. ルート作用素の詳細な定義については, [JL] を参照されたい.

3.2 一般 Lakshmibai–Seshadri パス

$\beta = w\alpha_i \in \Delta_{re}^+ \sqcup \Delta_{im}$ に対する余ルート $\beta^\vee := w\alpha_i^\vee$ は well-defined である. $\lambda \in P^+$ に対して, その $\mathcal{W}$ -軌道 $\mathcal{W}\lambda$ を考える. そして, $\mu, \nu \in \mathcal{W}\lambda$, $\beta \in \Delta_{re}^+ \sqcup \Delta_{im}$ に対して,

$$\mu \xrightarrow{\beta} \nu : \Longleftrightarrow \mu = r_\beta \nu, \beta^\vee(\nu) > 0 \text{ となる } \beta \in \Delta_{re}^+ \sqcup \Delta_{im} \text{ が唯一つ存在する.}$$

を cover relation とする半順序 $\geq$ を $\mathcal{W}\lambda$ 上に定義する. 自然な全射 $\mathcal{W} \rightarrow \mathcal{W}\lambda$ は poset としての準同型となることに注意されたい.

定義 3.2.1 ([JL]). $\lambda \in P^+$ とする.

(1) 有理数 $a \in (0, 1]$ と $\mu, \nu \in \mathcal{W}\lambda$, $\mu \geq \nu$ に対して, 組 (μ, ν) の a -chain とは, $\mathcal{W}\lambda$ の元の chain $\mu =: \nu_0 \xrightarrow{\beta_1} \nu_1 \xrightarrow{\beta_2} \cdots \xrightarrow{\beta_s} \nu_s := \nu$ であって, 次の 2 条件を満たすもののことをいう:

- (i) $a\beta_i^\vee(\nu_i) \in \mathbb{Z}_{>0}$ if $\beta_i \in \Delta_{re}^+$ for each $i = 1, 2, \dots, s$,
- (ii) $a\beta_i^\vee(\nu_i) = 1$ if $\beta_i \in \Delta_{im}$ for each $i = 1, 2, \dots, s$.

(2) $\mathcal{W}\lambda$ の元の列 $\lambda := (\lambda_1 > \lambda_2 > \cdots > \lambda_s)$ と有理数の列 $\mathbf{a} := (0 = a_0 < a_1 < \cdots < a_s = 1)$ に対して, それらの組 $\pi := (\lambda; \mathbf{a})$ が型 λ の一般 *Lakshmibai–Seshadri* パス (*GLS* パス) であるとは, 次の 2 条件を満たすことである:

- (i) 各 $i = 1, 2, \dots, s-1$ に対して $(\lambda_i, \lambda_{i+1})$ の a_i -chain が存在する,
- (ii) (λ_s, λ) の 1-chain が存在する.

次のようにして, 組 $\pi = (\lambda; \mathbf{a})$ を $\mathbb{P}$ に属するパスとみなす:

$$\pi(t) := \sum_{i=1}^{j-1} (a_i - a_{i-1})\lambda_i + (t - a_{j-1})\lambda_j \text{ for } a_{j-1} \leq t \leq a_j \text{ and } j = 1, 2, \dots, s.$$

すると, $\pi(1) \in \lambda - Q^+$ となる. $\mathbb{B}(\lambda)$ で型 λ の GLS パス全体の集合を表す.

定理 3.2.2 ([JL]). $\lambda \in P^+$ とする. $\mathbb{B}(\lambda) \sqcup \{\mathbf{0}\}$ はルート作用素 f_i , $i \in I$, と e_i , $i \in I^{re}$, に関して閉じている. 更に, $\mathbb{B}(\lambda) = \mathcal{F}\pi_\lambda \setminus \{\mathbf{0}\}$ が成り立つ. ただし, $\pi_\lambda := (\lambda; 0, 1) \in \mathbb{B}(\lambda)$ であり, $\mathcal{F} := \langle f_i \mid i \in I \rangle_{\text{monoid}}$ はルート作用素 f_i , $i \in I$, で生成されるモノイドである.

$\mathbb{B}(\lambda) \sqcup \{\mathbf{0}\}$ は, 一般にはルート作用素 e_i , $i \in I^{im}$, に関して閉じていない. そこで, $\pi \in \mathbb{B}(\lambda)$, $i \in I^{im}$ に対して, $e_i\pi \notin \mathbb{B}(\lambda)$ であるならば $e_i\pi := \mathbf{0}$ として $\mathbb{B}(\lambda)$ 上の作用素を定義する. このとき, 以下のようにして $\mathbb{B}(\lambda)$ にクリスタルの構造を定めることができる. まず, 柏原作用素としてはルート作用素 f_i , $i \in I$, と e_i , $i \in I^{re}$, をそのまま用いて, e_i , $i \in I^{im}$, については上の意味での $\mathbb{B}(\lambda)$ への制限を用いる. また, $\text{wt}(\pi) := \pi(1) \in \lambda - Q^+$ と定め, $i \in I^{re}$ については,

$$\begin{cases} \varepsilon_i(\pi) := -m_i^\pi, \\ \varphi_i(\pi) := h_i^\pi(1) - m_i^\pi, \end{cases}$$

$i \in I^{im}$ については,

$$\begin{cases} \varepsilon_i(\pi) := 0, \\ \varphi_i(\pi) := h_i^\pi(1), \end{cases}$$

と定める.

