

Spinor Representations and Symmetric Functions

名古屋大学多元数理科学研究科

岡田 聡一 (Soichi OKADA)

1 はじめに

複素数体上の古典群（一般線型群 GL_n ，斜交群 Sp_N ，直交群 O_N など）の表現論において，Young 図形や対称関数などの組合せ論は，きわめて有効な手法を与えている．

例えば，一般線型群 GL_n の多項式表現の場合，既約多項式表現は長さ n 以下の分割でパラメトライズされ，長さ n 以下の分割 λ に対応する既約多項式表現 V_λ の指標 S_λ は，

$$S_\lambda = \det \left(H_{\lambda_i - i + j} \right)_{1 \leq i, j \leq n} \quad (1)$$

と， GL_n の自然表現（ベクトル表現）の対称テンソル積表現の指標 H_k を用いて行列式の形で表される．一方，無限個の変数 $X = (x_1, x_2, \dots)$ に関する（整数係数の）対称関数環 Λ において，分割 λ に対応する Schur 関数 $s_\lambda \in \Lambda$ は，完全対称式 h_k ，基本対称式 e_k を用いて

$$s_\lambda = \det \left(h_{\lambda_i - i + j} \right)_{1 \leq i, j \leq r} = \det \left(e_{t\lambda_i - i + j} \right)_{1 \leq i, j \leq s} \quad (2)$$

（ここで， $r \geq l(\lambda)$ ， $s \geq l(t\lambda)$ であり， $t\lambda$ は λ の共役分割である）と表される．（対称関数については [9, Chap. I] を参照されたい．）環準同型写像 $\pi_{\mathrm{GL}_n} : \Lambda \rightarrow \mathrm{Rep}(\mathrm{GL}_n)$ を $\pi_{\mathrm{GL}_n}(h_k) = H_k$ ($k \geq 0$) によって定義する．行列式表示 (1), (2) と， $k > n$ のとき $\pi_{\mathrm{GL}_n}(e_k) = 0$ となることに注意すると，

$$\pi_{\mathrm{GL}_n}(s_\lambda) = \begin{cases} S_\lambda & (l(\lambda) \leq n \text{ のとき}) \\ 0 & (l(\lambda) > n \text{ のとき}) \end{cases}$$

となることがわかる．従って，環準同型写像 π_{GL_n} を通して，対称関数環 Λ における Schur 関数の間の関係式から，表現環 $\mathrm{Rep}(\mathrm{GL}_n)$ における既約指標の間の関係式が導かれる．この意味で，Schur 関数 s_λ は， GL_n の多項式表現に対する「普遍指標」と考えられる．例えば， Λ における関係式

$$s_\mu s_\nu = \sum_{\lambda} \mathrm{LR}_{\mu, \nu}^\lambda s_\lambda \quad (3)$$

（ここで， λ は分割全体をわたり， $\mathrm{LR}_{\mu, \nu}^\lambda$ は Littlewood–Richardson 係数である）から， $\mathrm{Rep}(\mathrm{GL}_n)$ における関係式

$$S_\mu S_\nu = \sum_{l(\lambda) \leq n} \mathrm{LR}_{\mu, \nu}^\lambda S_\lambda$$

(ここで, μ, ν は長さ n 以下の分割であり, λ は長さ n 以下の分割全体をわたる) が導かれる. よって, テンソル積 $V_\mu \otimes V_\nu$ における V_λ の重複度 $[V_\mu \otimes V_\nu : V_\lambda]$ が $\text{LR}_{\mu, \nu}^\lambda$ に等しく, Littlewood–Richardson 規則を用いて組合せ論的に計算することができることがわかる. 同様に, GL_{m+n} から部分群 $\text{GL}_m \times \text{GL}_n$ への制限についても, Schur 関数の間の関係式

$$s_\lambda(X \cup Y) = \sum_{\mu, \nu} \text{LR}_{\mu, \nu}^\lambda s_\mu(X) s_\nu(Y) \quad (4)$$

から,

$$\text{Res}_{\text{GL}_m \times \text{GL}_n}^{\text{GL}_{m+n}} S_\lambda = \sum_{l(\mu) \leq m, l(\nu) \leq n} \text{LR}_{\mu, \nu}^\lambda S_\mu \otimes S_\nu$$

となることがわかる.

このように, 古典群の表現論を対称関数 (普遍指標) を用いて記述するというアプローチは, 一般線型群の有理表現の場合も含めて, D. E. Littlewood, R. C. King, B. G. Wybourne, 小池 和彦, 寺田 至らによってなされている ([8], [5], [6] やそこに挙げられている文献を見よ.)

この報告では, ピン群 Pin_N のスピノル表現 (からスピン表現の寄与を除いたもの) を記述する対称関数 (スピノル普遍指標) の族を導入し, それを利用してスピノル表現のテンソル積などの分解を計算するアルゴリズムを与える. §2 で直交群に対する普遍指標について復習した後, §3 で Pin_N のスピノル表現の既約指標の行列式による表示を与え, §4 ではその表示を参考にスピノル普遍指標を定義し, その性質を調べる. そして, §5 ではスピノル普遍指標を利用してスピノル表現のテンソル積などの分解を調べる.

