

代数的線形常微分方程式と Kac-Moody root 系

大島利雄*, 廣恵一希†

東京大学大学院数理科学研究科

1 Introduction

有理関数や指数関数などの初等関数以外の関数を超越関数というが、その中でも応用の多い重要な関数は特殊関数と呼ばれ、古くから研究されてきた。古典的な特殊関数の中でも最も重要なものとして Gauss の超幾何関数が挙げられる。Bessel 関数, Whittaker 関数, Legendre 多項式といったその他のよく知られた特殊関数たち^{*1}はこの Gauss の超幾何関数のある種の極限操作や特殊化として得ることができ、岩波全書の公式集 III「特殊関数」[MUI] の 3 分の 2 以上はこれで占められている。この Gauss の超幾何関数は、ある代数的線形常微分方程式^{*2}を満たしていることを使って、様々な性質が求められて来た。このように、代数的線形常微分方程式で特徴付けられる「特殊関数」の性質や具体的公式を得るための、現在発展中の新しい理論について解説したい。

Gauss の超幾何関数は Euler によって導入された以下のような超幾何級数と呼ばれる巾級数で表される。

$$F(\alpha, \beta, \gamma; x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_n (\beta)_n}{(\gamma)_n n!} x^n = 1 + \frac{\alpha\beta}{\gamma} x + \cdots.$$

ここで $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}^{*3}$, $(\alpha)_n := \alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1) = \frac{\Gamma(\alpha+n)}{\Gamma(\alpha)}$. さらにこの巾級数の収束条件は $|x| < 1$ であり, Gauss の超幾何微分方程式とよばれる次の代数的線形微分方程式を満たすことが確かめられる。

$$x(1-x)u'' + (\gamma - (\alpha + \beta + 1)x)u' - \alpha\beta u = 0.$$

簡単のために

$$P = x(1-x)\partial^2 + (\gamma - (\alpha + \beta + 1)x)\partial - \alpha\beta \quad (\partial := \frac{d}{dx})$$

と置いて, Gauss の超幾何関数の満たす微分方程式を

$$(GE): Pu = 0$$

* E-mail: oshima@ms.u-tokyo.ac.jp

† E-mail: kazuki@ms.u-tokyo.ac.jp

*1 Whittaker-Watson [WW] 等の文献がある

*2 代数的とは、多項式または有理関数係数の常微分方程式の意味で使った

*3 これらの値によっては定義されない場合があることに注意。たとえば γ が負の整数の時

と書くことにしよう．次にこの微分方程式の解を調べてみる．まず，

$$\partial: x^\lambda \longmapsto \lambda x^{\lambda-1}$$

$$x: x^\lambda \longmapsto x^{\lambda+1}$$

より

$$\vartheta := x\partial: x^\lambda \longmapsto \lambda x^\lambda$$

となる．すなわち x^λ は線形作用素 ϑ の固有値 λ をもつ固有ベクトルとなる．これを踏まえて以下の式変形をする．

$$\begin{aligned} xP &= x^2\partial^2 + \gamma x\partial - x(x^2\partial^2 + (\alpha + \beta + 1)x\partial + \alpha\beta) \\ &= \vartheta(\vartheta - 1) + \gamma\vartheta - x(\vartheta(\vartheta - 1) + (\alpha + \beta + 1)\vartheta + \alpha\beta) \\ &= \vartheta(\vartheta + \gamma - 1) - x(\vartheta + \alpha)(\vartheta + \beta). \\ \therefore Pu = 0 &\iff \vartheta(\vartheta + \gamma - 1)u = x(\vartheta + \alpha)(\vartheta + \beta)u. \end{aligned}$$

右辺の式が u の巾級数展開の各係数の関係を与えている．すなわち， $u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ を右辺に代入して x^n の係数を比べてみると，

$$c_n \times n(n + \gamma - 1) = c_{n-1} \times (n - 1 + \alpha)(n - 1 + \beta)$$

を得る．従って

$$c_n = c_{n-1} \frac{(\alpha + n - 1)(\beta + n - 1)}{(\gamma + n - 1)n} = \cdots = c_0 \frac{(\alpha)_n(\beta)_n}{(\gamma)_n n!} \quad (c_0 = u(0))$$

となって係数が決まる．よって Gauss の超幾何関数が $Pu = 0$ を満たす事が確かめられた．

この超幾何級数の $x = 1$ での値は Gauss によって，

$$C_{\alpha,\beta,\gamma} := F(\alpha, \beta, \gamma; 1) = \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma - \alpha - \beta)}{\Gamma(\gamma - \alpha)\Gamma(\gamma - \beta)}$$

となることが示された． $\operatorname{Re} \alpha + \operatorname{Re} \beta < \operatorname{Re} \gamma$ ならば^{*4} 左辺の級数は絶対収束することに注意しよう．これは Gauss の和公式 (Gauss summation formula) と呼ばれ，この公式から特異点の間の接続公式が得られ，Gauss の超幾何関数も大域的性質が分かる．この最も重要な公式の証明を 2 通り紹介しよう．

1 つ目 (Gauss による証明)

式 $\frac{C_{\alpha,\beta,\gamma+1}}{C_{\alpha,\beta,\gamma}} = \frac{\gamma(\gamma - \alpha - \beta)}{(\gamma - \alpha)(\gamma - \beta)}$ と $\lim_{n \rightarrow \infty} C_{\alpha,\beta,\gamma+n} = 1$ から導かれる．

2 つ目 適当な条件下^{*5}で $F(\alpha, \beta, \gamma; x)$ は以下のような積分表示を持つ．

$$F(\alpha, \beta, \gamma; x) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma - \beta)} \int_0^1 t^{\beta-1} (1-t)^{\gamma-\beta-1} (1-tx)^{-\alpha} dt$$

^{*4} $\operatorname{Re} \alpha$ は複素数 α の実部．虚部は $\operatorname{Im} \alpha$ と書く．

^{*5} 例えば $0 < \operatorname{Re} \beta < \operatorname{Re} \gamma$, $0 < \arg(x - 1) < 2\pi$