パスの concatenation $\pi := \pi_1 \otimes \pi_2 \otimes \cdots \otimes \pi_n \in \mathbb{P}$ を以下のようにして定義する:

$$\pi(t) = \sum_{l=1}^{k-1} \pi_l(1) + \pi_k(nt - k + 1) \text{ for } \frac{k-1}{n} \leq t \leq \frac{k}{n} \text{ and } 1 \leq k \leq n.$$

$\lambda_1, \dots, \lambda_n \in P^+$ とする. このとき, 集合

$$\mathbb{B}(\lambda_1) \otimes \cdots \otimes \mathbb{B}(\lambda_n) := \{\pi_1 \otimes \cdots \otimes \pi_n \in \mathbb{P} \mid \pi_i \in \mathbb{B}(\lambda_i) \ (i = 1, \dots, n)\}$$

には, 上の議論と同様の方法でクリスタルの構造を定義することができ, これは $\mathbb{B}(\lambda_1), \dots, \mathbb{B}(\lambda_n)$ のクリスタルとしてのテンソル積と同型になる.

4 標準パスの特徴づけ

4.1 モノイド $\mathcal{W}$ の Bruhat 順序による標準パスの特徴づけ

$\lambda_1, \dots, \lambda_n \in P^+$ とする. パス $\pi \in \mathbb{B}(\lambda_1) \otimes \dots \otimes \mathbb{B}(\lambda_n)$ が標準パスであるとは, $\pi \in \mathcal{F}(\pi_{\lambda_1} \otimes \dots \otimes \pi_{\lambda_n})$ となることである.

定理 4.1.1 パス $\pi = \pi_1 \otimes \dots \otimes \pi_n \in \mathbb{B}(\lambda_1) \otimes \dots \otimes \mathbb{B}(\lambda_n)$, $\pi_k = (\lambda_1^k, \lambda_2^k, \dots, \lambda_{i_k}^k; \mathbf{a}^k) \in \mathbb{B}(\lambda_k)$, $k = 1, 2, \dots, n$, が標準パスであるための必要十分条件は, $\mathcal{W}$ の元 $w_j^k \in \mathcal{W}$, $j = 1, 2, \dots, i_k$, $k = 1, 2, \dots, n$, で以下の 3 条件を満たすものが存在することである:

- (1) 各 j, k に対して $w_j^k \lambda_k = \lambda_j^k$,
- (2) $\mathcal{W}$ において $w_1^1 \geq \dots \geq w_{i_1}^1 \geq w_1^2 \geq \dots \geq w_{i_2}^2 \geq \dots \geq w_{i_{n-1}}^{n-1} \geq w_1^n \geq \dots \geq w_{i_n}^n$,
- (3) 各 $l = 1, 2, \dots, n-1$ に対して $w_1^{l+1} \lambda_l \in \mathcal{W}_{re} \lambda_l$ かつ $(\lambda_{i_l}^l, w_1^{l+1} \lambda_l)$ の 1-chain が存在する.

注意 4.1.2 定理の条件 (3) は, 通常の Kac–Moody Lie 環の場合の Littelmann のパス模型においては常に成り立つ自明な条件である. 従って, この定理 4.1.1 は, Littelmann による結果 [Li3, Theorem 10.1] の一般化とみなすことができる.

5 パス模型の埋め込みとパス模型の同型定理

5.1 パス模型の埋め込み

与えられた Borcherds–Cartan データ $(A = (a_{ij})_{i,j \in I}, \Pi = \{\alpha_i\}_{i \in I}, \Pi^\vee = \{\alpha_i^\vee\}_{i \in I}, P, P^\vee)$ に対して, 次のようにして新たな “Cartan データ” を構成する. まず, 添字集合としては,

$$\tilde{I} := \{i^{(1)} \mid i \in I^{re}\} \sqcup \{i^{(n)} \mid i \in I^{im}, n = 1, 2, 3, \dots\}$$

をとる. そして, Cartan 行列 $B = (b_{i^{(n)}j^{(m)}})_{i^{(n)}, j^{(m)} \in \tilde{I}}$ を以下で定める:

$$\begin{cases} b_{i^{(n)}i^{(n)}} := 2 \text{ for } i^{(n)} \in \tilde{I}, \\ b_{i^{(n)}j^{(m)}} := a_{ij} \text{ for } i^{(n)}, j^{(m)} \in \tilde{I}, \text{ with } i^{(n)} \neq j^{(m)}. \end{cases}$$