同様のアプローチは, [3], [4] でもなされており, スピノル表現のテンソル積, 制限の分解について, この報告の §5 で与えたものと本質的に同じ結果が述べられている. しかし, 既約スピノル表現の指標の行列式表示 (定理 3.1) などとは与えられていない. また, スピノル表現のテンソル積, 制限の分解を与える公式は [6] でも与えられているが, 一部の公式には見かけ上負の係数が現れている.

2 直交群に対する普遍指標

まず, 直交群に対する普遍指標について復習する. 詳細は, 例えば [11, 第 12 章] を参照されたい.

N を非負整数とする. 分割 λ は, $l_1 + l_2 \leq N$ をみたす (つまり, λ の Young 図形の第 1 列の長さ第 2 列の長さの和が N 以下である) とき, N 直交分割 (N -orthogonal partition) であるという. このとき, N 次直交群 O_N の既約表現は N 直交分割でパラメトライズされ, 対応する既約表現を $V_{[\lambda]} = V_{[\lambda], \text{O}_N}$, 既約指標を $S_{[\lambda]} = S_{[\lambda], \text{O}_N}$ と表すと, $S_{[\lambda]}$ は

$$S_{[\lambda], \text{O}_N} = \det \left(H_{\lambda_i - i + j} - H_{\lambda_i - i - j} \right)_{1 \leq i, j \leq r} \quad (5)$$

(ただし, $r \geq l(\lambda)$) と表される. ここで, H_k は, O_N の自然表現 (ベクトル表現) $\mathbb{C}^N$ の k 階対称テンソル積表現の指標であり, $k < 0$ のときは $H_k = 0$ であると約束する. 直交群 O_N の表現環を $\text{Rep}(\text{O}_N)$ とする. つまり, $\text{Rep}(\text{O}_N)$ は $\{S_{[\lambda]} : \lambda \text{ は } N \text{ 直交分割}\}$ を基底とする自由 $\mathbb{Z}$ 加群であり, 積は表現のテンソル積に対応する.

行列式表示 (5) を念頭において、直交群に対する普遍指標を次のように定義する。

定義 2.1. 分割 λ に対して、対称関数 $s_{[\lambda]} \in \Lambda$ を

$$s_{[\lambda]} = \det \left(h_{\lambda_i - i + j} - h_{\lambda_i - i - j} \right)_{1 \leq i, j \leq l(\lambda)} \quad (6)$$

と定義し、直交普遍指標 (orthogonal universal character) と呼ぶ。また、環準同型写像 $\pi_{\mathbf{O}_N}: \Lambda \rightarrow \text{Rep}(\mathbf{O}_N)$ を

$$\pi_{\mathbf{O}_N}(h_k) = H_k \quad (k \geq 1)$$

によって定義する。

行列式表示 (5), (6) から明らかに、 λ が N 直交分割であるとき、

$$\pi_{\mathbf{O}_N}(s_{[\lambda]}) = S_{[\lambda], \mathbf{O}_N}$$

となる。よって、直交普遍指標の間の関係式から直交群の既約指標の間の関係式を導くことができる。ただし、Schur 関数の場合とは違って、 λ が N 直交分割でないとき $\pi_{\mathbf{O}_N}(s_{[\lambda]}) = 0$ となるとは限らないので、 $\pi_{\mathbf{O}_N}(s_{[\lambda]})$ を直交群の既約指標で具体的に表す必要がある。

まず、直交普遍指標の性質をまとめておく。

命題 2.2. (1) 変数 $X = (x_1, x_2, \dots)$, $U = (u_1, u_2, \dots)$ に対して、

$$\sum_{\lambda} s_{[\lambda]}(X) s_{\lambda}(U) = \frac{\prod_{i \leq j} (1 - u_i u_j)}{\prod_{i, j} (1 - x_i u_j)}. \quad (7)$$

(2) $s_{[\lambda]}$ は Schur 関数の線型結合として

$$s_{[\lambda]} = \sum_{\mu} \left(\sum_{\kappa} (-1)^{|\kappa|/2} \text{LR}_{\mu, \kappa}^{\lambda} \right) s_{\mu} \quad (8)$$

と表される。ここで、 κ は Frobenius 記法で $\kappa = (\alpha_1 + 1, \alpha_2 + 1, \dots | \alpha_1, \alpha_2, \dots)$ の形に表される分割全体をわたる。

(3) $\{s_{[\lambda]} : \lambda \text{ は分割}\}$ は Λ の $\mathbb{Z}$ 基底をなす。

(4) Λ の対合 ω ($\omega(e_k) = h_k$ ($k \geq 1$) によって定まる環準同型写像) に関して、

$$\omega(s_{[\lambda]}) = s_{\langle \iota \lambda \rangle}. \quad (9)$$

ここで、 $s_{\langle \mu \rangle}$ は

$$s_{\langle \mu \rangle} = \frac{1}{2} \det \left(h_{\mu_i - i + j} + h_{\mu_i - i - j + 2} \right)_{1 \leq i, j \leq l(\mu)}$$

によって与えられる斜交普遍指標である。

(5) $s_{[\lambda]}$ は、基本対称式 e_k を用いて

$$s_{[\lambda]} = \frac{1}{2} \det \left(e_{t\lambda_i - i + j} + e_{t\lambda_i - i - j + 2} \right)_{1 \leq i, j \leq l(t\lambda)} \quad (10)$$