この右辺で $x = 1$ とすれば $\operatorname{Re}(\gamma - \beta - \alpha) > 0$ の時、積分は収束してベータ関数となり、
 (右辺) $= \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\beta)} \times \frac{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\alpha-\beta)}{\Gamma(\gamma-\alpha)}$ を得る。

ちなみにこの積分表示は

$$\begin{aligned} (1-tx)^{-\alpha} &= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-\alpha}{n} (-t)^n x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\alpha)(-\alpha-1)\cdots(-\alpha-n+1)}{n!} (-t)^n x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_n}{n!} t^n x^n \end{aligned}$$

を積分に代入して x^n の係数を見ると、各項の積分はベータ関数になり、

$$\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\beta)} \frac{(\alpha)_n}{n!} \frac{\Gamma(\beta-1+n)\Gamma(\gamma-\beta)}{\Gamma(\gamma+n-1)} = \frac{(\alpha)_n(\beta)_n}{(\gamma)_n n!}$$

となって積分が $F(\alpha, \beta, \gamma; x)$ に等しいことが分かる。

次は特異点について考えてみる。微分方程式 (GE) の特異点^{*6}は $\{0, 1, \infty\}$ である。単連結な開集合 $U \subset (\mathbb{C} \cup \{\infty\}) \setminus \{0, 1, \infty\}$ に対し $\mathcal{F}(U) = \{u \in \mathcal{O}(U) \mid Pu = 0\}$ を U 上の正則解全体とする。ここで $\mathcal{O}(U)$ は U 上の正則関数全体を表す。この時一般論より次の事が知られる。

- $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{F}(U) = 2$.
- $U' \subset U$ なる単連結開集合について $\mathcal{F}(U)|_{U'} = \mathcal{F}(U')$.
- $\mathcal{F}(U) = \mathbb{C}\phi_1 + \mathbb{C}\phi_2$, $\phi_1, \phi_2 \in \mathcal{O}(U)$ と書いたとき次が成り立つ。

1. ある定数 $C \in \mathbb{R}_{>0}$, $N \in \mathbb{N}$ があって

$$|\phi_j(x)| \leq C|x|^{-N} \quad (j = 1, 2, x \in U, |\arg x| < 2\pi, |x| < \frac{1}{2})$$

すなわち $x = 0$ に近づいたとき、高々極程度にしか関数値の絶対値が増大しない^{*7}。

2. $x = 0$ で正則で $\psi_1(0) = \psi_2(0) = 1$ を満たす正則関数 $\psi_1(x), \psi_2(x)$ を用いて

$$\mathcal{F}(U) = \mathbb{C}x^0\psi_1(x) + \mathbb{C}x^{1-\gamma}\psi_2(x)$$

と書ける。すなわち $x = 0$ での特性指数 (characteristic exponent) は 0 と $1 - \gamma$ である。ここで $\psi_1(x) = F(\alpha, \beta, \gamma; x)$ であることに注意しておこう。

また、 $x = 1$, $x = \infty$ での特性指数はそれぞれ $\{0, \gamma - \alpha - \beta\}$, $\{\alpha, \beta\}$ 。

各特異点での特性指数を

$$\begin{pmatrix} x=0 & 1 & \infty \\ 0 & 0 & \alpha \\ 1-\gamma & \gamma-\alpha-\beta & \beta \end{pmatrix}$$

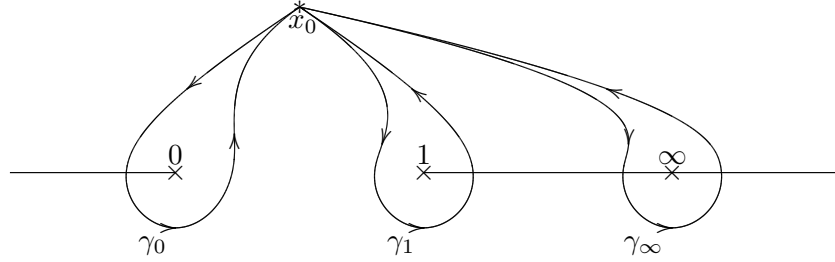
^{*6} 最高階の係数を 1 と正規化した時の係数の特異点。無限遠点は $x \mapsto \frac{1}{x}$ と変換して原点でみればよい

^{*7} この条件は、特異点が確定特異点、ということに対応している

のような表にすることが出来る．このような表を **Riemann 図式** (Riemann scheme) と呼ぶ．

Riemann は，この図式で表された特異性が Gauss の超幾何微分方程式を，すなわち Gauss の超幾何関数を一意的に定めていることを示した^{*8}．

次にモノドロミー (monodromy) について考える． $(\mathbb{C} \cup \{\infty\}) \setminus \{0, 1, \infty\}$ の基本群は，起点 x_0 を決め，そこから以下の図のような各特異点を回る閉曲線 $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_\infty$ で生成される．



(u_1, u_2) を x_0 の近傍での (GE) の二つの線形独立な解とすると，それぞれの閉曲線 γ_j ($j = 0, 1, \infty$) に沿って解析接続したのも再び x_0 の近傍での解となるから，それを $\gamma_j(u_1, u_2)$ と書くことにすると，ある正則行列 $M_j \in GL(2, \mathbb{C})$ があって，

$$\gamma_j(u_1, u_2) = (u_1, u_2)M_j$$

と書けることが分かる．これら M_j ($j = 0, 1, \infty$) を $x = j$ での (局所) モノドロミー行列と呼ぶ．

今 u を (GE) の解とするととき， $x^{\mu_1}(1-x)^{\mu_2}u$ は Riemann 図式

$$\left\{ \begin{array}{ccc} x=0 & 1 & \infty \\ \mu_1 & \mu_2 & \alpha - \mu_1 - \mu_2 \\ \mu_1 + 1 - \gamma & \mu_2 + \gamma - \alpha - \beta & \beta - \mu_1 - \mu_1 \end{array} \right\}$$