この Cartan 行列に付随する Cartan データを,

$$(B, \tilde{\Pi} := \{\beta_{i^{(n)}}\}_{i^{(n)} \in \tilde{I}}, \tilde{\Pi}^\vee := \{\beta_{i^{(n)}}^\vee\}_{i^{(n)} \in \tilde{I}}, \tilde{P}, \tilde{P}^\vee)$$

とする. $\tilde{\mathfrak{h}} := \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{Z}} \tilde{P}^\vee$ とおき, 付随する Kac–Moody Lie 環を $\tilde{\mathfrak{g}} = \tilde{\mathfrak{g}}(B)$ とする. Borcherds–Cartan 行列 A が対称化可能であるならば, 上のようにして作った B も対称化可能であることに注意されたい.

各 $\mu \in P$ に対して, 以下の条件を満たす $\tilde{\mu} \in \tilde{P}$ を一つずつ取り固定する:

$$\beta_{i^{(n)}}^\vee(\tilde{\mu}) = \alpha_i^\vee(\mu) \text{ for all } i^{(n)} \in \tilde{I}.$$

$\tilde{\mathbb{P}}$ を今作った Cartan データに対するパスの集合とし, $\tilde{\mathbb{B}}(\tilde{\mu})$ を型 $\tilde{\mu}$ の (G)LS パス全体の集合とする. $\tilde{\mathcal{F}} := \langle f_{i^{(m)}} \mid i^{(m)} \in \tilde{I} \rangle_{\text{monoid}}$ とおき, $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in P$ (resp., $\tilde{\lambda}_1, \dots, \tilde{\lambda}_n \in \tilde{P}$), に対して $\pi_{\lambda_1, \dots, \lambda_n} := \pi_{\lambda_1} \otimes \dots \otimes \pi_{\lambda_n} \in \mathbb{P}$ (resp., $\pi_{\tilde{\lambda}_1, \dots, \tilde{\lambda}_n} := \pi_{\tilde{\lambda}_1} \otimes \dots \otimes \pi_{\tilde{\lambda}_n} \in \tilde{\mathbb{P}}$) と定める.

記号をいくつか導入する. $\mathbf{i} = (i_k, \dots, i_2, i_1) \in I^k$ と $\mathbf{m} = (m_k, \dots, m_2, m_1) \in \mathbb{Z}^k$ に対して $\mathbf{i}^{(\mathbf{m})} := (i_k^{(m_k)}, \dots, i_2^{(m_2)}, i_1^{(m_1)})$ とおく. また, $\mathcal{I} := \bigcup_{k=1}^{\infty} I^k$, $\tilde{\mathcal{I}} := \bigcup_{k=1}^{\infty} \tilde{I}^k$ と定め, 以下の2条件を満たすような $\tilde{\mathcal{I}}$ の元 $\mathbf{i}^{(\mathbf{m})} = (i_k^{(m_k)}, \dots, i_2^{(m_2)}, i_1^{(m_1)})$ の全体を $\tilde{\mathcal{I}}_{\text{ord}}$ とする:

- ・ 各 $i_r \in I^{re}$ に対して $m_r = 1$ である.
- ・ 各 $i \in I^{im}$ に対して, $\{x \mid i_x = i, 1 \leq x \leq k\} = \{x_1, x_2, \dots, x_t\}$ かつ $1 \leq x_1 < x_2 < \dots < x_t \leq k$ のとき, 各 $s = 1, 2, \dots, t$ について $m_{x_s} = s$ である.

すると, $\mathbf{i}^{(\mathbf{m})} \in \tilde{\mathcal{I}}_{\text{ord}}$ なる $\mathbf{m}$ は $\mathbf{i}$ に対して一意的に定まることに注意されたい. これらの記号を用いて, $\mathbf{i} = (i_k, \dots, i_2, i_1) \in \mathcal{I}$ に対して $F_{\mathbf{i}} := f_{i_k} \cdots f_{i_2} f_{i_1} \in \mathcal{F}$, $\mathbf{i}^{(\mathbf{m})} = (i_k^{(m_k)}, \dots, i_2^{(m_2)}, i_1^{(m_1)}) \in \tilde{\mathcal{I}}$ に対して $F_{\mathbf{i}^{(\mathbf{m})}} := f_{i_k^{(m_k)}} \cdots f_{i_2^{(m_2)}} f_{i_1^{(m_1)}} \in \tilde{\mathcal{F}}$ と書く.

