

分裂型 p 進簡約群の法 p 表現の分類について

阿部 紀行*

1 はじめに

Galois 表現と簡約群の表現との間の対応を主張する局所/大域 Langlands 対応は、整数論および表現論における大きな問題として認識されている．近年、非アルキメデス的局所体上の局所 Langlands 対応の類似・一般化として、 p 進 Langlands 対応 ($\mathbb{Q}_p$ の拡大体上の連続な表現を考える) や法 p Langlands 対応 (標数 p の体の上の表現を考える) の考えが提唱され、 $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ の場合には完成した理論が存在する．

さて、表現論の立場から見れば、第一の問題は簡約群の既約 p 進表現ないし既約法 p 表現の分類と言うことになる． $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ の場合には、既約法 p 表現の分類は Breuil [Bre03] により行われ、 p 進 Langlands 対応の確立に大きな役割を果たした．一方その他の群に対しては、 GL_2 ですら分類ができておらず、また状況がより複雑になることが認識されており [BP]、一般の群に対して p 進 Langlands 対応を考える際の大きな障害となっている．

簡約群における重要な表現の構成方法が、放物型誘導表現である．放物型部分群の Levi 部分群はまた簡約群であるため、この構成には群の階数に関する帰納法を用いることができる．このことを用いて、簡約群の既約表現の分類を次の二段階に分けることができる．

- (1) 既約超尖点表現 (真の放物型部分群からの誘導表現の部分商にならない表現) を分類する．
 - (2) 放物型誘導表現の構造を理解し、既約表現の分類を既約超尖点表現の分類に帰着させる．
- p 進簡約群の既約認容法 p 表現の場合、(1) は $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ でしか行われていないが、(2) は GL_2 の場合に Barthel-Livné [BL94, BL95] が、 GL_n の場合に Herzig [Her] が行い、そして分裂型の場合には [Abe11] で行われた．本論では、[Her] および [Abe11] に基づいて分裂型の場合の (2) を解説する．

2 コンパクト誘導表現と佐武変換

F を $\mathbb{Q}_p$ の有限次拡大体、 $\mathcal{O}$ をその整数環、 $\varpi \in \mathcal{O}$ を極大イデアルの生成元、 κ を剰余体とし、 G を $\mathcal{O}$ 上の連結な分裂型簡約群とする．極大トーラス $T \subset G$ およびそれを含む Borel 部分群 $B \supset T$ を固定する．これらから、ルート型 $(X^*, \Delta, X_*, \check{\Delta})$ 、正ルート全体のなす集合 $\Delta^+ \subset \Delta$

* 北海道大学 創成研究機構

および単純ルート全体の集合 Π が定まる。 W を Weyl 群とする。 各群の F 有利点全体のなす群をまた同じ記号で表す ($G = G(F)$ など)。 また $K = G(\mathcal{O})$ とおく。 K は極大コンパクト部分群となる。 $\Theta \subset \Pi$ に対して、対応する B を含む放物型部分群およびその Levi 分解を $P_\Theta = M_\Theta N_\Theta$ とする。 ($T \subset M_\Theta$ ととる。) $W_\Theta \subset W$ を M_Θ の Weyl 群とする。 逆に、 B を含む放物型部分群 $P = MN$ に対して、対応する Π の部分集合を Π_M と書く。 P の反対の位置にある放物型部分群を $\overline{P} = \overline{M}N$ とする。 $\text{red}: K = G(\mathcal{O}) \rightarrow G(\kappa)$ を $\mathcal{O} \rightarrow \kappa$ から導かれる射影とする。 $\mathbf{1}$ で自明表現を表す。

以下、単に表現といえば法 p 表現、すなわち $\overline{\mathbb{F}}_p$ 上のスムーズな表現を考えることにする。 π を G の表現とすると、これは K の既約な部分表現 V を含む。 V のコンパクト誘導表現 $\text{c-Ind}_K^G(V)$ を次で定義する。

$$\text{c-Ind}_K^G(V) = \{f: G \rightarrow V \mid f(gk) = k^{-1}f(g) \ (g \in G, k \in K), f \text{ の台はコンパクト} \}.$$

K がコンパクトかつ開であることから、 $\text{c-Ind}_K^G(V) \simeq \overline{\mathbb{F}}_p[G] \otimes_{\overline{\mathbb{F}}_p[K]} V$ が成り立つことがわかる。 従って、Frobenius 相互律

$$\text{Hom}_K(V, \pi) \simeq \text{Hom}_G(\text{c-Ind}_K^G(V), \pi)$$

を得る。 特に π が既約であるならば、全射 $\text{c-Ind}_K^G(V) \rightarrow \pi$ を得ることになる。

以上の議論により、 K の既約表現 V に対して、 $\text{c-Ind}_K^G(V)$ の構造が重要となる。 まず、 K の既約表現の分類を述べよう。 p 群の $\overline{\mathbb{F}}_p$ 上の既約表現は自明表現しかないことから、プロ p 群の既約表現は自明表現しかない。 このことと、 $\text{Ker}(\text{red})$ がプロ p 群であることから、 K の既約表現は全て red を経由することがわかる。 よって、有限群 $G(\kappa)$ の既約表現を分類すればよい。 以下は、たとえば [CL76] にある。 K の表現 V に対して、不変部分 $V^{\overline{U}(\mathcal{O})}$ および余不変部分 $V_{U(\mathcal{O})}$ をそれぞれ $V^{\overline{U}}$, V_U と略記する。