と表される。

行列式表示 (10) の両辺に $\pi_{\mathbf{O}_N}$ を施すと,

$$\pi_{\mathbf{O}_N}(s_{[\lambda]}) = \frac{1}{2} \det \left(E_{t_{\lambda_i - i + j}} + E_{t_{\lambda_i - i - j + 2}} \right)_{1 \leq i, j \leq l(t\lambda)}.$$

ここで, E_k は $\mathbf{O}_N$ の自然表現の k 階交代テンソル積表現の指標である. よって, E_k の間の関係式

$$E_{N+1} = E_{N+2} = \cdots = 0, \quad E_N E_k = E_{N-k}$$

を用いると, λ が直交分割でないときの $\pi_{\mathbf{O}_N}(s_{[\lambda]})$ を既約指標で表すアルゴリズムを与えることができる.

命題 2.3. 分割 λ が直交分割でないとし,

$$\alpha = ({}^t\lambda_1, {}^t\lambda_2 - 1, \dots, {}^t\lambda_r - (r - 1)), \quad r = l({}^t\lambda)$$

とおく. このとき,

- (1) $\alpha_i \geq N + r$ となる i が存在するならば, $\pi_{\mathbf{O}_N}(s_{[\lambda]}) = 0$.
- (2) $\alpha_i + \alpha_j = N$ となる i, j が存在するならば, $\pi_{\mathbf{O}_N}(s_{[\lambda]}) = 0$.
- (3) (1), (2) のいずれでもない場合は,

$$\alpha_1 > \cdots > \alpha_p > \frac{N}{2} \geq \alpha_{p+1} > \cdots > \alpha_r$$

をみたす p をとり, 数列 β を

$$\beta = \begin{cases} (N - \alpha_1, \dots, N - \alpha_p, \alpha_{p+1}, \dots, \alpha_r) & (p \text{ が偶数のとき}) \\ (N - \alpha_1, \dots, N - \alpha_{p+1}, \alpha_{p+2}, \dots, \alpha_r) & (p \text{ が奇数で } \alpha_p + \alpha_{p+1} \geq N + 1 \text{ であるとき}) \\ (N - \alpha_1, \dots, N - \alpha_{p-1}, \alpha_p, \dots, \alpha_r) & (p \text{ が奇数で } \alpha_p + \alpha_{p+1} \leq N - 1 \text{ であるとき}) \end{cases}$$

とおいて定める. そして, β の成分を大きい順に並べ替えて得られる数列を γ とし, $\gamma = \sigma(\beta)$ となる置換 $\sigma \in \mathfrak{S}_r$ をとる. このとき,

$$\gamma = ({}^t\mu_1, {}^t\mu_2 - 1, \dots, {}^t\mu_r - (r - 1))$$

によって定まる分割 μ は N 直交分割であり,

$$\pi_{\mathbf{O}_N}(s_{[\lambda]}) = \text{sgn}(\sigma) S_{[\mu]}$$

となる.

標準同型写像 $\pi_{\mathbf{O}_N} : \Lambda \rightarrow \text{Rep}(\mathbf{O}_N)$ と命題 2.3 のアルゴリズムを用いることにより, 直交普遍指標の間の関係式から直交群の既約指標の間の関係式を導くことができる. 例えば, テンソル積の分解については,

定理 2.4. 対称関数環 Λ において,

$$s_{[\mu]} s_{[\nu]} = \sum_{\lambda} \left(\sum_{\tau, \xi, \eta} \text{LR}_{\tau, \xi}^{\mu} \text{LR}_{\tau, \eta}^{\nu} \text{LR}_{\xi, \eta}^{\lambda} \right) s_{[\lambda]}.$$

ここで, λ, τ, ξ, η は分割全体をわたる.

よって、両辺に環準同型写像 $\pi_{\mathbf{O}_N}$ を施すと、 μ, ν が N 直交分割であるとき、

$$S_{[\mu]}S_{[\nu]} = \sum_{\lambda} \left(\sum_{\tau, \xi, \eta} \text{LR}_{\tau, \xi}^{\mu} \text{LR}_{\tau, \eta}^{\nu} \text{LR}_{\xi, \eta}^{\lambda} \right) \pi_{\mathbf{O}_N}(s_{[\lambda]})$$

となり、命題 2.3 のアルゴリズムと合わせて、表現環 $\text{Rep}(\mathbf{O}_N)$ における $S_{[\mu]}S_{[\nu]}$ の実際の分解を計算することができる。特に、Littlewood–Richardson 係数の性質から、

$${}^t\beta_1 + {}^t\beta_2 + {}^t\gamma_1 + {}^t\gamma_2 \geq {}^t\alpha_1 + {}^t\alpha_2 \geq \max({}^t\beta_1 + {}^t\beta_2, {}^t\gamma_1 + {}^t\gamma_2)$$

が成り立たなければ $\text{LR}_{\beta, \gamma}^{\alpha} = 0$ となることに注意すると、 N が μ, ν に比べて大きい場合の公式が得られる。