を持つ微分方程式の解となる．よって一般的な Riemann 図式

$$\left\{ \begin{array}{ccc} x=0 & 1 & \infty \\ \lambda_{01} & \lambda_{11} & \lambda_{21} \\ \lambda_{02} & \lambda_{12} & \lambda_{22} \end{array} \right\}$$

を考えればよいが，このとき λ_{kl} には線形関係式 (Fuchs の関係式) $\sum \lambda_{kl} = 1$ が成り立つ．

この一般的な Riemann 図式に対し， u_{02} を $x = 0$ の周りで特性指数 λ_{02} を持つ解とし， u_{12} を $x = 1$ の周りで特性指数 λ_{12} を持つ解としよう．これらは線形独立であるとしてよい (そうでなければ u_{01} あるいは u_{22} を代わりにとればよい)．このときモノドロミー行列はある定数 a, b があって

$$M_0 = \begin{pmatrix} e(\lambda_{02}) & a \\ 0 & e(\lambda_{01}) \end{pmatrix}, \quad M_1 = \begin{pmatrix} e(\lambda_{11}) & 0 \\ b & e(\lambda_{12}) \end{pmatrix}$$

となる^{*9}．ここで

$$e(\lambda) := e^{2\pi i \lambda}.$$

^{*8} rigid であることに対応

^{*9} $u_{12} = u_{01} + C u_{02}$ とすれば， $\gamma_0 u_{12} = e(\lambda_{01}) u_{01} + C e(\lambda_{02}) u_{02} = e(\lambda_{01}) u_{12} + C(e(\lambda_{02}) - e(\lambda_{01})) u_{02}$ となることからわかる． M_1 も同様．なお λ_{kl} は一般とする

一方で $M_\infty = (M_1 M_0)^{-1}$ から $\text{Tr}(M_1 M_0) = \text{Tr}(M_\infty^{-1})$ となるので^{*10}

$$e(\lambda_{02})e(\lambda_{11}) + e(\lambda_{01})e(\lambda_{12}) + ab = e(-\lambda_{21})e(-\lambda_{22})$$

が得られる．このとき $ab \neq 0$ ^{*11} ならば，基底を取り替えて $a = 1$ としてよいので，上の式より b も求まり，定数 a, b が決まる．

この様に上の Riemann 図式をもつ微分方程式の大域モノドロミーは特異点での局所モノドロミーを決める特性指数から決定されてしまう．このようなとき大域モノドロミー（あるいは方程式）は rigid であるといわれる．

このことを一般の Fuchs 型方程式で考えてみよう．一般的な階数 n の線形常微分方程式

$$Pu = 0$$

を考え， P の特異点は $\{c_0 = \infty, c_1, \dots, c_p\} (\subset \mathbb{C} \cup \{\infty\})$ で全て確定特異点であるとする．また特異点 $x = c_j$ での局所モノドロミーの固有値の重複度を $m_{j,1}, \dots, m_{j,n_j}$ ($\sum_{\nu=1}^{n_j} m_{j,\nu} = n$) とすると，これは n の分割

$$m_j = (m_{j,1}, \dots, m_{j,n_j})$$

を与える．これらを集めると

$$\mathbf{m} = (m_0, m_1, \dots, m_p)$$

という n の分割の $(p+1)$ 個の組を考えることができる．これらのデータ，すなわちスペクトル型が与えられたときに一般化された Riemann 図式 (generalized Riemann scheme)

$$\left\{ \begin{array}{cccc} x = c_0 & c_1 & \cdots & c_p \\ [\lambda_{0,0}]_{(m_{0,0})} & [\lambda_{1,0}]_{(m_{1,0})} & \cdots & [\lambda_{p,0}]_{(m_{p,0})} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ [\lambda_{0,n_0}]_{(m_{0,n_0})} & [\lambda_{1,n_1}]_{(m_{1,n_1})} & \cdots & [\lambda_{p,n_p}]_{(m_{p,n_p})} \end{array} \right\}$$

を考える事ができる．ただし，ここで

$$[\lambda]_{(k)} := \begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda + 1 \\ \vdots \\ \lambda + k - 1 \end{pmatrix}$$

とし，各 $\lambda_{j,\nu} - \lambda_{j,\nu'} (0 \leq j \leq p, 1 \leq \nu < \nu' \leq n_j)$ が整数値を取らない^{*12} ときは，特異点でのモノドロミー行列が対角化可能とする．さて，この様に勝手に与えられた（一般化）Riemann 図式に対して，実際その Riemann 図式を持つような微分方程式 $P_{\mathbf{m}}(\lambda)u = 0$ （あるいは Riemann 図式に対応する局所モノドロミーの同値類を持つような大域モノドロミー）は存在するだろうか？この問題は Deligne-Simpson-Katz 問題と呼ばれている．

^{*10} $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_\infty$ をこの順でつなげた道は基本群の単位元を定義するので， $M_\infty M_1 M_0$ は単位行列になる

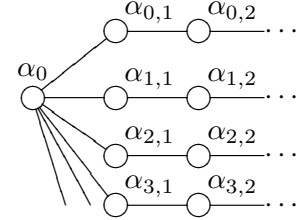
^{*11} モノドロミーが既約ならば満たされる

^{*12} この条件を満たさない場合は， $\lambda_{j,\nu}$ を正則パラメータと考えることにより，自然に定義が可能

最後にルート系との対応の話をしてしよう。

上で与えた n の分割の組において, $\Pi = \{\alpha_0, \alpha_{0,1}, \alpha_{0,2}, \dots, \alpha_{1,1}, \alpha_{1,2}, \dots, \alpha_{j,\nu}, \dots\}$ を単純ルー