命題 5.1.1 $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathcal{WP}^+$ に対して, 次の写像 $\sim$ は *well-defined* であり, 単射である:

$$\sim : \mathcal{F}\pi_{\lambda_1, \dots, \lambda_n} \longrightarrow \tilde{\mathcal{F}}\pi_{\tilde{\lambda}_1, \dots, \tilde{\lambda}_n}, \quad \pi := F_{\mathbf{i}}\pi_{\lambda_1, \dots, \lambda_n} \longmapsto \tilde{\pi} := F_{\mathbf{i}^{(\mathbf{m})}}\pi_{\tilde{\lambda}_1, \dots, \tilde{\lambda}_n}.$$

ここで $\mathbf{m}$ は $\mathbf{i} \in \mathcal{I}$ に対して $\mathbf{i}^{(\mathbf{m})} \in \tilde{\mathcal{I}}_{\text{ord}}$ となる (唯一つの) 元である.

この命題の写像 $\sim$ は, 一般にはクリスタルとしての射ではない. しかし, 次の条件

- ・ $i \in I^{re}$ かつ $m = 1$, または,
- ・ $\pi = F_{\mathbf{i}}\pi_{\lambda_1, \dots, \lambda_n} \in \mathcal{F}\pi_{\lambda_1, \dots, \lambda_n}$, $i \in I^{im}$ であり, $\mathbf{i}$ に属する i の個数が $m - 1$ である.

のもとでは, $\widetilde{f_i \pi} = f_{i^{(m)}} \tilde{\pi}$ なる可換性が成立する.

例 5.1.2 $A = \left(\begin{array}{c|ccc} 2 & -1 & -1 & -1 & -1 & \cdots \\ -2 & 2 & -4 & -4 & -4 & \cdots \\ -2 & -4 & 2 & -4 & -4 & \cdots \\ -2 & -4 & -4 & 2 & -4 & \cdots \\ -2 & -4 & -4 & -4 & 2 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{array} \right)$ を与えられた *Borcherds–Cartan* 行列とする. 添字集合は $I = \{1, 2\}$, $I^{re} = \{1\}$, $I^{im} = \{2\}$ となる. このとき, $\tilde{I} := \{1^{(1)}\} \sqcup \{2^{(1)}, 2^{(2)}, 2^{(3)}, 2^{(4)}, \dots\}$ であり, *Cartan* 行列は次のようになる:

$$B := \left(\begin{array}{c|cccc} 2 & -1 & -1 & -1 & -1 & \cdots \\ -2 & 2 & -4 & -4 & -4 & \cdots \\ -2 & -4 & 2 & -4 & -4 & \cdots \\ -2 & -4 & -4 & 2 & -4 & \cdots \\ -2 & -4 & -4 & -4 & 2 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{array} \right).$$

型 λ の *GLS* パス $\pi = f_2 f_2 f_1 f_2 f_2 f_2 f_1 f_1 f_2 f_2 \pi_{\lambda} \in \mathbb{B}(\lambda)$ に対応する型 $\tilde{\lambda}$ の *LS* パス $\tilde{\pi}$ は以下で与えられる:

$$\tilde{\pi} := f_{2^{(7)}} f_{2^{(6)}} f_{1^{(1)}} f_{2^{(5)}} f_{2^{(4)}} f_{2^{(3)}} f_{1^{(1)}} f_{1^{(1)}} f_{2^{(2)}} f_{2^{(1)}} \pi_{\tilde{\lambda}} \in \tilde{\mathbb{B}}(\tilde{\lambda}).$$

ここで, $\mathbf{i} := (2, 2, 1, 2, 2, 2, 1, 1, 2, 2) \in \mathcal{I}$ に対して, $\mathbf{i}^{(\mathbf{m})} = (2^{(7)}, 2^{(6)}, 1^{(1)}, 2^{(5)}, 2^{(4)}, 2^{(3)}, 1^{(1)}, 1^{(1)}, 2^{(2)}, 2^{(1)}) \in \tilde{\mathcal{I}}_{\text{ord}}$ であり, $\pi = F_{\mathbf{i}}\pi_{\lambda}$, $\tilde{\pi} = F_{\mathbf{i}^{(\mathbf{m})}}\pi_{\tilde{\lambda}}$ である.