系 2.5. ${}^t\mu_1 + {}^t\mu_2 + {}^t\nu_1 + {}^t\nu_2 \leq N$ であるとき、

$$S_{[\mu]}S_{[\nu]} = \sum_{\lambda} \left(\sum_{\tau, \xi, \eta} \text{LR}_{\tau, \xi}^{\mu} \text{LR}_{\tau, \eta}^{\nu} \text{LR}_{\xi, \eta}^{\lambda} \right) S_{[\lambda]}.$$

ここで、 λ は N 直交分割全体をわたる。

この系から、分割 λ, μ, ν が与えられたとき、 N が十分大きければ、重複度 $[V_{[\mu]} \otimes V_{[\nu]} : V_{[\lambda]}]$ は N によらないことがわかる。

同様に、 $\mathbf{O}_{M+N}$ から部分群 $\mathbf{O}_M \times \mathbf{O}_N$ への制限の分解についても、次の直交普遍指標の関係式から導くことができる。

定理 2.6. 変数 $X = (x_1, x_2, \dots), Y = (y_1, y_2, \dots)$ に対して、

$$s_{[\lambda]}(X \cup Y) = \sum_{\mu, \nu} \left(\sum_{\kappa} \text{LR}_{\mu, \nu, \kappa}^{\lambda} \right) s_{[\mu]}(X) s_{[\nu]}(Y).$$

ここで、 μ, ν は分割全体を、 κ は成分 κ_i がすべて偶数であるような分割全体をわたり、 $\text{LR}_{\mu, \nu, \kappa}^{\lambda}$ は 3 つの Schur 関数の積 $s_{\mu} s_{\nu} s_{\kappa}$ における s_{λ} の係数である。

3 スピノル表現

ピン群 Pin_N は、直交群 $\mathbf{O}_N$ の 2 重被覆群である。

$$1 \longrightarrow \{\pm 1\} \longrightarrow \text{Pin}_N \xrightarrow{\pi} \mathbf{O}_N \longrightarrow 1.$$

よって、 $\mathbf{O}_N$ の任意の表現は π で引き戻すことによって Pin_N とみなすことができる。そこで、 N 直交分割 λ に対して、対応する Pin_N の既約指標を同じ記号 $S_{[\lambda]}$ で表すことにする。同様に、 $\mathbf{O}_N$ の自然表現の k 階対称テンソル積、 k 階交代テンソル積表現を Pin_N の表現と見たものの指標をそれぞれ H_k, E_k と表す。特に、 $\mathbf{O}_N$ の自然表現の N 階交代テンソル積表現は行列式表現であり、スピノル群 Spin_N は

$$\text{Spin}_N = \text{Ker } E_N$$

で与えられる。

Pin_N の既約表現は、

- (a) $\mathbf{O}_N$ の表現の引き戻しとして得られるとき (つまり, $\text{Ker } \pi$ が自明に作用するとき), テンソル表現 (tensor representation) であるといい,
 (b) そうでないとき (つまり, $\text{Ker } \pi$ が非自明に作用するとき), スピノル表現 (spinor representation) であるという.

そして, Pin_N の表現環を $\text{Rep}(\text{Pin}_N)$ とし,

$\text{Rep}^+(\text{Pin}_N) =$ テンソル表現の指標で張られる $\text{Rep}(\text{Pin}_N)$ の部分加群,

$\text{Rep}^-(\text{Pin}_N) =$ スピノル表現の指標で張られる $\text{Rep}(\text{Pin}_N)$ の部分加群

とおく. このとき,

$$\text{Rep}(\text{Pin}_N) = \text{Rep}^+(\text{Pin}_N) \oplus \text{Rep}^-(\text{Pin}_N)$$

であり,

$$\text{Rep}^+(\text{Pin}_N) \cong \text{Rep}(\mathbf{O}_N)$$

となる.

Pin_N のスピン表現 ($2^{\lfloor N/2 \rfloor}$ 次元) の指標を Δ_N と表す.

- (1) N が奇数であるときは,

$$E_N \cdot \Delta_N \neq \Delta_N$$

であり, Δ の Spin_N への制限は $(1/2, 1/2, \dots, 1/2)$ を最高ウェイトとする既約表現の指標である.

- (2) N が偶数であるときは,

$$E_N \cdot \Delta_N = \Delta_N$$

であり, Δ の Spin_N への制限は $(1/2, 1/2, \dots, 1/2, 1/2), (1/2, 1/2, \dots, 1/2, -1/2)$ を最高ウェイトとする 2 つの既約表現の指標の和となる.

スピノル表現に対する普遍指標を考える出発点は, 既約スピノル表現の指標の次の行列式表示である.

定理 3.1. 長さ $N/2$ 以下の分割 λ に対して, Pin_N 上の類関数 $S_{[\lambda+1/2]} = S_{[\lambda+1/2], \text{Pin}_N}$ を,

$$S_{[\lambda+1/2]} = \Delta_N \cdot \det \left(H_{\lambda_i - i + j} - E_N H_{\lambda_i - i - j + 1} \right)_{1 \leq i, j \leq l(\lambda)} \quad (11)$$

とおいて定義する. このとき, $S_{[\lambda+1/2]}$ は Pin_N の既約指標であり,

- (1) N が奇数であるとき, $\text{Rep}^-(\text{Pin}_N)$ の $\mathbb{Z}$ 基底は

$$\{S_{[\lambda+1/2]}, E_N S_{[\lambda+1/2]} : \lambda \text{ は長さ } N/2 \text{ 以下の分割}\}$$

で与えられる.