トとし, 次のような星形 Dynkin 図を持つルート系を考えよう。



このとき n の分割の組 $\mathbf{m}$ に対し,

$$n_{j,\nu} = \sum_{\mu=\nu+1}^{n_j} m_{j,\mu}$$

とおくと,

$$\mathbf{m} \longleftrightarrow \alpha_{\mathbf{m}} = n\alpha_0 + \sum_{j \geq 0} \sum_{k \geq 1} n_{j,\nu} \alpha_{j,\nu}$$

としてルート空間の元 $\alpha_{\mathbf{m}}$ を対応させることができる。すると Deligne-Simpson-Katz 問題や rigidity はルートの言葉に換言され, 以下の美しい結果が成立する^{*13}。

一般化 Riemann 図式を持つ既約微分方程式が存在する $\iff \alpha_{\mathbf{m}}$ は正ルート

対応する微分方程式が rigid である $\iff \alpha_{\mathbf{m}}$ が正の実ルート

たとえば, ${}_nF_{n-1}$ の記号で書かれる一般超幾何級数の満たす方程式や, 積分で表される解を持つ Jordan-Pochhammer の微分方程式は rigid となり, リーマン球面上で 4 点の確定特異点をもつ 2 階の一般方程式である Huen の微分方程式は rigid ではなく, アクセサリー・パラメーターを持つ。

単純ルート α に対応する鏡映 s_{α} で生成される群 (無限群になる) はこのルート系の Weyl 群であるが, Riemann 図式でパラメトライズされた方程式全体の空間 $\{P_{\mathbf{m}}(\lambda)\}$ やそれらの解空間の集合上にこの Weyl 群の作用が定義される。そのことに基づいて, この美しい結果が示される。

$$\begin{array}{ccc} \{P_{\mathbf{m}}(\lambda)\} & \rightarrow & \Delta^+ = \{\alpha_{\mathbf{m}}\} \\ \downarrow S_{\alpha} & \circlearrowleft & \downarrow s_{\alpha} \\ \{P_{\mathbf{m}}(\lambda)\} & \rightarrow & \Delta^+ = \{\alpha_{\mathbf{m}}\} \end{array}$$

微分作用素に対する変換 S_{α} は, その解に対しての一般階微分 $\partial^{-\mu}$ や関数 $\prod_j (x - c_j)^{\lambda_j}$ との積として具体的に表せる。このような原理で, 方程式の構成, 接続係数の計算, 解のべき級数表示や積分表示, 隣接関係式, モノドロミーの既約性, 確定特異点の合流, 多項式解の構成などの問題を統一的, かつ具体的^{*14}に扱うことができる。この講演ではその一端として, Riemann 図式を基に, 方程式の存在と構成, 解の接続問題を主に紹介する。さらに Fuchs 型方程式に対して得られたこれらのきれいな理論を不確定特異点を持つ方程式に拡張する試みに関しても解説したい。

^{*13} 正確には, 大きさが 0 の虚ルートのときのみ「 $\{m_{j,\nu}\}$ の最大公約数が 1」などの制限が付く

^{*14} これらの問題の答えを与えるコンピュータのプログラムが作成されている

2 Fuchs 型微分作用素と Kac-Moody root 系 , Deligne-Simpson-Katz の問題 , 接続問題

上で解説したことをもう少し正確に Fuchs 型の場合にまず解説する^{*15} . Riemann 球面 $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ から有限個の点 $\{c_0, \dots, c_p\}$ を除いた集合を X とする .

1. X に含まれる任意の単連結開集合 U に対し , U 上の正則関数の空間 $\mathcal{O}(U)$ の n 個の元を基底とする n 次元の空間 $\mathcal{F}(U)$ が定まっていて , 次の両立条件を満たすとする (この対応 $U \mapsto \mathcal{F}(U)$ を $\mathcal{F}$ と書く) .

$$X \supset U \supset V : \text{単連結} \implies \mathcal{F}(V) = \mathcal{F}(U)|_V \quad (1)$$

2. 特異点に近づいたとき , $\mathcal{F}(U)$ の各元は特異点との距離の適当な逆べき程度でしか増大しない . より正確には , 1 次分数変換で特異点を 0 に移して考えると , $\mathcal{F}(U)$ の元 $u(x)$ は , 適当な正数 C, N, ϵ を選ぶと

$$|u(x)| < C|x|^{-N} \quad (0 < |x| < \epsilon) \quad (2)$$

を満たす . ただし $U \subset \{x \in \mathbb{C}; e^{-i\theta}x \notin \mathbb{R}_+\}$ となる $\theta \in \mathbb{R}$ があるとする .

3. 一般に n 階の常微分方程式の局所解は , (特異点以外で) $n-1$ 階までの微係数を与えると定まるので , 解空間の基底に対する Wronskian は消えない . そこで X 上では $\mathcal{F}(U)$ の基底に対する Wronskian が消えないと仮定する . 消える点があれば , それは孤立しているので特異点に含め , それを X から除けばよい . そのような特異点を見かけの特異点という .

以下 , 特に断らなければ , 簡単のため $c_0 = \infty$ とする .

上記の 3 つの条件を満たす (多価) 正則関数の空間 $\mathcal{F}$ の全体と , 以下の形の微分作用素 P とは , $Pu = 0$ の解空間を考えることにより , 1 対 1 に対応する .

$$P = \left(\prod_{j=1}^p (x - c_j)^n \right) \frac{d^n}{dx^n} + \sum_{k=0}^{n-1} a_k(x) \left(\prod_{j=1}^p (x - c_j)^k \right) \frac{d^k}{dx^k}, \quad (3)$$

$$a_k(x) \in \mathbb{C}[x], \deg a_k(x) \leq (n-k)(p-1).$$

ここで多項式の次数を $\deg$ と書くが , 特に $\deg 0 = 0$ と約束しておく . この形の微分作用素 (あるいはそれに (左から) 有理関数を掛けて得られたもの) を Fuchs 型常微分作用素という .