定理 2.1 (1) V を $G(\kappa)$ の既約表現とすると、 $\dim V^{\overline{U}} = \dim V_U = 1$ 。

(2) $G(\kappa)$ の既約表現は、集合 $\{(\nu, \Theta)\}$ と一対一に対応する。 ここで ν は $T(\kappa)$ の指標であり、 Θ は $\{\alpha \in \Pi \mid \nu \circ \alpha = \mathbf{1}\}$ の部分集合である。 ただし対応は既約表現 V に対して $\nu = V^{\overline{U}}$, $W_\Theta = \text{Stab}_W(V^{\overline{U}})$ で与えられる。

V_1, V_2 を K の既約表現とし、 $\mathcal{H}_G(V_1, V_2) = \text{Hom}_G(\text{c-Ind}_K^G(V_1), \text{c-Ind}_K^G(V_2))$ とおく。 Frobenius 相互律からこの空間は

$$\{\varphi: G \rightarrow \text{Hom}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(V_1, V_2) \mid \varphi(k_1 g k_2) = k_1 \varphi(g) k_2 \ (g \in G, k_1, k_2 \in K), \varphi \text{ の台はコンパクト} \}$$

と自然に同型となる。 この空間の基底を求める。 $X_{*,+}$ を支配的な余指標全体とすると、Cartan 分解により $G = \coprod_{\lambda \in X_{*,+}} K\lambda(\varpi)K$ であるので、 $\text{supp } \varphi \subset K\lambda(\varpi)K$ なる φ を考えればよい。 このような φ は $\varphi(\lambda(\varpi))$ により定まる。 $\Pi_\lambda = \{\alpha \in \Pi \mid \langle \alpha, \lambda \rangle = 0\}$, $P_\lambda = P_{\Pi_\lambda}$ とおき、 $P_\lambda = M_\lambda N_\lambda$ を Levi 分解とする。 まず、 $M_\lambda(\mathcal{O})$ の元は $\lambda(\varpi)$ と可換である。 従って $\varphi(\lambda(\varpi))$ は $M_\lambda(\mathcal{O})$ 同変である。 また、 λ が支配的であるので $\text{red}(\lambda(\varpi)^{-1} \overline{N}_\lambda(\mathcal{O}) \lambda(\varpi))$ が自明。 よって

$\bar{n} \in \bar{N}_\lambda(\mathcal{O})$ に対して $\varphi(\bar{n}\lambda(\varpi)) = \varphi(\lambda(\varpi))$ である. 従って, $\varphi(\lambda(\varpi)): V_1 \rightarrow V_2$ は $(V_2)^{\bar{N}_\lambda} \hookrightarrow V_2$ を経由する. 同様に, $V_1 \twoheadrightarrow (V_1)_{N_\lambda}$ も経由する. すなわち, $\varphi(\lambda(\varpi))$ は適当な $M_\lambda(\mathcal{O})$ 同変な射 $(V_1)_{N_\lambda} \rightarrow (V_2)^{\bar{N}_\lambda}$ により $V_1 \twoheadrightarrow (V_1)_{N_\lambda} \rightarrow (V_2)^{\bar{N}_\lambda} \hookrightarrow V_2$ として与えられる. 一方, 次の事実が知られている.

補題 2.2 V を K の既約表現, $P = MN$ を放物型部分群としたとき, $V^{\bar{N}} \simeq V_N$ は既約 $M(\mathcal{O})$ 表現.

以上のことから, 次がわかった.

補題 2.3 $\lambda \in X_{*,+}$ が $M_\lambda(\mathcal{O})$ 表現として $(V_1)_{N_\lambda} \simeq (V_2)_{N_\lambda}$ を満たす, またそのときに限り $\text{supp } \varphi = K\lambda(\varpi)K$ なる $\varphi \in \mathcal{H}_G(V_1, V_2)$ が, 定数倍を除いて一意に存在する.

これにより $\mathcal{H}_G(V_1, V_2)$ の基底を求めることができた. 特に, $T(\mathcal{O})$ 表現として $(V_1)_U \not\simeq (V_2)_U$ ならば $\mathcal{H}_G(V_1, V_2) = 0$ である. 合成まで込めた構造は次の佐武変換が明らかにする.

定義 2.4 佐武変換 $S_G: \mathcal{H}_G(V_1, V_2) \rightarrow \mathcal{H}_T((V_1)_U, (V_2)_U)$ を

$$(S_G(\varphi))(t) = \text{proj} \circ \left(\sum_{u \in U(\mathcal{O}) \setminus U(F)} \varphi(ut) \right)$$

と定める. ただし, $\text{proj}: V_2 \rightarrow (V_2)_U$ は自然な射影である.

標数 0 の場合の佐武変換と比べて, モジュラー関数の項がないことに注意する. $\bar{\mathbb{F}}_p$ に値をとる Haar 測度は存在しないため, モジュラー関数自体が存在しない. この補正が存在しないため, 上の射は B に依ることに注意する.

定理 2.5 ([Her, Proposition 6.3]) S_G は合成と整合的であり, 単射.

合成との整合性は容易である. 単射性は互いの基底の変換が上半三角行列になっていることから従う.

T は可換であるため, $\mathcal{H}_T((V_1)_U, (V_2)_U)$ は簡単な構造を持つ. まず, $(V_1)_U$ と $(V_2)_U$ が同型でなければ 0 である. 同型な場合は, $\mathcal{H}_T((V_1)_U, (V_2)_U) = \{ \varphi: T \rightarrow (V_1)_U \mid \varphi(tt_0) = t_0\varphi(t) \ (t \in T, t_0 \in T(\mathcal{O})) \}$ であるが, $(\lambda, t_0) \mapsto \lambda(\varpi)t_0$ により同型 $X_* \times T(\mathcal{O}) \simeq T$ を得るため, $\mathcal{H}_G((V_1)_U, (V_2)_U) \simeq \bar{\mathbb{F}}_p[X_*]$ となる.