- (2) N が偶数であるとき, $\text{Rep}^-(\text{Pin}_N)$ の $\mathbb{Z}$ 基底は

$$\{S_{[\lambda+1/2]} : \lambda \text{ は長さ } N/2 \text{ 以下の分割}\}$$

で与えられる.

証明のアイデア． $S_{[\lambda+1/2]}$ は表現の指標の整数結合の線型結合として表されるから，

- (i) $\mathbf{Pin}_N$ 上の類関数全体のなす空間上の自然な対称双線型形式 (Haar 測度から定まるもの) $\langle \cdot, \cdot \rangle$ に関して

$$\langle S_{[\lambda+1/2]}, S_{[\lambda+1/2]} \rangle = 1.$$

- (ii) $S_{[\lambda+1/2]}$ の単位元での値は正である．
を示せばよい． □

4 スピノル表現に対する普遍指標

定理 3.1 の行列式表示 (11) を念頭において，スピノル表現に対する普遍指標を定義し，その性質を調べる．以下，環 $\mathbb{Z}[\varepsilon]/(\varepsilon^2 - 1)$ 上の対称関数環

$$\tilde{\Lambda} = \Lambda \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[\varepsilon]/(\varepsilon^2 - 1)$$

において議論を進める．

定義 4.1. 分割 λ に対して，対称関数 $s'_{[\lambda]} \in \tilde{\Lambda}$ を

$$s'_{[\lambda]} = \det \left(h_{\lambda_i - i + j} - \varepsilon h_{\lambda_i - i - j + 1} \right)_{1 \leq i, j \leq l(\lambda)} \quad (12)$$

とにおいて定義し，スピノル普遍指標 (spinor universal character) と呼ぶ．また，環準同型写像 $\tilde{\pi}_N : \tilde{\Lambda} \rightarrow \text{Rep}(\mathbf{Pin}_N)$ を

$$\tilde{\pi}_N(h_k) = H_k \quad (k \geq 0), \quad \tilde{\pi}_N(\varepsilon) = E_N$$

によって定義する．

定理 3.1 の行列式表示 (11) とスピノル普遍指標の定義 (12) を比較すると，長さ $N/2$ 以下の分割 λ に対して，

$$S_{[\lambda+1/2]} = \Delta_N \cdot \tilde{\pi}_N(s'_{[\lambda]}).$$

つまり，スピノル普遍指標は既約スピノル表現 (から基本スピン表現の寄与を取り除いたもの) の指標を表す対称関数である．また，直交普遍指標 $s_{[\lambda]}$ について， λ が N 直交分割であるとき， $\tilde{\pi}_N(s_{[\lambda]}) = S_{[\lambda]} \in \text{Rep}^+(\mathbf{Pin}_N)$ である．

スピノル普遍指標も直交普遍指標と同様の性質をもっている．

定理 4.2. (1) 変数 $X = (x_1, x_2, \dots)$, $U = (u_1, u_2, \dots)$ に対して，

$$\sum_{\lambda} s'_{[\lambda]}(X) s_{\lambda}(U) = \frac{\prod_i (1 - \varepsilon u_i) \prod_{i < j} (1 - u_i u_j)}{\prod_{i, j} (1 - x_i u_j)}. \quad (13)$$

- (2) $s'_{[\lambda]}$ は Schur 関数の線型結合として

$$s'_{[\lambda]} = \sum_{\mu} \left(\sum_{\nu = t_{\nu}} (-1)^{(|\nu| + l(\nu))/2} \varepsilon^{|\nu|} \text{LR}_{\mu, \nu}^{\lambda} \right) s_{\mu} \quad (14)$$

と表される．ここで， ν は自己共役な分割全体をわたる．

(3) $\{s'_{[\lambda]}, \varepsilon s'_{[\lambda]} : \lambda \text{ は分割}\}$ は $\tilde{\Lambda}$ の $\mathbb{Z}$ 基底をなす .

(4) Λ の対合 ω に関して ,

$$\omega(s'_{[\lambda]}) = s'_{[t\lambda]}. \quad (15)$$

(5) $s'_{[\lambda]}$ は , 基本対称式 e_k を用いて

$$s'_{[\lambda]} = \det \left(e_{t\lambda_i - i + j} - \varepsilon e_{t\lambda_i - i - j + 1} \right)_{1 \leq i, j \leq l(t\lambda)} \quad (16)$$

と表される .

証明のアイデア . (2) ~ (5) は (1) の Cauchy 型の公式の帰結である . また , (1) の Cauchy 型の公式は , 次の行列式を利用して証明できる . $\square$

補題 4.3. 環 $\mathbb{Z}[u_1^{\pm 1/2}, \dots, u_n^{\pm 1/2}][\varepsilon]/(\varepsilon^2 - 1)$ において ,

$$\begin{aligned} & \det \left(u_i^{j-1/2} - \varepsilon u_i^{-j+1/2} \right)_{1 \leq i, j \leq n} \\ &= \prod_{i=1}^n (u_i^{1/2} - \varepsilon u_i^{-1/2}) \prod_{1 \leq i < j \leq n} (u_i^{1/2} u_j^{1/2} - u_i^{-1/2} u_j^{-1/2}) (u_i^{1/2} u_j^{-1/2} - u_i^{-1/2} u_j^{1/2}). \end{aligned}$$