2.1 特性指数 , モノドロミーとスペクトル型

前節の $\mathcal{F}(U)$ あるいは $Pu = 0$ の解空間は , (特異点を含む) 任意の点の近くで以下の様な基底 $u_1(x), \dots, u_n(x)$ をもつことが分かる . すなわち , その点を原点に一次分数変換で変換して書くと

$$u_\nu(x) \sim x^{\lambda_\nu} \log^{k_\nu} x.$$

^{*15} この章は 2010 年表現論シンポジウム予稿集の大島の原稿「Fuchs 型常微分方程式と Kac-Moody root 系」を援用している

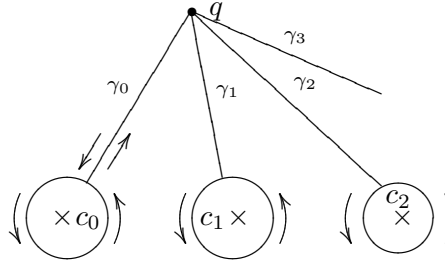
ただし (λ_ν, k_ν) は互いに異なる $(\nu = 1, \dots, n)$. このとき $\{\lambda_\nu; \nu = 1, \dots, n\}$ をその点における特性指数という (なお, 特性指数には, 重複度が許される).

特異点でない点では, 特性指数は $\{0, 1, \dots, n-1\}$ である.

特異点での特性指数は, 重要な局所的データとなっている. Gauss の超幾何微分方程式の特異点は $\infty, 0, 1$ で, そこでの特性指数は, それぞれ $\{\alpha, \beta\}$, $\{0, 1-\gamma\}$, $\{0, \gamma-\alpha-\beta\}$ となり, これを集めたデータを以下の様に表して Riemann scheme という.

$$\left\{ \begin{array}{ccc} x = \infty & x = 0 & x = 1 \\ \alpha & 0 & 0 \\ \beta & 1-\gamma & \gamma-\alpha-\beta \end{array} ; x \right\} \quad (4)$$

$\mathcal{F}$ の多価性は, 基底 $\tilde{u} = (\tilde{u}_1, \dots, \tilde{u}_n)$ を決めて以下の様な解析接続の道を考えると, 各特異点 c_j を反時計回りにまわる道 γ_j に対して定まる基底の一次変換を表す行列 M_j で記述できる. この M_j をモノドロミー生成元という.



$$\begin{aligned} \gamma_i \circ \gamma_j(\tilde{u}) &= \gamma_j(\tilde{u} M_i) \\ &= \gamma_j(\tilde{u}) M_i \\ &= \tilde{u} M_j M_i, \\ M_p M_{p-1} \cdots M_1 M_0 &= I_n. \end{aligned} \quad (5)$$

このとき c_j での特性指数を $\lambda_{j,1}, \dots, \lambda_{j,n}$ とすると, M_j の固有値は $e^{2\pi i \lambda_{j,1}}, \dots, e^{2\pi i \lambda_{j,n}}$ となる. 特に $\lambda_{j,\nu} - \lambda_{j,\nu'} \notin \mathbb{Z}$ ($1 \leq \nu < \nu' \leq n$) ならば, M_j は半単純 (対角化可能) である.

古くからその性質が研究されている Fuchs 型方程式の解となる特殊関数は, その局所モノドロミーの言葉で特徴付けが可能である. たとえば一般超幾何級数

$${}_n F_{n-1}(\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_1, \dots, \beta_{n-1}; x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(\alpha_1)_\nu \cdots (\alpha_n)_\nu}{(\beta_1)_\nu \cdots (\beta_{n-1})_\nu \nu!} x^\nu \quad (6)$$

は, 特異点が $\infty, 0, 1$ にある関数と方程式を定義するがその方程式は “1 に $n-1$ 次元の正則解がある” という特徴付けをもつ (これは 1 での特性指数 $0, 1, \dots, n-2$ に対応). また Jordan-Pochhammer の方程式は, 特異点 c_j が $p+1$ 個ある p 階の方程式で, c_j ($j = 1, \dots, p$) では特性指数 $0, \dots, p-2$ に対応して $p-1$ 次元の正則解があり, ∞ においても, 特性指数が $\lambda, \lambda+1, \dots, \lambda+p-1$ となる複素数 λ があって, それに対応して, x^λ を掛けると ∞ で正則解となる $p-1$ 次元の解があるということで特徴付けられる. これらの特異点では, モノドロミー生成元には固有値に重複があるが, (パラメーター一般のときは) 半単純になっている. これを一般化し

Definition 1. 特異点 c_j での一般化特性指数が $\{[\lambda_{j,1}]_{(m_{j,1})}, \dots, [\lambda_{j,n_j}]_{(m_{j,n_j})}\}$ であるとは, 特性指数が

$$\{\lambda_{j,\nu} + k; k = 0, \dots, m_{j,\nu} - 1, \nu = 1, \dots, n_j\} \quad (7)$$

であって,

$$\lambda_{j,\nu} - \lambda_{j,\nu'} \notin \mathbb{Z} \text{ のときは, そこでのモノドロミー生成元が半単純} \quad (8)$$

と定義する (ただし, $n = m_{j,1} + \cdots + m_{j,n_j}$).

$\lambda_{j,\nu} = \lambda_{j,1}$ ($\nu = 2, \dots, n_j$) のときは, 特性指数が (7) であって, モノドロミー生成元の *Jordan* 標準形のブロックサイズが, n の分割 $m_{j,1} + \cdots + m_{j,n_j}$ の *dual* の分割になっていることと定義する. 一般の場合については, [Os4] を参照してください.

各特異点での一般化特性指数を考えることにより, 一般化 *Riemann scheme*

$$\{\lambda_{\mathbf{m}}\} := \left\{ \begin{array}{cccc} x = c_0 & c_1 & \cdots & c_p \\ [\lambda_{0,1}]_{(m_{0,1})} & [\lambda_{1,1}]_{(m_{1,1})} & \cdots & [\lambda_{p,1}]_{(m_{p,1})} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ [\lambda_{0,n_0}]_{(m_{0,n_0})} & [\lambda_{1,n_1}]_{(m_{1,n_1})} & \cdots & [\lambda_{p,n_p}]_{(m_{p,n_p})} \end{array} ; x \right\}. \quad (9)$$

が定義される. また $p+1$ 個の n の分割の組

$$n = m_{j,1} + \cdots + m_{j,n_j} \quad (j = 0, \dots, p) \quad (10)$$

のことを, 対応する $\mathcal{F}$ または作用素 P のスペクトル型という.