5.2 パス模型の同型定理

命題 5.1.1 を利用すると、次のパス模型の同型定理を証明することができる。

定理 5.2.1 $\lambda \in P^+$ に対して、 $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathcal{WP}^+$ であり、 $\lambda = \lambda_1 + \dots + \lambda_n$ かつ $\pi_{\lambda_1, \dots, \lambda_n}(t) \in \sum_{\mu \in P^+} \mathbb{R}_{\geq 0} \mu$ が各 $t \in [0, 1]$ に対して成り立つようなものをとる。このとき、次のクリスタルとしての同型が成り立つ：

$$\mathbb{B}(\lambda) \cong \mathcal{F}\pi_{\lambda_1, \dots, \lambda_n}.$$

ただし、右辺のクリスタルの構造は §3.2 における議論と同様の方法で定めたものである。

証明. $\tilde{\lambda} = \tilde{\lambda}_1 + \dots + \tilde{\lambda}_n \in \tilde{P}^+$ であり、パス $\pi_{\tilde{\lambda}_1, \dots, \tilde{\lambda}_n}$ に対しても $\pi_{\tilde{\lambda}_1, \dots, \tilde{\lambda}_n}(t) \in \sum_{\tilde{\mu} \in \tilde{P}^+} \mathbb{R}_{\geq 0} \tilde{\mu}$ が各 $t \in [0, 1]$ に対して成り立つことに注意する。このとき、Kac–Moody Lie 環の場合の Littelmann のパス模型の一般論 ([Li2, Theorem 7.1]) により、

$$\tilde{\mathbb{B}}(\tilde{\lambda}) \xrightarrow{\cong} \tilde{\mathcal{F}}\pi_{\tilde{\lambda}_1, \dots, \tilde{\lambda}_n}, \quad F\pi_{\tilde{\lambda}} \mapsto F\pi_{\tilde{\lambda}_1, \dots, \tilde{\lambda}_n} \quad (F \in \tilde{\mathcal{F}})$$

なるクリスタルの同型が成り立つ。従って、命題 4.1.1 により $\mathbb{B}(\lambda)$, $\mathcal{F}\pi_{\lambda_1, \dots, \lambda_n}$ をそれぞれ $\tilde{\mathbb{B}}(\tilde{\lambda})$, $\tilde{\mathcal{F}}\pi_{\tilde{\lambda}_1, \dots, \tilde{\lambda}_n}$ に埋め込めば、この同型を通して求めるクリスタルの同型を得る。□

6 $\mathbb{B}(\lambda)$ と $B(\lambda)$ のクリスタルとしての同型

6.1 $\mathbb{B}(\lambda) \cong B(\lambda)$ の証明

$B(\lambda)$ を最高ウェイト $\lambda \in P^+$ の既約最高ウェイト $U_q(\mathfrak{g})$ -加群の結晶基底とする (cf. §2.1).

定理 6.1.1 各 $\lambda \in P^+$ に対して、クリスタルとしての同型 $\mathbb{B}(\lambda) \cong B(\lambda)$ が成り立つ。

証明. まず、各 $\lambda, \mu \in P^+$ に対して次のような写像を考える：

$$\psi_{\lambda, \lambda+\mu} : \mathbb{B}(\lambda) \longrightarrow \mathbb{B}(\lambda) \otimes \mathbb{B}(\mu), \quad \pi \longmapsto \pi \otimes \pi_\mu.$$

すると、定理 4.1.1 より $\pi \otimes \pi_\mu \in \mathcal{F}(\pi_\lambda \otimes \pi_\mu)$ であることがわかる。また、定理 5.2.1 より $\mathcal{F}(\pi_\lambda \otimes \pi_\mu) \cong \mathbb{B}(\lambda + \mu)$ であるので、上の写像 $\psi_{\lambda, \lambda+\mu}$ は集合としての埋め込み $\mathbb{B}(\lambda) \hookrightarrow \mathbb{B}(\lambda + \mu)$ を与える。この埋め込みは、ウェイトの差を除けばクリスタルとしての射の条件を満たしている。そこで、 $\lambda, \mu \in P^+$ に対して、 $\lambda - \mu \in P^+$ ならば $\lambda \succeq \mu$ と定義することで、 P^+ を有向順序集合とし、 $\{\mathbb{B}(\lambda) \ (\lambda \in P^+); \psi_{\mu, \nu} \ (\mu, \nu \in P^+)\}$ なる (集合としての) 帰納系を得る。この帰納極限を $\mathbb{B}(\infty) := \varinjlim \mathbb{B}(\lambda)$ とおく。 $\mathbb{B}(\infty)$ には、自然な方法でクリスタルの構造を定義することができ、これは定理 2.1.2 における $B(\infty)$ と同型になる (cf. [JKKS, JL])。一方、直接計算することにより、クリスタルとしての埋め込み

$$\mathbb{B}(\lambda) \hookrightarrow \mathbb{B}(\infty) \otimes \mathcal{T}_\lambda \otimes C$$

であって、 π_λ を $\pi_\infty \otimes t_\lambda \otimes c$ に写すものが各 $\lambda \in P^+$ に対して唯一つ存在することがわかる。ただし、 π_∞ はウェイト 0 を持つ唯一つの $\mathbb{B}(\infty)$ の元であり、 $\mathcal{T}_\lambda$ と C は例 2.2.2 におけるクリスタルである。この埋め込みは、クリスタルとしての同型 $\mathbb{B}(\lambda) \cong \mathcal{F}(\pi_\infty \otimes t_\lambda \otimes c)$ を引き起こすので、定理 2.2.3 より、 $\mathbb{B}(\lambda) \cong B(\lambda)$ となることがわかる。□