スピノル普遍指標の場合も , 直交普遍指標と同様に , λ の長さが $N/2$ を超えるとき一般に $\tilde{\pi}_N(s'_{[\lambda]}) = 0$ とはならない . そこで , $l(\lambda) > N/2$ のときに $\Delta_N \cdot \tilde{\pi}_N(s'_{[\lambda]})$ を Pin_N の既約指標を用いて表す必要がある . 行列式表示 (16) を用いると ,

命題 4.4. 分割 λ が $l(\lambda) > N/2$ をみたしているとし ,

$$\alpha = ({}^t\lambda_1, {}^t\lambda_2 - 1, \dots, {}^t\lambda_r - (r - 1)), \quad r = l({}^t\lambda)$$

とおく . このとき ,

- (1) $\alpha_i \geq N + r$ となる i が存在するならば , $\tilde{\pi}_N(s'_{[\lambda]}) = 0$ である .
- (2) $\alpha_i + \alpha_j = N + 1$ となる i, j が存在するならば , $\tilde{\pi}_N(s'_{[\lambda]}) = 0$ である .
- (3) (1), (2) のいずれでもない場合は ,

$$\alpha_1 > \dots > \alpha_p > \frac{N+1}{2} \geq \alpha_{p+1} > \dots > \alpha_r$$

をみたす p をとり , 数列 β を

$$\beta = (N + 1 - \alpha_1, \dots, N + 1 - \alpha_p, \alpha_{p+1}, \dots, \alpha_r)$$

とおいて定める . そして , β の成分を大きい順に並べ替えて得られる数列を γ とし , $\gamma = \sigma(\beta)$ となる置換 $\sigma \in \mathfrak{S}_r$ をとる . このとき ,

$$\gamma = ({}^t\mu_1, {}^t\mu_2 - 1, \dots, {}^t\mu_r - (r - 1))$$

によって定まる分割 μ は $l(\mu) \leq N/2$ をみたし ,

$$\Delta_N \cdot \tilde{\pi}_N(s'_{[\lambda]}) = (-1)^p \text{sgn}(\sigma) S_{[\mu+1/2]}$$

となる .

例 4.5. 例えば, $\lambda = (4, 3, 3, 3, 2, 2, 1, 1)$, $N = 8$ のとき, ${}^t\lambda = (8, 6, 4, 1)$ であり,

$$\alpha = (8, 6 - 1, 4 - 2, 1 - 3) = (8, 5, 2, -2).$$

$(N + 1)/2 = 9/2$ より大きい成分は 2 個あるから, $p = 2$ である. また,

$$\beta = (9 - 8, 9 - 5, 2, -2) = (1, 4, 2, -2)$$

となるから,

$$\gamma = (4, 2, 1, -2), \quad \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

であり,

$${}^t\mu = (4, 2 + 1, 1 + 2, -2 + 3) = (4, 3, 3, 1), \quad \mu = (4, 3, 3, 1).$$

よって,

$$\Delta_8 \cdot \tilde{\pi}_8(s'_{[4,3,3,3,2,2,1,1]}) = (-1)^2 \cdot (-1)^2 \cdot S_{[(4,3,3,1)+1/2]}.$$

5 スピノル表現のテンソル積, 制限

§4 で導入したスピノル普遍指標を利用して, スピノル表現のテンソル積, 制限の分解を考える. テンソル積の分解については,

- (a) スピノル表現とテンソル表現のテンソル積 $S_{[\mu+1/2]}S_{[\nu]}$,
- (b) スピノル表現とスピノル表現のテンソル積 $S_{[\mu+1/2]}S_{[\nu+1/2]}$

の 2 つの場合を考えればよい.

まず, スピノル表現とテンソル表現のテンソル積については, 表現環 $\text{Rep}(\text{Pin}_N)$ において

$$S_{[\mu+1/2]}S_{[\nu]} = \Delta \cdot \tilde{\pi}_N(s'_{[\mu]}s_{[\nu]})$$

と表されるから, 対称関数環 $\tilde{\Lambda}$ における積 $s'_{[\mu]}s_{[\nu]}$ を $s'_{[\lambda]}$ の線型結合として表すことができる.

定理 5.1. $\tilde{\Lambda}$ において,

$$s'_{[\mu]}s_{[\nu]} = \sum_{\lambda} \left(\sum_{\substack{\xi, \eta, \tau \\ \nu/\sigma : \text{v-strip}}} \text{LR}_{\xi, \eta}^{\lambda} \text{LR}_{\tau, \xi}^{\mu} \text{LR}_{\tau, \eta}^{\sigma} \varepsilon^{|\nu| - |\sigma|} \right) s'_{[\lambda]}. \quad (17)$$

ここで, ξ, η, τ は分割全体をわたり, σ は ν/σ が垂直帯 (つまり, すべての i に対して $0 \leq \nu_i - \sigma_i \leq 1$) となるような分割全体をわたる.