特に $V_1 = V_2$ の時を考えよう. $\mathcal{H}_G(V) = \mathcal{H}_G(V, V)$ とおく. 佐武変換により, これは $\mathcal{H}_T(V_U)$ の部分代数である. 特に可換であることに注意する. 像は以下ようになる.

定理 2.6 ([Her11, Theorem 1.2]) $\text{Im}(S_G: \mathcal{H}_G(V) \rightarrow \mathcal{H}_T(V_U)) = \bar{\mathbb{F}}_p[X_{*,+}]$. 特に $\mathcal{H}_T(V_U)$ は $\mathcal{H}_G(V)$ の局所化である.

証明は基底の対応を見ればよい.

例 2.7 $G = \mathrm{GL}_2$, V を自明表現とする. $t = \mathrm{diag}(\varpi, 1)$ とおく. 佐武変換 S_G を $\mathbb{Z}$ 上で考えよう. $T \in \mathcal{H}_G(V)$ を $\mathrm{supp} T = KtK$, $T(t) = 1$ となるものとする. $S_G(T) = \tau_t + q\tau_{t^{-1}}$ である. ただし $t' \in T$ に対して, $\tau_{t'} \in \mathcal{H}_T(V_U)$ を $\mathrm{supp} \tau_{t'} = t'T(\mathcal{O})$, $\tau_{t'}(t') = 1$ となるものとした. 従って, 法 p 還元することにより, $S_G(T) = \tau_t \in \overline{\mathbb{F}}_p[X_{*,+}]$ となる. 一方, δ をモジュラー関数とすると, $\delta(t) = q^{-1}$ などから $\delta(t)^{-1/2} S_G(T) = q^{1/2}\tau_t + q^{1/2}\tau_{t^{-1}}$ となり, これは W 不変となる (古典的な佐武対応).

上記例から, W 不変な元を与える古典的な佐武対応からモジュラー関数の補正を外すと, 各 Weyl の部屋毎に別々に q の冪がかかるが, 支配的な元にかかる q 冪がもっとも小さく, 従ってそれ以外の項は法 p 還元により消えてしまう, という様子が観察される. この様子をよく見ると, 古典的な佐武対応の明示式である加藤・Lusztig 公式 [Kat82] から, 今の場合の佐武対応の明示式が得られる. $\tau_\lambda^G \in \mathcal{H}_G(V)$ を $\mathrm{supp} \tau_\lambda^G = K\lambda(\varpi)K$ かつ $\tau_\lambda^G(\lambda(\varpi))$ が $V \twoheadrightarrow V_{\overline{N}_\lambda} \simeq V^{N_\lambda} \hookrightarrow V$ で与えられるものとする. (ただし, $V_{\overline{N}_\lambda} \simeq V^{N_\lambda}$ は $V^{N_\lambda} \hookrightarrow V \twoheadrightarrow V_{\overline{N}_\lambda}$ の逆写像である.) $\Theta \subset \Pi$ および $\mu_1, \mu_2 \in X_*$ に対して, $\mu_1 \leq_\Theta \mu_2$ を $\mu_2 - \mu_1 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\Theta$ により定める.

補題 2.8 ([Her, Proposition 5.1]) V が (ν, Θ) に対応しているとする. $\lambda \in X_{*,+}$ に対して $\tau_\lambda^T = \sum_\mu S_G(\tau_\mu^G)$, ただし和は $\mu \in X_{*,+}$, $\mu \leq_\Theta \lambda$ なる μ を走る.

定義 2.9 π を G の表現とする. $\chi: \overline{\mathbb{F}}_p[X_{*,+}] \rightarrow \overline{\mathbb{F}}_p$ が π の佐武パラメータであるとは, ある K の既約表現 V が存在して, $\mathrm{Hom}_G(\mathrm{c}\text{-}\mathrm{Ind}_K^G(V) \otimes_{\mathcal{H}_G(V)} \chi, \pi) \neq 0$ となることである. $S(\pi)$ で π の佐武パラメータ全体を表すことにする.

注意 2.10 $S(\pi)$ は右 $\mathcal{H}_G(V)$ 加群 $\mathrm{Hom}_G(\mathrm{c}\text{-}\mathrm{Ind}_K^G(V), \pi)$ の一次元 $\mathcal{H}_G(V)$ 部分加群全体と一致する. π が認容的, つまり任意のコンパクト開部分群 K' に対して $\dim \pi^{K'} < \infty$ が満たされるならば, $\mathrm{Hom}_G(\mathrm{c}\text{-}\mathrm{Ind}_K^G(V), \pi) \simeq \mathrm{Hom}_K(V, \pi)$ は有限次元である. このことと, $\mathcal{H}_G(V)$ が可換であることから, π が認容的ならば $S(\pi) \neq \emptyset$ である.

$B \subset P = MN$ を放物型部分群とする. このとき, 部分佐武変換 $S_G^M: \mathcal{H}_G(V) \rightarrow \mathcal{H}_M(V_N)$ が

$$S_G^M(\varphi)(m) = \mathrm{proj} \circ \left(\sum_{n \in N(\mathcal{O}) \setminus N(F)} \varphi(nm) \right)$$

により定義される. 次の補題の証明は簡単.

補題 2.11 $S_M \circ S_G^M = S_G$ が成り立つ. 特に S_G^M は単射.

定義 2.12 π を G の既約表現とする. 任意の $\chi \in S(\pi)$ と任意の放物型部分群 $P = MN \subsetneq G$ に対して, χ が $\mathcal{H}_G(V) \hookrightarrow \mathcal{H}_M(V_N)$ を経由しないとき, π は (K, B, T) に関して超特異であると言う. また, 任意の (K, B, T) (ここで K はハイパースペシャルな極大コンパクト部分群を動き, B, T は Borel 部分群と極大トーラスを動く) に関して超特異であるとき, 単に超特異と呼ぶ.