注意 6.1.2 この定理と命題 5.1.1 より, 結果として結晶基底の上で (集合としての) 埋め込み

$$B(\lambda) \hookrightarrow \tilde{B}(\tilde{\lambda}), F_{\mathbf{i}} u_{\lambda} \mapsto F_{\mathbf{i}^{(\mathbf{m})}} \tilde{u}_{\tilde{\lambda}} \quad (\mathbf{i}^{(\mathbf{m})} \in \tilde{\mathcal{I}}_{\text{ord}})$$

を得る. ただし, $\tilde{B}(\tilde{\lambda})$ は最高ウェイト $\tilde{\lambda} \in \tilde{P}^+$ の既約最高ウェイト $U_q(\tilde{\mathfrak{g}})$ -加群の結晶基底であり, $\tilde{u}_{\tilde{\lambda}}$ はその最高ウェイト・ベクトルである. 特に, この埋め込みも命題 5.1.1 の後に述べた性質を満たす.

7 パス模型の表現論への応用

7.1 テンソル積の分解則

$\lambda \in P$ に対して, パス $\pi \in \mathbb{P}$ が λ -dominant であるとは, 各 $t \in [0, 1]$ に対して $\pi(t) + \lambda \in \sum_{\mu \in P^+} \mathbb{R}_{\geq 0} \mu$ となることである. 命題 5.1.1 を用いて計算することにより, 次がわかる.

補題 7.1.1 $\lambda, \mu \in P^+$ とする. このとき, $\pi_1 \otimes \pi_2 \in \mathbb{B}(\lambda) \otimes \mathbb{B}(\mu)$ が全ての $i \in I$ に対して $e_i(\pi_1 \otimes \pi_2) = \mathbf{0}$ となるための必要十分条件は, $\pi_1 = \pi_{\lambda}$ かつ $\tilde{\pi}_2 \in \tilde{\mathbb{B}}(\tilde{\mu})$ が $\tilde{\lambda}$ -dominant となることである.

この補題と, 定理 2.1.2 (1), 定理 6.1.1 により, 以下のテンソル積の分解則を得る.

定理 7.1.2 $\lambda, \mu \in P^+$ とする. このとき, 以下の $U_q(\mathfrak{g})$ -加群の同型が成り立つ:

$$V(\lambda) \otimes V(\mu) \cong \bigoplus_{\substack{\pi \in \mathbb{B}(\mu) \\ \tilde{\pi} : \tilde{\lambda}\text{-dominant}}} V(\lambda + \pi(1)).$$

7.2 Levi 部分代数への制限に関する分岐則

$S \subset I$ に対応する $\mathfrak{g}$ の Levi 部分代数を $\mathfrak{g}_S$ とする. このとき, 対応する量子展開環は $U_q(\mathfrak{g}_S) = \langle e_i, f_i \ (i \in I), q^h \ (h \in P^\vee) \rangle \subset U_q(\mathfrak{g})$ となる. また, この S に対して, $\tilde{S} \subset \tilde{I}$ を以下で定める:

$$\tilde{S} := \{i^{(1)} \mid i \in S \cap I^{\text{re}}\} \sqcup \{i^{(n)} \mid i \in S \cap I^{\text{im}}, n = 1, 2, 3, \dots\}.$$

この $\tilde{S}$ に対応する $\tilde{\mathfrak{g}}$ の Levi 部分代数を $\tilde{\mathfrak{g}}_{\tilde{S}}$ とする. パス $\pi \in \mathbb{P}$ が $\mathfrak{g}_S$ -dominant であるとは, $\mathfrak{g}_S$ に関する優整ウェイト全体の集合 P_S^+ に対して, $\pi(t) \in \sum_{\mu \in P_S^+} \mathbb{R}_{\geq 0} \mu$ が各 $t \in [0, 1]$ に対して成り立つことをいう. 補題 7.1.1 と同様の議論により以下を得る.

補題 7.2.1 $\lambda \in P^+$ とする. このとき, $\pi \in \mathbb{B}(\lambda)$ が全ての $i \in S$ に対して $e_i \pi = \mathbf{0}$ となるための必要十分条件は, $\tilde{\pi} \in \tilde{\mathbb{B}}(\tilde{\lambda})$ が $\tilde{\mathfrak{g}}_{\tilde{S}}$ -dominant となることである.

この補題と, 定理 2.1.2 (2), 定理 6.1.1 により, 以下の分岐則を得る.