証明. Schur 関数を係数とする母関数を見ると, スピノル普遍指標に対する Cauchy 型の公式 (13), 直交普遍指標に対する Cauchy 型の公式 (7) と Schur 関数に対する Cauchy

の公式から ,

$$\begin{aligned}
& \sum_{\mu, \nu} s'_{[\mu]}(X) s_{[\nu]}(X) s_{\mu}(U) s_{\nu}(V) \\
&= \frac{\prod_i (1 - \varepsilon u_i) \prod_{i < j} (1 - u_i u_j)}{\prod_{i, j} (1 - x_i u_j)} \cdot \frac{\prod_{i \leq j} (1 - v_i v_j)}{\prod_{i, j} (1 - x_i v_j)} \\
&= \prod_i (1 + \varepsilon v_i) \cdot \frac{1}{\prod_{i, j} (1 - u_i v_j)} \\
&\quad \times \frac{\prod_i (1 - \varepsilon u_i) \prod_i (1 - \varepsilon v_i) \prod_{i < j} (1 - u_i u_j) \prod_{i, j} (1 - u_i v_j) \prod_{i < j} (1 - v_i v_j)}{\prod_{i, j} (1 - x_i u_j) \prod_{i, j} (1 - x_i v_j)} \\
&= \left(\sum_{k \geq 0} \varepsilon^k e_k(V) \right) \cdot \left(\sum_{\tau} s_{\tau}(U) s_{\tau}(V) \right) \cdot \left(\sum_{\lambda} s'_{[\lambda]}(X) s_{\lambda}(U \cup V) \right).
\end{aligned}$$

ここで , Pieri の公式と (3), (4) を用いると ,

$$\begin{aligned}
& \sum_{\mu, \nu} s'_{[\mu]}(X) s_{[\nu]}(X) s_{\mu}(U) s_{\nu}(V) \\
&= \sum_{\mu, \nu} \sum_{\lambda} \left(\sum_{\xi, \eta, \tau, \sigma} \varepsilon^{|\nu| - |\sigma|} \text{LR}_{\xi, \eta}^{\lambda} \text{LR}_{\tau, \xi}^{\mu} \text{LR}_{\tau, \eta}^{\sigma} \right) s'_{[\lambda]}(X) s_{\mu}(U) s_{\nu}(V)
\end{aligned}$$

(ここで , ν は ν/σ が垂直帯となる分割全体をわたる) となることからわかる . 従って , $s_{\mu}(U) s_{\nu}(V)$ の係数を比較することによって , 求める結論が得られる . $\square$

定理 5.1 の (17) の両辺に $\tilde{\pi}_N$ を施すと ,

$$S_{[\mu+1/2]} S_{[\nu]} = \sum_{\lambda} \left(\sum_{\xi, \eta, \tau, \sigma} \text{LR}_{\xi, \eta}^{\lambda} \text{LR}_{\tau, \xi}^{\mu} \text{LR}_{\tau, \eta}^{\sigma} E_N^{|\nu| - |\sigma|} \right) \Delta_N \cdot \tilde{\pi}_N(s'_{[\lambda]})$$

となり , 命題 4.4 のアルゴリズムを用いることによって , 表現環 $\text{Rep}(\text{Pin}_N)$ における $S_{[\mu+1/2]} S_{[\nu]}$ の実際の分解を計算することができる . 例えば , Littlewood–Richardson 係数の性質を用いると , 次のように N が十分大きいときのテンソル積の分解が N によらないことがわかる .

系 5.2. $l(\mu) + l(\nu) \leq N/2$ であるとき ,

$$S_{[\mu+1/2]} S_{[\nu]} = \sum_{\lambda} \left(\sum_{\xi, \eta, \tau, \sigma} \text{LR}_{\xi, \eta}^{\lambda} \text{LR}_{\tau, \xi}^{\mu} \text{LR}_{\tau, \eta}^{\sigma} E_N^{|\nu| - |\sigma|} \right) S_{[\lambda+1/2]}.$$

ここで , λ は長さが $N/2$ 以下であるような分割全体をわたる .

次に , スピノル表現とスピノル表現のテンソル積については , $\text{Rep}(\text{Pin}_N)$ において

$$S_{[\mu+1/2]} S_{[\nu+1/2]} = \Delta_N^2 \cdot \tilde{\pi}_N(s'_{[\mu]} s'_{[\nu]}).$$

また, Brauer–Weyl [1] によって

$$\Delta_N^2 = \begin{cases} \frac{1}{2} \sum_{r=0}^N E_N^r E_r & (N \text{ が奇数のとき}) \\ \sum_{r=0}^N E_N^r E_r & (N \text{ が偶数のとき}) \end{cases}$$

となることが知られている．よって, 次の定理を用いることによって, スピノル表現とスピノル表現のテンソル積の分解が計算できる．

定理 5.3. 対称関数環 $\tilde{\Lambda}$ において,

(1) 分割 μ, ν に対して,

$$s'_{[\mu]} s'_{[\nu]} = \sum_{\lambda} \left(\sum_{\xi, \eta, \tau} \text{LR}_{\xi, \eta}^{\lambda} \text{LR}_{\tau, \xi}^{\mu} \text{LR}_{\tau, \eta}^{\nu} \right) s'_{[\lambda]}.$$

ここで, λ, ξ, η, τ は分割全体をわたる．

(2) 分割 μ に対して,

$$\sum_{k \geq 0} \varepsilon^k e_k \cdot s'_{[\mu]} = \sum_{\lambda} \varepsilon^{|\lambda| - |\mu|} s_{[\lambda]}.$$