一般化超幾何および *Jordan-Pochhammer* の一般化 *Riemann scheme* は

$$\left\{ \begin{array}{ccc} x = 0 & 1 & \infty \\ 1 - \beta_1 & [0]_{(n-1)} & \alpha_1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 - \beta_{n-1} & & \alpha_{n-1} \\ 0 & -\beta_n & \alpha_n \end{array} ; x \right\}, \quad \sum_{\nu=1}^n \alpha_{\nu} = \sum_{\nu=1}^n \beta_{\nu}, \quad (11)$$

$$\left\{ \begin{array}{cccc} x = \infty & c_1 & \cdots & c_p \\ [\lambda'_0]_{(p-1)} & [0]_{(p-1)} & \cdots & [0]_{(p-1)} \\ \lambda_0 & \lambda_1 & \cdots & \lambda_p \end{array} ; x \right\}, \quad (p-1)\lambda'_0 + \sum_{j=0}^p \lambda_j = p-1 \quad (12)$$

となり, それぞれのスペクトル型は

$$1^n, n-11, 1^n \quad \text{および} \quad \underbrace{p-11, p-11, \dots, p-11}_{p+1}$$

となる ($n=2, p=2$ は Gauss の超幾何で, $11, 11, 11$).

スペクトル型 $\mathbf{m} = \{m_{j,\nu}\}_{\substack{0 \leq j \leq p \\ 1 \leq \nu \leq n_j}}$ は, n の $p+1$ 個の分割であるが, $n = \text{ord } \mathbf{m}$ とおき, 以下の様に拡張しておく.

$$\begin{aligned} m_{j,\nu} &= n\delta_{\nu,1}, \quad n_j = 1 \quad (j > p), \\ m_{j,\nu} &= 0 \quad (\nu > n_j). \end{aligned} \quad (13)$$

Remark 2. $\{\lambda_{\mathbf{m}}\}$ が *Fuchs* 型方程式の一般化 *Riemann scheme* (GRS) であれば以下の *Fuchs* 条件 (FC) が成り立つ.

$$|\{\lambda_{\mathbf{m}}\}| := \sum_{j=0}^p \sum_{\nu=1}^{n_j} m_{j,\nu} \lambda_{j,\nu} - \text{ord } \mathbf{m} + \text{idx } \mathbf{m} = 0. \quad (14)$$

ここで

$$\text{idx}(\mathbf{m}, \mathbf{m}') := \lim_{p \rightarrow \infty} \left(\sum_{j=0}^p \sum_{\nu=1}^{\infty} m_{j,\nu} m'_{j,\nu} - (p-1) \text{ord } \mathbf{m} \cdot \text{ord } \mathbf{m}' \right), \quad (15)$$

$$\text{idx } \mathbf{m} := \text{idx}(\mathbf{m}, \mathbf{m}). \quad (16)$$

問題. スペクトル型 $\mathbf{m}$ によって Fuchs 型方程式を分類して解析せよ.

- (FC) の下で generic な $\lambda_{j,\nu}$ に対し, (GRS) $\{\lambda_{\mathbf{m}}\}$ をもつ (既約な) $\mathcal{F}$ や Fuchs 型常微分作用素が存在するか?
存在するなら, それをパラメトライズせよ.
存在する $\mathbf{m}$ を (irreducibly) realizable と定義する.
- 上の分類に基づいて, Fuchs 型常微分方程式の基本問題, すなわち, 解の表示 (べき級数や積分による), 接続問題, 既約性, 隣接関係式, 多項間関係式, 多項式解, 解空間のモノドロミーなどを解析せよ.

2.2 Kac-Moody root 系

インデックスの集合

$$I := \{0, (j, \nu); j = 0, 1, \dots, \nu = 1, 2, \dots\}. \quad (17)$$

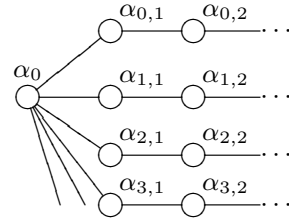
でパラメトライズされる基底 α_i ($i \in I$) で張られる無限次元ベクトル空間を $\mathfrak{h}$ とおく. さらに以下の様に内積 (正定値でない) と鏡映 s_i を定め, 鏡映で生成される群を W_{∞} として定義される Kac-Moody root 系 (Π, W_{∞}) を考える. α_i を単純ルート, W_{∞} を Weyl 群という.

$$\Pi = \{\alpha_i; i \in I\} = \{\alpha_0, \alpha_{j,\nu}; j = 0, 1, 2, \dots, \nu = 1, 2, \dots\}. \quad (18)$$

$$I' := I \setminus \{0\}, \quad \Pi' := \Pi \setminus \{\alpha_0\}, \quad (19)$$

$$Q := \sum_{\alpha \in \Pi} \mathbb{Z}\alpha \supset Q_+ := \sum_{\alpha \in \Pi} \mathbb{Z}_{\geq 0}\alpha. \quad (20)$$

$$\begin{aligned} (\alpha|\alpha) &= 2 & (\alpha \in \Pi), \\ (\alpha_0|\alpha_{j,\nu}) &= -\delta_{\nu,1}, \\ (\alpha_{i,\mu}|\alpha_{j,\nu}) &= \begin{cases} 0 & (i \neq j \text{ or } |\mu - \nu| > 1), \\ -1 & (i = j \text{ and } |\mu - \nu| = 1). \end{cases} \end{aligned} \quad (21)$$



$(\alpha|\alpha) \neq 0$ を満たす $\alpha \in \mathfrak{h}$ に関する鏡映 s_{α} は以下のように定義される.