定理 7.2.2 $\lambda \in P^+$ とする. このとき, 以下の $U_q(\mathfrak{g}_S)$ -加群としての同型が成り立つ:

$$V(\lambda) \cong \bigoplus_{\substack{\pi \in \mathbb{B}(\lambda) \\ \tilde{\pi} : \tilde{\mathfrak{g}}_{\tilde{S}}\text{-dominant}}} V_S(\pi(1)).$$

ただし, $V_S(\mu)$ は最高ウェイト μ の既約最高ウェイト $U_q(\mathfrak{g}_S)$ -加群を表す.

7.3 Demazure クリスタルと Demazure 指標公式

$\lambda \in P^+$ とし, 最高ウェイト λ の既約最高ウェイト $U_q(\mathfrak{g})$ -加群 $V(\lambda)$ を考える. 通常の Kac–Moody Lie 環の場合とは異なり, $w \in \mathcal{W}$ に対するウェイト $w\lambda$ のウェイト空間 $V(\lambda)_{w\lambda}$ の次元は 1 より大きくなる場合がある. また, 通常の Kac–Moody Lie 環の Demazure 加群の類似で $V_w(\lambda) := U_q^+(\mathfrak{g})V(\lambda)_{w\lambda}$ なる部分 $U_q^+(\mathfrak{g})$ -加群を考えることができるが, その詳細な構造はよく分かっていない. ところが, パス模型を利用することで, ある特別な条件のもとでは, $V_w(\lambda)$ に対する詳細な記述を与えることができる. 特に, 通常の Kac–Moody Lie 環の場合に知られている Demazure 指標公式の類似の公式を与えることができる.

$\lambda \in P^+$ に対して, 次の条件を満たす $\mathcal{W}$ の元 w を考える:

- w の最短表示 $w = v_0 r_{j_1} v_1 \cdots r_{j_l} v_l$, $j_1, \dots, j_l \in I^{im}$, $v_0, v_1, \dots, v_l \in \mathcal{W}_{re}$ であって,

$$\alpha_{j_s}^\vee(v_s r_{j_{s+1}} v_{s+1} \cdots r_{j_l} v_l \lambda) = 1$$

が各 $s = 1, 2, \dots, l$ について成立するようなものが存在する.

このような $w \in \mathcal{W}$ に対しては, 次が成立する.

定理 7.3.1 λ, w を上のようにとる. このとき, 結晶基底のある部分集合 $B_w(\lambda) \subset B(\lambda)$ であって, 次を満たすものが存在する:

$$V_w(\lambda) = \bigoplus_{b \in B_w(\lambda)} \mathbb{C}(q)G_\lambda(b).$$

ただし $\{G_\lambda(b) \mid b \in B(\lambda)\}$ は $V(\lambda)$ の大域結晶基底である (大域結晶基底の詳細な定義については [JKK] を参照されたい).

この定理の $B_w(\lambda)$ のことを Demazure クリスタルと呼ぶことにする. Demazure クリスタルの詳細な記述を与えるために w の表示を次のように取り直す.

補題 7.3.2 上の条件を満たす $w \in \mathcal{W}$ は次のような表示を持つ:

- $w_0, w_1, \dots, w_k \in \mathcal{W}_{re}$ と, 相異なる $i_1, \dots, i_k \in I^{im}$ が存在して, $w = w_0 r_{i_1}^{a_1} w_1 \cdots r_{i_k}^{a_k} w_k$ となる. ただし, $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$.

補題 7.3.2 のような表示 $w = w_0 r_{i_1}^{a_1} w_1 \cdots r_{i_k}^{a_k} w_k$ のうちで, 非負整数の列

$$(\ell(w_k), \dots, \ell(w_1), \ell(w_0))$$

が辞書式順序に関して最小となる表示を一つ固定して, それを $w = w_0 r_{i_1}^{a_1} w_1 \cdots r_{i_k}^{a_k} w_k$ とする. この表示に関して, 次のような Demazure クリスタルの記述を得る.

系 7.3.3 上のような w の表示に関して,

$$B_w(\lambda) = \left\{ \tilde{F}_{w_0}^{\mathbf{m}_0} \tilde{f}_{i_1}^{\epsilon_1} \tilde{F}_{w_1}^{\mathbf{m}_1} \cdots \tilde{f}_{i_k}^{\epsilon_k} \tilde{F}_{w_k}^{\mathbf{m}_k} u_\lambda \mid 0 \leq \epsilon_s \leq a_s, \mathbf{m}_s \in (\mathbb{Z}_{\geq 0})^{\ell(w_s)} \right\} \setminus \{0\}.$$

ただし, 最短表示 $v = r_{j_1} \cdots r_{j_l} \in \mathcal{W}_{re}$ と $\mathbf{m} = (m_1, \dots, m_l) \in (\mathbb{Z}_{\geq 0})^l$ に対して, $\tilde{F}_v^{\mathbf{m}} := \tilde{f}_{j_1}^{m_1} \cdots \tilde{f}_{j_l}^{m_l}$ は柏原作用素の単項式である.