既に述べたとおり、本論の目的は既約認容表現の分類を既約認容超尖点表現の分類に帰着させることである。しかし、実際には既約認容超尖点表現ではなく、既約認容超特異表現の分類に帰着させる。ただし、この定理の系として、超特異性は (K, B, T) によらず、さらに超尖点的であることと同値であることが従う。

3 コンパクト誘導表現と放物型誘導表現

$P = MN$ を放物型部分群とする。以下（部分）佐武変換を用いることで、常に $\mathcal{H}_G(V) \subset \mathcal{H}_M(V_N) \subset \mathcal{H}_T(V_U)$ と見なす。

定理 3.1 ([Her, Theorem 3.1]) $\text{Stab}(V^{\overline{U}}) \subset W_M$ とする。このとき、 G および $\mathcal{H}_M(V_N)$ の作用と可換な同型

$$\text{c-Ind}_K^G(V) \otimes_{\mathcal{H}_G(V)} \mathcal{H}_M(V_N) \simeq \text{Ind}_P^G(\text{c-Ind}_{M \cap K}^M(V_N))$$

が存在する。

簡単に証明について述べる。しばらく $\text{Stab}(V^{\overline{U}}) \subset W_M$ は仮定しない。まず写像を与える。Frobenius 相互律から、次が成り立つ。

$$\begin{aligned} \text{Hom}_G(\text{c-Ind}_K^G(V), \text{Ind}_P^G(\text{c-Ind}_{M \cap K}^M(V_N))) &\simeq \text{Hom}_K(V, \text{Ind}_P^G(\text{c-Ind}_{M \cap K}^M(V_N))) \\ &\simeq \text{Hom}_{P \cap K}(V, \text{c-Ind}_{M \cap K}^M(V_N)) \simeq \text{Hom}_{M \cap K}(V_N, \text{c-Ind}_{M \cap K}^M(V_N)) \\ &\simeq \text{Hom}_M(\text{c-Ind}_{M \cap K}^M(V_N), \text{c-Ind}_{M \cap K}^M(V_N)) = \mathcal{H}_M(V_N). \end{aligned}$$

両辺ともに右 $\mathcal{H}_G(V)$ 左 $\mathcal{H}_M(V_N)$ 加群であることに注意しよう。同型の作り方からこれは左 $\mathcal{H}_M(V_N)$ 加群としての同型である。一方、 S_G^M の定義および上の同型の作り方から、右 $\mathcal{H}_G(V)$ 加群としての同型でもあることが示される [Her, Lemma 2.14]。このことと、 $\mathcal{H}_M(V_N)$ が可換であることから、次がわかった。

補題 3.2 任意の G 準同型 $\text{c-Ind}_K^G(V) \rightarrow \text{Ind}_P^G(\text{c-Ind}_{M \cap K}^M(V_N))$ は $\mathcal{H}_G(V)$ 加群としての準同型でもある。

$1 \in \mathcal{H}_M(V_N)$ に対応する準同型 $\Phi'_0: \text{c-Ind}_K^G(V) \rightarrow \text{Ind}_P^G(\text{c-Ind}_{M \cap K}^M(V_N))$ を考える。補題 3.2 から、これは $\Phi_0: \text{c-Ind}_K^G(V) \otimes_{\mathcal{H}_G(V)} \mathcal{H}_M(V_N) \rightarrow \text{Ind}_P^G(\text{c-Ind}_{M \cap K}^M(V_N))$ を与える。単射性は自動的に従う。

補題 3.3 任意の G 準同型 $\text{c-Ind}_K^G(V) \rightarrow \text{Ind}_P^G(\text{c-Ind}_{M \cap K}^M(V_N))$ は単射である。特に $(\mathcal{H}_M(V_N))$ は $\mathcal{H}_G(V)$ の局所化であるので Φ_0 は単射。

証明 与えられた $\Phi: \text{c-Ind}_K^G(V) \rightarrow \text{Ind}_P^G(\text{c-Ind}_{M \cap K}^M(V_N))$ に対応する元 $\varphi \in \mathcal{H}_M(V_N)$ をとる。単射でないとし、 V' を $\text{Ker } \Phi$ の部分既約 K 表現とすると、 $V' \hookrightarrow \text{c-Ind}_K^G(V)$ から $\Psi: \text{c-Ind}_K^G(V') \rightarrow \text{c-Ind}_K^G(V)$ を得て、 $\Phi \circ \Psi = 0$ である。 $\psi \in \mathcal{H}_G(V', V)$ を Ψ に対応する元とすると、 $\psi \neq 0$ 。こ

のとき、佐武変換により $S_G(\psi) * S_G(\varphi) = 0$. この等式は $\mathcal{H}_T((V')_U, V_U) \simeq \mathcal{H}_T(V_U)$ 内の等式であり、この環は整域であるから、 $S_G(\varphi) = 0$. よって $\varphi = 0$. これは矛盾である. ■

全射性を示す. 0 でない元 $v_0 \in V^{\bar{U}}$ をとり, $[1, v_0] \in \text{c-Ind}_K^G(V)$ を $\text{supp}([1, v_0]) = K$ かつ $[1, v_0](1) = v_0$ となる元とする. このとき、直接計算により次が示される.

補題 3.4 $\text{Stab}_W(V^{\bar{U}}) \subset W_M$ とする. $\bar{N}(\mathcal{O}) \subset \bar{N} \simeq \bar{N}P/P \subset G/P$ と見なすと,

$$\Phi_0([1, v_0])(x) = \begin{cases} [1, \text{proj}(v_0)] & (x \in \bar{N}(\mathcal{O})), \\ 0 & (\text{その他}). \end{cases}$$

ただし, $\text{proj}: V \rightarrow V_N$ は自然な射影である.