$$s_{\alpha} : \mathfrak{h} \ni x \mapsto x - 2 \frac{(x|\alpha)}{(\alpha|\alpha)} \alpha \in \mathfrak{h}, \quad (22)$$

$$s_i = s_{\alpha_i} \text{ for } i \in I. \quad (23)$$

ルートの集合 $\Delta = \Delta^{re} \cup \Delta^{im}$ と正ルートの集合 $\Delta_+ = \Delta \cap Q_+$ の定義は：

$$\Delta^{re} := W_\infty \Pi \quad (\text{実ルート}), \quad \Delta_+^{re} := \Delta^{re} \cap Q_+, \quad (24)$$

$$\Delta_+^{im} := W_\infty B \quad (\text{正の虚ルート}) \quad (25)$$

$$B := \{\beta \in Q_+; \text{supp } \beta \text{ is connected and } (\beta, \alpha) \leq 0 \quad (\forall \alpha \in \Pi)\},$$

$$\Delta^{im} := \Delta_+^{im} \cup \Delta_-^{im}, \quad \Delta_-^{im} := -\Delta_+^{im}. \quad (26)$$

$w \in W_\infty, \alpha \in Q$ に対し，以下のように定義する．

$$\Delta(w)_+ := \Delta_+^{re} \cap w^{-1} \Delta_-^{re}, \quad (27)$$

$$L(w) := \#\Delta(w)_+, \quad (28)$$

$$h(\alpha) := n_0 + \sum_{j \geq 0} \sum_{\nu \geq 1} n_{j,\nu} \quad \text{for } \alpha = n_0 \alpha_0 + \sum_{j \geq 0} \sum_{\nu \geq 1} n_{j,\nu} \alpha_{j,\nu} \in Q. \quad (29)$$

$w = s_{i_1} s_{i_2} \cdots s_{i_k} \quad (i_\nu \in I)$ を $w \in W_\infty$ の minimal expression とすると

$$\Delta(w)_+ = \{\alpha_{i_k}, s_{i_k}(\alpha_{i_{k-1}}), s_{i_k} s_{i_{k-1}}(\alpha_{i_{k-2}}), \dots, s_{i_k} \cdots s_{i_2}(\alpha_{i_1})\}. \quad (30)$$

$\alpha \in \Delta_+$ に対し， $w\alpha \in B \cup \{\alpha_0\}$ となる $w \in W_\infty$ で長さ最小のものが一意に決まるので，その w によって $\Delta(\alpha)_+ := \Delta(w)_+$ と定義する．

さらに $\mathfrak{h}$ の双対空間を若干拡張した空間とそれのいくつかの元を定義する：

$$\mathfrak{h}^\vee := \{\Lambda = \sum_{i \in I} \lambda_i \alpha_i \in \prod_{i \in I} \mathbb{C} \alpha_i; \lambda_{j,1} = 0 \quad (j \gg 1)\}, \quad (31)$$

$$\Lambda_0 := \frac{1}{2} \alpha_0 + \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{\nu=1}^{\infty} (1-\nu) \alpha_{j,\nu}, \quad (32)$$

$$\Lambda_{j,\nu} := \sum_{i=\nu+1}^{\infty} (\nu-i) \alpha_{j,i} \quad (j=0, \dots, p, \nu=0, 1, 2, \dots), \quad (33)$$

$$\Lambda^0 := 2\Lambda_0 - 2\Lambda_{0,0} = \alpha_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty} (1+\nu) \alpha_{0,\nu} + \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{\nu=1}^{\infty} (1-\nu) \alpha_{j,\nu}, \quad (34)$$

$$\Lambda_{j,k}^0 := \Lambda_{j,0} - \Lambda_{k,0} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu (\alpha_{k,\nu} - \alpha_{j,\nu}) \quad (0 \leq j < k). \quad (35)$$

このとき

$$(\Lambda^0 | \alpha) = (\Lambda_{j,k}^0 | \alpha) = 0 \quad (\forall \alpha \in \Pi), \quad (36)$$

$$(\Lambda_{j,\nu} | \alpha_{j',\nu'}) = \delta_{j,j'} \delta_{\nu,\nu'} \quad (j, j' = 0, 1, \dots, \nu, \nu' = 1, 2, \dots), \quad (37)$$

$$(\Lambda_{j,0} | \alpha_i) = \delta_{i,0} \quad (\forall i \in \Pi). \quad (38)$$

2.3 reduction と対応

関数の変換．関数の変換 $u(x) \mapsto (x - c_j)^{\lambda_j} u(x)$ は，微分作用素環への変換

$$\text{Ad}((x - c_j)^{\lambda_j}) : x \mapsto x, \quad (x - c_j) \frac{d}{dx} \mapsto (x - c_j) \frac{d}{dx} - \lambda_j \quad (39)$$

(addition または gauge 変換とよぶ) を , fractional な微分 (Euler 変換)

$$u(x) \mapsto \partial^{-\mu} u(x) = \frac{1}{\Gamma(\mu)} \int_{c_j}^x (x-s)^{\mu-1} u(s) ds \quad (40)$$

は変換

$$\partial^{-\mu} : \frac{d}{dx} \mapsto \frac{d}{dx}, \quad x \frac{d}{dx} \mapsto x \frac{d}{dx} - \mu \quad (41)$$

を引き起こす .