ここで, λ は λ/μ が垂直帯となる分割全体をわたる．

これを用いると, 長さ $N/2$ 以下の分割 μ, ν に対して,

$$S_{[\mu+1/2]} S_{[\nu+1/2]} = c \sum_{\lambda} \sum_{\rho, \xi, \eta, \tau} \text{LR}_{\xi, \eta}^{\rho} \text{LR}_{\tau, \xi}^{\mu} \text{LR}_{\tau, \eta}^{\nu} E_N^{|\lambda| - |\rho|} \tilde{\pi}_N(s_{[\lambda]})$$

となることがわかる．ここで,

$$c = \begin{cases} \frac{1}{2} & (N \text{ が奇数のとき}) \\ 1 & (N \text{ が偶数のとき}) \end{cases}$$

である．例えば, $\mu = \emptyset$ (つまり, $S_{[\mu+1/2]} = \Delta_N$) の場合には, 組合せ論的な考察を加えることによって, 次のような分解が得られる．

系 5.4. (1) $N = 2n + 1$ が奇数であり, ν が長さ n 以下の分割であるとき,

$$S_{[1/2]} S_{[\nu+1/2]} = \sum_{\lambda} E_N^{|\lambda| - |\nu|} S_{[\lambda]}.$$

ここで, λ は λ/ν が垂直帯となるような長さ n 以下の分割全体にわたる．

(2) $N = 2n$ が偶数であり, ν が長さ n 以下の分割であるとき,

$$S_{[1/2]} \cdot S_{[\nu+1/2]} = \sum_{\lambda} S_{[\lambda]} + \sum_{\rho} (1 + E_N) S_{[\rho]}.$$

ここで, λ は λ/ν が垂直帯となるような長さ n の分割全体をわたり, ρ は ρ/ν が垂直帯となるような長さが n より小さい分割全体をわたる．

注意. スピン群 $\mathbf{Spin}_N$ の場合には, 同様の既約分解を Robinson–Schensted 型対応を用いて組合せ論的に示すこともできる. [10] を見よ.

最後に, $\mathbf{Pin}_{M+N}$ の既約スピノル表現を部分群 $\pi^{-1}(\mathbf{O}_M \times \mathbf{O}_N)$ (ここで, $\pi : \mathbf{Pin}_{M+N} \rightarrow \mathbf{O}_{M+N}$ は被覆写像である) に制限したときの分解は, 次のスピノル普遍指標の関係式から導くことができる.

定理 5.5. 変数 $X = (x_1, x_2, \dots)$, $Y = (y_1, y_2, \dots)$ に対して,

$$s'_{[\lambda]}(X \cup Y) = \sum_{\mu, \nu} \left(\sum_{\kappa} \mathrm{LR}_{\mu, \nu, \kappa}^{\lambda} \varepsilon^{|\kappa|} \right) s'_{[\mu]}(X) s'_{[\nu]}(Y).$$

ここで, μ, ν, κ は分割全体をわたる.

注意. $\mathbf{Pin}_{M+N}$ の部分群 $\pi^{-1}(\mathbf{O}_M \times \mathbf{O}_N)$ は, $\mathbf{Pin}_M$ と $\mathbf{Pin}_N$ の直積群 $\mathbf{Pin}_M \times \mathbf{Pin}_N$ と同型ではなく, $\mathbf{Pin}_M$ と $\mathbf{Pin}_N$ の twisted central product ([2, Chap. 3] を見よ) になっている.

参考文献

- [1] R. Brauer and H. Weyl, Spinors in n dimensions, Amer. J. Math. **57** (1935), 425–449.
- [2] P. N. Hoffman and J. F. Humphreys, “Projective Representations of the Sym metric Groups : Q-Functions and Shifted Tableaux”, Oxford University Press, 1992.
- [3] R. C. King, Branching rules for classical Lie groups using tensor and spinor methods, J. Phys. A **8** (1975), 429–449.
- [4] R. C. King, Spinor representations, in “Group theoretical methods in physics (Fourth Internat. Colloq., Nijmegen, 1975)”, Lecture Notes in Phys., Vol. 50, Springer, 1976, pp. 481–489.
- [5] R. C. King, S -functions and characters of Lie algebras and superalgebras, in “Invariant theory and tableaux (Minneapolis, MN, 1988)”, IMA Vol. Math. Appl. **19**, Springer, 1990, pp. 226–261.
- [6] 小池 和彦, 古典群の表現, 数学 **48** (1996), 242–258.
- [7] K. Koike, Representations of spinor groups and the difference characters of $SO(2n)$, Adv. Math. **128** (1997), 40–81.
- [8] D. E. Littlewood, “The Theory of Group Characters and Matrix Representations of Groups, 2nd ed.”, Oxford University Press, 1950.
- [9] I. G. Macdonald, “Symmetric Functions and Hall Polynomials, 2nd ed.”, Oxford University Press, 1995.

- [10] S. Okada, Robinson–Schensted–type algorithms for the spinor representations of the orthogonal Lie algebra $\mathfrak{so}(2n, \mathbb{C})$, J. Algebra **158** (1993), 155–200.
- [11] 岡田 聡一, 『古典群の表現論と組合せ論 (下)』, 培風館, 2006.