$f \in \text{Ind}_P^G(\text{c-Ind}_{M \cap K}^M(V_N))$ が与えられたとし, $f \in \text{Im } \Phi_0$ を示す. f は $\bar{N}(\mathcal{O})$ 内に台を持つ関数に G の元を作用させたものの和で書ける. よって $\text{supp}(f) \subset \bar{N}(\mathcal{O})$ としてよい. $\bar{N}(\mathcal{O})$ の原点の基本近傍系として $t\bar{N}(\mathcal{O})t^{-1}$ ($t \in T$) がとれるので, f はこのような集合に台を持ちその上で定数の関数に, $\bar{N}(\mathcal{O})$ の元を作用させたものの和でかけているとしてよい. よって f は $\bar{N}(\mathcal{O})$ 上の値が一定な関数としてよい. このとき, $f \in \text{Im } \Phi_0$ は $[1, \text{proj}(v_0)]$ が M 表現として $\text{c-Ind}_{M \cap K}^M(V_N)$ を生成することと, 上の補題から従う.

4 ウェイトの変換定理

定理 3.1 には $\text{Stab}(V^{\bar{U}}) \subset W_M$ という条件がついていた. 特殊な場合には, よりこの条件が満たされやすい V に取り替えることができる. これが次に述べるウェイトの変換定理である.

命題 4.1 ([Her, Corollary 6.10], [Abe11, Theorem 4.1, Proposition 4.7]) V, V' を K の既約表現とし, ある $\alpha \in \Pi$ が存在し, それぞれ $(\nu, \Theta \cup \{\alpha\})$, (ν, Θ) に対応しているとする ($\alpha \notin \Theta$). $\chi: \mathbb{F}_p[X_{*,+}] \rightarrow \mathbb{F}_p$ を 1 次元 $\mathbb{F}_p[X_{*,+}]$ 加群とし, 放物型部分群 $P = MN$ を, χ が $\mathcal{H}_M(V_N) \cap \mathcal{H}_G(V) \simeq \mathbb{F}_p[X_{*,+}]$ に拡張されるような最小のものとする.

- (1) $\alpha \notin \Pi_M$ とする. $\langle \Pi_M, \check{\alpha} \rangle \neq 0$ または $\chi(\tau_{\check{\alpha}}^M) \neq 1$ ($\langle \Pi_M, \check{\alpha} \rangle = 0$ ならば $\check{\alpha}$ は M に関して支配的である) ならば, $\text{c-Ind}_K^G(V) \otimes_{\mathcal{H}_G(V)} \chi \simeq \text{c-Ind}_K^G(V') \otimes_{\mathcal{H}_G(V')} \chi$.
- (2) $P = B$ とする. このとき $\text{c-Ind}_K^G(V) \otimes_{\mathcal{H}_G(V)} \chi$ は有限の長さを持ち, その組成列全体は $\text{c-Ind}_K^G(V') \otimes_{\mathcal{H}_G(V')} \chi$ のそれと一致する.

注意 4.2 条件から, $\text{Stab}_W((V')^{\bar{U}})$ は $\text{Stab}_W(V^{\bar{U}})$ よりも小さい.

注意 4.3 (2)は, χ が $\mathcal{H}_G(V) \rightarrow \mathcal{H}_T(V_U)$ を経由しさえすれば, 少なくとも組成列を考える限りは自由に V を変換することができることを意味する. よって定理 3.1 を用いれば, $\text{c-Ind}_K^G(V) \otimes_{\mathcal{H}_G(V)} \chi$ の組成列は適当な B からの放物型誘導表現のそれと一致する.

なお, χ が $\mathcal{H}_T(V_U)$ に拡張されないときは, $\text{c-Ind}_K^G(V) \otimes_{\mathcal{H}_G(V)} \chi$ の長さは無限になり得る.

- (1) の証明の概略は次の通り. まず $\lambda \in X_{*,+}$ を $\langle \lambda, \Pi \setminus \{\alpha\} \rangle = 0$ かつ $\langle \lambda, \alpha \rangle \neq 0$ となるもの

とする。このとき、補題 2.3 により $\varphi \in \mathcal{H}_G(V, V')$ と $\varphi' \in \mathcal{H}_G(V', V)$ で $\text{supp } \varphi = \text{supp } \varphi' = K\lambda(\varpi)K$ となるものが定数倍を除いて一意に存在する。岩堀分解を用いた計算により次が示される。

補題 4.4 ([Abe11, Lemma 4.3]) $\text{supp}(\varphi' * \varphi) = K\lambda(\varpi)^2 K$.

この補題と補題 2.8 から $S_G(\varphi' * \varphi) = \tau_{2\lambda}^T - \tau_{2\lambda-\tilde{\alpha}}^T$ となることがわかる。これより命題 4.1 の (1) が従う。

命題 4.1 (2) は次と (1) の証明の議論から従う。(たとえば, [CG97, Lemma 2.3.4].)