注意 7.3.4 系 7.3.3 の記述において, 通常の *Kac–Moody Lie* 環の場合と異なる点は, 各 $i \in I^{im}$ に対する f_i の当たる回数に制限があることである.

最後に Demazure 指標公式の類似となる公式を与える. まず, Demazure 作用素の類似で以下のような作用素を定義する.

- ・ 各 $w \in \mathcal{W}_{re}$ に対して, $\mathcal{D}_w$ を通常の Demazure 作用素と同様に定義する. すなわち, 各 $i \in I^{re}$ に対して, 作用素 $\mathcal{D}_i$ を

$$\mathcal{D}_i(e^\lambda) := \frac{e^\lambda - e^{\lambda - (1 + \alpha_i^\vee(\lambda))\alpha_i}}{1 - e^{-\alpha_i}}$$

と定めたとき, w の最短表示 $w = r_{i_1} \cdots r_{i_k}$ に対して $\mathcal{D}_w := \mathcal{D}_{i_1} \cdots \mathcal{D}_{i_k}$ とする.

- ・ 各 $i \in I^{im}$ と正整数 $a \geq 1$ に対して, 作用素 $\mathcal{D}_i^{(a)}$ を次で定める:

$$\mathcal{D}_i^{(a)}(e^\lambda) := \begin{cases} e^\lambda & \text{if } \alpha_i^\vee(\lambda) = 0, \\ \sum_{m=0}^a e^{\lambda - m\alpha_i} & \text{otherwise.} \end{cases}$$

定理 7.3.5 補題 7.3.2 の後に述べた w の表示 $w = w_0 r_{i_1}^{a_1} w_1 \cdots r_{i_k}^{a_k} w_k$ に対して次が成り立つ:

$$\text{ch } V_w(\lambda) = \mathcal{D}_{w_0} \mathcal{D}_{i_1}^{(a_1)} \mathcal{D}_{w_1} \cdots \mathcal{D}_{i_k}^{(a_k)} \mathcal{D}_{w_k}(e^\lambda).$$

参考文献

- [BB] A. Björner and F. Brenti, *Combinatorics of Coxeter Groups*, Grad. Texts in Math., vol. **231**, Springer, New York, (2005).
- [HK] J. Hong and S.-J. Kang, *Introduction to Quantum Groups and Crystal Bases*, Grad. Studies in Math. **42**, American Mathematical Society, Providence, RI (2002).
- [Hu] J. E. Humphreys, *Reflection Groups and Coxeter Groups*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics **29**, Cambridge University Press, Cambridge, (1990).
- [JKK] K. Jeong, S.-J. Kang and M. Kashiwara, Crystal bases for quantum generalized Kac–Moody algebras, *Proc. Lond. Math. Soc.* (3) **90** (2005), no. 2, 395–438.
- [JKKS] K. Jeong, S.-J. Kang, M. Kashiwara and D.-U. Shin, Abstract crystals for quantum generalized Kac–Moody algebras, *Int. Math. Res. Not. IMRN* (2007), no. 1, Art. ID rnm001, 19 pp.
- [Jo] A. Joseph, *Quantum Groups and Their Primitive Ideals*, Results in Mathematics and Related Areas (3), **29**, Springer-Verlag, Berlin, (1995).
- [JL] A. Joseph and P. Lamprou, A Littelmann path model for crystals of generalized Kac–Moody algebras, *Adv. Math.* **221** (2009) 2019–2058.
- [Kac] V. G. Kac, *Infinite Dimensional Lie Algebras*, 3rd edition, Cambridge University Press, Cambridge, (1990).

- [**Kas1**] M. Kashiwara, The crystal base and Littelmann's refined Demazure character formula, *Duke Math. J.* **71** (1993), no. 3, 839-858.
- [**Kas2**] M. Kashiwara, On crystal bases, *Representations of groups (Banff, AB, 1994)*, 155-197, *CMS Conf. Proc.*, **16**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, (1995).
- [**Kas3**] M. Kashiwara, Similarity of crystal bases, *Lie Algebras and Their Representations (Seoul, 1995)*, 177-186, *Contemp. Math.*, **194**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, (1996).
- [**Li1**] P. Littelmann, A Littlewood–Richardson rule for symmetrizable Kac–Moody algebras, *Inv. Math.* **116** (1994) 329-346.
- [**Li2**] P. Littelmann, Paths and root operators in representation theory, *Ann. of Math.* **124** (1995) 499-525.
- [**Li3**] P. Littelmann, A plactic algebra for semisimple Lie algebras, *Adv. Math.* **124** (1996) 312-331.
- [**NS**] S. Naito and D. Sagaki, Lakshmibai–Seshadri paths fixed by a diagram automorphism, *J. Algebra* **245** (2001) 395-412.