補題 4.5 ([Abe11, Proposition 4.20]) $\text{c-Ind}_K^G(V) \otimes_{\mathcal{H}_G(V)} \mathcal{H}_T(V_U)$ は $\mathcal{H}_T(V_U)$ 加群として自由である。

注意 4.6 Barthel-Livné [BL94, Theorem 19] は $G = \text{GL}_2$ の場合に $\text{c-Ind}_K^G(V)$ 自身が $\mathcal{H}_G(V)$ 加群として自由であることを示している。

定理 3.1 を用いることで、補題 4.5 は V が一次元の場合に帰着され、簡単な議論により V が自明表現の場合に帰着される。 V_Θ を $(\mathbf{1}, \Theta)$ に対応する K の既約表現とする。このとき、命題 4.1 (1) の証明の議論から、 $\alpha \in \Pi \setminus \Theta$ ならば $\text{c-Ind}_K^G(V_\Theta) \hookrightarrow \text{c-Ind}_K^G(V_{\Theta \cup \{\alpha\}})$ を得る。合成によって、 $\text{c-Ind}_K^G(\mathbf{1}) \otimes_{\mathcal{H}_G(\mathbf{1})} \mathcal{H}_T(\mathbf{1}) \hookrightarrow \text{c-Ind}_K^G(V_\Pi) \otimes_{\mathcal{H}_G(V_\Pi)} \mathcal{H}_T(\mathbf{1}) \simeq \text{Ind}_B^G(\mathcal{H}_T(\mathbf{1}))$ を得る。ただし、最後の同型は定理 3.1 によるものである。Bruhat 分解 $G/B = \bigcup_{w \in W} BwB/B$ を用いて、 $X_{\geq w} = \{f \in \text{Ind}_B^G(\mathcal{H}_T(\mathbf{1})) \mid \text{supp } f \subset \bigcup_{v \geq w} BvB/B\}$ とおく。 $X_{>w}$ も同様に定義し、 $Y_{\geq w}$, $Y_{>w}$ をそれぞれ上の写像による $\text{c-Ind}_K^G(\mathbf{1}) \otimes_{\mathcal{H}_G(\mathbf{1})} \mathcal{H}_T(\mathbf{1})$ の像と $X_{\geq w}$, $X_{>w}$ の共通部分とする。

補題 4.7 ([Abe11, Lemma 4.19]) $Y_{\geq w}/Y_{>w} = \prod_{\alpha \in \Pi, w s_\alpha < w} (\tau_\alpha^T - 1)(X_{\geq w}/X_{>w})$.

$X_{\geq w}/X_{>w}$ は BwB/B 上の局所定数関数全体と同型であり、特に $\mathcal{H}_T(\mathbf{1})$ 加群として自由である。従ってこの補題から $Y_{\geq w}/Y_{>w}$ が自由となり、補題 4.5 が従う。

5 分類定理

$B \subset P = MN$ を放物型部分群とし、 σ を M の既約認容超特異表現としたとき、 $\text{Ind}_P^G \sigma$ を考えたいが、これは一般には既約ではないことが次のようにしてわかる。 $P = B$, $\sigma = \mathbf{1}$ の場合をまず考えよう。このとき、任意の放物型部分群 $P \supset B$ に対して、 $\text{Ind}_P^G \mathbf{1}$ は $\text{Ind}_B^G \mathbf{1}$ の部分表現である。(よって既約にはなり得ない。) そこで、一般 Steinberg 表現 Sp_P を次で定義する。

$$\text{Sp}_P = \text{Ind}_P^G \mathbf{1} / \left(\sum_{P \subsetneq Q} \text{Ind}_Q^G \mathbf{1} \right).$$

定理 5.1 (Große-Klönne [GK], Herzig [Her]) Sp_P は既約であり、 $\{\text{Sp}_P\}$ は $\text{Ind}_B^G \mathbf{1}$ の組成列全体を与える。特に $\text{Ind}_B^G \mathbf{1}$ は重複度自由である。

一般の場合を述べる． $\Pi_1 \subset \Pi$ を部分集合とし， $P_1 = M_1 N_1$ を対応する放物型部分群， σ_1 を M_1 の既約認容超特異表現とする．このとき， σ_1 は中心指標を持つ．それを $\omega_{\sigma_1} : Z(M_1) \rightarrow \overline{\mathbb{F}}_p^\times$ とする． $\alpha \in \Pi$ が $\langle \Pi_1, \check{\alpha} \rangle = 0$ を満たすとする．この条件は， $\text{Im } \check{\alpha}$ が M_1 の中心に入ることと同値であり，従って $\omega_{\sigma_1} \circ \check{\alpha}$ が考えられる． $\Pi_{\sigma_1} = \{\alpha \in \Pi \mid \langle \Pi_1, \check{\alpha} \rangle = 0, \omega_{\sigma_1} \circ \check{\alpha} = \mathbf{1}\}$ とおく． $P = MN$ を $\Pi_1 \cup \Pi_{\sigma_1}$ に対応する G の放物型部分群としよう．次の事実を示すのは難しくない．

補題 5.2 ([Abe11, Lemma 3.2]) $M_{\Pi_{\sigma_1}}$ の導来群が自明に作用するような σ_1 の M への拡張が一意的に存在する．

$\Pi_2 \subset \Pi_{\sigma_1}$ に対して， $Q \supset P \cap M$ を $\Pi_1 \cup \Pi_2$ に対応する M の放物型部分群とする． M の表現 σ を

$$\sigma = \text{Ind}_Q^M(\sigma_1) / \left(\sum_{Q' \subsetneq Q} \text{Ind}_{Q'}^M(\sigma_1) \right)$$

と定め， $I = \text{Ind}_P^G(\sigma)$ と置こう．結論を言えば，これら I は全て既約になり， Π_2 を動かすと， $\text{Ind}_P^G(\sigma_1)$ の組成列全体を与える．なお， $\text{Sp}_{M,Q}$ を Q に対応する M の一般 Steinberg 表現とすると， $\sigma = \sigma_1 \otimes \text{Sp}_{M,Q}$ とも書けることが容易にわかる．このことと， Sp の既約性を用いると， σ が既約であることがわかる [Abe11, Lemma 5.2]．

少し記号を整理する． $\mathcal{P} = \{\Lambda = (\Pi_1, \Pi_2, \sigma_1)\}$ を次のような組 $\Lambda = (\Pi_1, \Pi_2, \sigma_1)$ 全体とする．

- $\Pi_1 \subset \Pi$.
- $P_1 = M_1 N_1$ を Π_1 に対応する放物型部分群としたとき， σ_1 は M_1 の既約認容超特異表現．
- $\Pi_2 \subset \Pi_{\sigma_1}$.

このとき，上記のようにして構成した $P = MN$ ， σ ， I をそれぞれ $P_\Lambda = M_\Lambda N_\Lambda$ ， σ_Λ ， $I(\Lambda)$ と書くことにする． $\Lambda = (\Pi_1, \Pi_2, \sigma_1)$ と $\Lambda' = (\Pi'_1, \Pi'_2, \sigma'_1)$ が等しいとは， $\Pi_1 = \Pi'_1$ ， $\Pi_2 = \Pi'_2$ かつ $\sigma_1 \simeq \sigma'_1$ となることである．

定理 5.3 ([Abe11, Theorem 5.10]) $\Lambda \in \mathcal{P}$ に対して $I(\Lambda)$ は既約かつ認容であり， $\Lambda \mapsto I(\Lambda)$ は $\mathcal{P}$ と G の既約認容表現の同型類全体の全単射を導く．

注意 5.4 少し複雑な構成であるが， $G = \text{GL}_n$ の場合は放物型部分群の Levi 部分群が GL の直積であるという事情によりもう少し簡単になる．

証明の概略を述べる前に，いくつか系を述べておく．次は $I(\Lambda)$ の既約性から従う．

系 5.5 $B \subset P = MN$ を放物型部分群とし σ を M の超特異表現とすると， $\text{Ind}_P^G(\sigma)$ は有限の長さを持ちその組成列は $\{I(\Pi_M, \Pi_2, \sigma) \mid \Pi_2 \subset \Pi_\sigma\}$ (重複度自由)．

定理の全射性は任意の既約表現 π が適当な超特異表現からの放物型誘導表現の部分商として得られることを主張する．従って上と併せて次が成り立つ．

系 5.6 放物型部分群 $P = MN$ および M の既約認容表現 σ に対して， $\text{Ind}_P^G(\sigma)$ の長さは有限．

$I(\Lambda)$ の佐武パラメータは、 σ_1 のそれから計算可能である。一方、 $\mathcal{H}_G(V)$ の構造から σ_1 の佐武パラメータは中心指標 ω_{σ_1} のみから決まることが示される。特に $\#S(\sigma_1) = 1$ であり、従って $\#S(I(\Lambda)) = 1$ となる。よって次がわかる。

系 5.7 ([Abe11, Corollary 5.11]) 既約認容表現 π に対して、 $\#S(\pi) = 1$.

$S(I(\Lambda))$ の具体的記述から、既に述べていた次の系も従う。

系 5.8 ([Abe11, Corollary 5.12]) π を既約認容表現とする。 π が (K, B, T) に関して超特異であることと、 π が超尖点であることは同値である。とくに、超尖点性は (K, B, T) の取り方に依らないことから、超特異性は (K, B, T) の取り方に依らない。

さて、定理 5.3 の概略を述べる。まずは $I(\Lambda)$ の既約性を示す。 $\pi \subset I(\Lambda)$ を 0 でない部分表現すると、 π は認容的であるから $S(\pi) \neq \emptyset$ 。一方既に述べたとおり $\#S(I(\Lambda)) = 1$ であるので、 $S(\pi) = S(I(\Lambda))$ 。 $\chi \in S(I(\Lambda))$ とする。 $V \subset \pi$ を既約表現とすれば、 $\text{c-Ind}_K^G(V) \otimes_{\mathcal{H}_G(V)} \chi \rightarrow \pi \rightarrow I(\Lambda) = \text{Ind}_{P_\Lambda}(\sigma_\Lambda)$ である。命題 4.1 (1) を用いて $\text{Stab}_W(V^{\bar{U}})$ がもっとも小さくなるようにとっておくと、 χ の具体的な記述から、 $P = P_\Lambda$ として定理 3.1 を用いることができる。よって、 $\sigma' = \text{c-Ind}_{M_\Lambda \cap K}^{M_\Lambda}(V_N) \otimes_{\mathcal{H}_{M_\Lambda}(V_N)} \chi$ とおくと $\text{c-Ind}_K^G(V) \otimes_{\mathcal{H}_G(V)} \chi \simeq \text{Ind}_{P_\Lambda}^G(\sigma')$ である。よって $\text{Ind}_{P_\Lambda}^G(\sigma') \rightarrow \pi \hookrightarrow \text{Ind}_{P_\Lambda}^G(\sigma_\Lambda)$ を得る。ここで、次の事実に注意する。

補題 5.9 (Vignéras [Vig08, Corollarie 7]) $P = MN$ を放物型部分群の Levi 分解とする。 M の表現 σ_1, σ_2 に対して、 $\text{Hom}_M(\sigma_1, \sigma_2) \simeq \text{Hom}_G(\text{Ind}_P^G(\sigma_1), \text{Ind}_P^G(\sigma_2))$ 。

従って、上の射の合成は適当な $\sigma' \rightarrow \sigma_\Lambda$ から得られるが、 σ_Λ は既約だったのでこれは全射。よって $\text{Ind}_{P_\Lambda}^G(\sigma') \rightarrow \text{Ind}_{P_\Lambda}^G(\sigma_\Lambda)$ も全射であり、 $\pi = I(\Lambda)$ である。

単射性を示す。既に述べたとおり $\#S(I(\Lambda)) = 1$ であり、この唯一の元の具体的記述から、 P_Λ を特定することができる。よって、 $I(\Lambda) \simeq I(\Lambda')$ ならば $P_\Lambda = P_{\Lambda'}$ である。補題 5.9 から $\sigma_\Lambda \simeq \sigma_{\Lambda'}$ であるが、 σ_Λ の構成から $\Lambda = \Lambda'$ を示すことができる。

最後に全射性を $\#I$ に関する帰納法で示す。 $I(\Lambda)$ の既約性から得られる系 5.5 により、任意の既約認容表現 π が適当な超特異表現からの誘導の部分商であることを示せばよい。適当な V, χ に対して全射 $\text{c-Ind}_K^G(V) \otimes_{\mathcal{H}_G(V)} \chi \rightarrow \pi$ が存在する。 χ が放物型部分群 $P = MN$ に対して $\mathcal{H}_G(V) \rightarrow \mathcal{H}_M(V_N)$ を経由しているとする。もし χ を取り替えても $P = G$ としかなり得ないのであれば、 π は超特異であるので、示すべきことはない。よって $P \neq G$ として良い。もし定理 3.1 が $\text{Stab}_W(V^{\bar{U}})$ に関する条件無しに使えるならば、 $\text{Ind}_P^G(\text{c-Ind}_{M \cap K}^M(V_N) \otimes_{\mathcal{H}_G(V_N)} \chi) \simeq \text{c-Ind}_K^G(V) \otimes_{\mathcal{H}_G(V)} \chi \rightarrow \pi$ となり、このことから適当な M の既約表現 σ に対して全射 $\text{Ind}_P^G(\sigma) \rightarrow \pi$ が存在することが示される [Her, Lemma 9.9]。帰納法により、 σ は適当な超特異表現からの誘導の部分商であるので、 π もそうなることがわかる。

しかし、定理 3.1 は自由には使えない。 V が (ν, Θ) に対応しているとし、 Θ が最も小さい V をとる。 ($W_\Theta = \text{Stab}_W(V^{\bar{U}})$ であるから、 $\text{Stab}_W(V^{\bar{U}})$ が最も小さいことと同値である。) $\Pi_M \cup \Theta \neq \Pi$ ならば、 $\Pi_M \cup \Theta$ に対応する放物型部分群に対して定理 3.1 を適用することができ、帰納法により

証明が簡潔する．よって $\Pi_M \cup \Theta = \Pi$ として良い． $P' = M'N'$ を $\Pi \setminus \Pi_M$ に対応する放物型部分群とする．このとき， Θ の最小性と，命題 4.1 (1) から $\langle \Pi_M, \Theta \rangle = 0$ ，よって $\langle \Pi_M, \check{\Pi}_{M'} \rangle = 0$ となる．よって，おおざっぱには $G \simeq M \times M'$ となる．（これは不成立であるが，以下簡単のためこうなっていると思うこととする．正当化にはもう少し議論が必要である．なお， G が GL の直積の場合は M および M' を GL の直積にとればよい．このとき，Levi 部分群も GL の直積であるため，帰納法も進行する．）この分解に応じて $\pi \simeq \pi_1 \otimes \pi_2$ と分解する． χ は $\mathcal{H}_G(V) \rightarrow \mathcal{H}_M(V_N)$ を経由していたが，Hecke 環も $\mathcal{H}_G(V) \simeq \mathcal{H}_M(V_1) \otimes \mathcal{H}_{M'}(V_2)$ と分解するため， $\chi = \chi_1 \otimes \chi_2$ と分解し， χ_2 は $\mathcal{H}_{M'}(V_2) \rightarrow \mathcal{H}_T((V_2)_{M' \cap U})$ を経由する．よって注意 4.3 から π_2 は適当な $M' \cap B$ からの誘導表現の部分商となり， π は P からの誘導表現の部分商．帰納法により証明が完結する．

参考文献

- [Abe11] N. Abe, *On a classification of irreducible admissible modulo p representations of a p -adic split reductive group*, arXiv:1103.2525.
- [BL94] L. Barthel and R. Livné, *Irreducible modular representations of GL_2 of a local field*, Duke Math. J. **75** (1994), no. 2, 261–292.
- [BL95] L. Barthel and R. Livné, *Modular representations of GL_2 of a local field: the ordinary, unramified case*, J. Number Theory **55** (1995), no. 1, 1–27.
- [BP] C. Breuil and V. Paškūnas, *Towards a modulo p Langlands correspondence for GL_2* , Memoirs of Amer. Math. Soc., DOI:10.1090/S0065-9266-2011-00623-4.
- [Bre03] C. Breuil, *Sur quelques représentations modulaires et p -adiques de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$. I*, Compositio Math. **138** (2003), no. 2, 165–188.
- [CG97] N. Chriss and V. Ginzburg, *Representation theory and complex geometry*, Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 1997.
- [CL76] R. W. Carter and G. Lusztig, *Modular representations of finite groups of Lie type*, Proc. London Math. Soc. (3) **32** (1976), no. 2, 347–384.
- [GK] E. Große-Klönne, *On special representations of p -adic reductive groups*, preprint.
- [Her] F. Herzig, *The classification of irreducible admissible mod p representations of a p -adic GL_n* , Invent. Math., DOI:10.1007/s00222-011-0321-z.
- [Her11] F. Herzig, *A Satake isomorphism in characteristic p* , Compos. Math. **147** (2011), no. 1, 263–283.
- [Kat82] S.-i. Kato, *Spherical functions and a q -analogue of Kostant’s weight multiplicity formula*, Invent. Math. **66** (1982), no. 3, 461–468.
- [Vig08] M.-F. Vignéras, *Série principale modulo p de groupes réductifs p -adiques*, Geom. Funct. Anal. **17** (2008), no. 6, 2090–2112.