Weyl 代数の元の変換. Weyl 代数の元 P と $Pu(x) = 0$ の解 $u(x)$ に対して , 上の変換 $u(x) \mapsto v(x)$ で得られた関数が満たす $v(x)$ が満たす方程式 $Qv(x) = 0$ を考える (Q は Weyl 代数の元) . P は (9) の GRS をもつ (3) の Fuchs 型作用素とする .

addition $\text{Ad}((x - c_j)^{\lambda_j})$ が引き起こす変換のほか , $\ell = (\ell_0, \dots, \ell_p) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^{p+1}$ に対し , Euler 変換を用いて以下の変換を定義する .

$$\begin{aligned} \partial_\ell P := & \text{Ad}\left(\prod_{j=1}^p (x - c_j)^{\lambda_{j,\ell_j}}\right) \prod_{j=1}^p (x - c_j)^{m_{j,\ell_j} - d_\ell(\mathbf{m})} \partial^{-m_{0,\ell_0}} \text{Ad}(\partial^{1-\lambda_{0,\ell_0} - \dots - \lambda_{p,\ell_p}}) \\ & \cdot \partial^{(p-1)n - m_{1,\ell_1} - \dots - m_{p,\ell_p}} a_n^{-1}(x) \prod_{j=1}^n (x - c_j)^{n - m_{j,\ell_j}} \text{Ad}\left(\prod_{j=1}^p (x - c_j)^{-\lambda_{j,\ell_j}}\right) P. \end{aligned} \quad (42)$$

$$d_\ell(\mathbf{m}) := m_{0,\ell_0} + \dots + m_{p,\ell_p} - (p-1) \text{ord } \mathbf{m}.$$

$\partial_\ell P$ のスペクトル型を $\mathbf{m}' = \partial_\ell \mathbf{m}$, GRS を $\{\lambda'_{\mathbf{m}'}\} = \partial_\ell \{\lambda_{\mathbf{m}}\}$ とおくと , 少なくとも $\lambda_{j,\nu}$ が (Fuchs 条件のもとで) generic なら

$$\begin{aligned} m'_{j,\nu} &= m_{j,\nu} - \delta_{\nu,\ell_j} d_\ell(\mathbf{m}), \\ \lambda'_{j,\nu} &= \lambda_{j,\nu} + (1 - \delta_{\nu,\ell_j} - 2\delta_{j,0})\mu, \\ \mu &= \lambda_{0,\ell_0} + \dots + \lambda_{p,\ell_p} - 1 \end{aligned} \quad (43)$$

となる . 特に

$$\text{ord } \partial_\ell \mathbf{m} = \text{ord } \mathbf{m} - d_\ell(\mathbf{m}). \quad (44)$$

ここで , m_{j,ℓ_j} は 0 であってもよいものとする .

$\partial_\ell \mathbf{m}$ の階数 $\text{ord } \partial_\ell \mathbf{m}$ を小さくするには , $d_\ell(\mathbf{m})$ を最大となるように ℓ を選べばよい . このような ℓ (のひとつ) を $\ell_{\max}(\mathbf{m})$ とおくと

$$m_{j,\ell_{\max}(\mathbf{m})_j} = \max\{m_{j,1}, \dots, m_{j,n_j}\} \quad (45)$$

である . $\partial_{\max} \mathbf{m} = \partial_{\ell_{\max}(\mathbf{m})}(\mathbf{m})$ とおく . 同様に $d_{\max}(\mathbf{m})$, $\partial_{\max} \{\lambda_{\mathbf{m}}\}$ や $\partial_{\max} P$ が定義される . $\mathbf{m}$ が irreducibly realizable ならば , 以下のような非負整数 K が定まる (reduction) .

$$\begin{aligned} \text{ord } \mathbf{m} &> \text{ord } \partial_{\max} \mathbf{m} > \text{ord } \partial_{\max}^2 \mathbf{m} > \dots > \text{ord } \partial_{\max}^K \mathbf{m}, \\ \text{ord }^K \mathbf{m} &= 1 \quad \text{or} \quad d_{\max}(\partial_{\max}^K \mathbf{m}) \leq 0. \end{aligned} \quad (46)$$

$\{\lambda_{\mathbf{m}}\}$ に対し, Kac-Moody ルート系との対応を以下の様に与える (一階システムの Schlesinger 型の場合に, 最初に [CB] が与えた).

$$\begin{aligned}
\alpha_\ell &:= \alpha_0 + \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{\nu=1}^{\ell_j-1} \alpha_{j,\nu} \in \Delta_+^{re}, \\
\alpha_{\mathbf{m}} &:= \text{ord } \mathbf{m} \cdot \alpha_0 + \sum_{j=0}^p \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{i=\nu+1}^{\infty} m_{j,i} \alpha_{j,\nu} \in Q_+, \\
\Lambda(\lambda) &:= -\Lambda_0 + \sum_{j=0}^p \sum_{\nu=1}^{\infty} \lambda_{j,\nu} (\Lambda_{j,\nu-1} - \Lambda_{j,\nu}) \in \bar{\mathfrak{h}} := \mathfrak{h}^\vee / \mathbb{C} \Lambda^0.
\end{aligned} \tag{47}$$

このとき以下の対応が成り立つ.

$$\begin{aligned}
\{P_{\mathbf{m}} : \text{Fuchs 型微分作用素 with } \{\lambda_{\mathbf{m}}\}\} &\rightarrow \{(\Lambda(\lambda), \alpha_{\mathbf{m}}); \alpha_{\mathbf{m}} \in \bar{\Delta}_+\} \\
\downarrow \partial_\ell, \text{ addition} &\quad \circlearrowleft \quad \downarrow W_\infty\text{-action, } +\tau\Lambda_{0,j}^0 \\
\{P_{\mathbf{m}} : \text{Fuchs 型微分作用素 with } \{\lambda_{\mathbf{m}}\}\} &\rightarrow \{(\Lambda(\lambda), \alpha_{\mathbf{m}}); \alpha_{\mathbf{m}} \in \bar{\Delta}_+\}.
\end{aligned}$$

$\mathcal{P}$	Kac-Moody root system
$\mathbf{m}$	$\alpha_{\mathbf{m}}$
$\mathbf{m}$: rigid	$\alpha \in \Delta_+^{re} : \text{supp } \alpha \ni \alpha_0$
$\mathbf{m}$: monotone	$\alpha \in Q_+ : (\alpha \beta) \leq 0 \ (\forall \beta \in \Pi')$
$\mathbf{m}$: realizable	$k\alpha : k \in \mathbb{Z}_{>0}, \alpha \in \Delta_+, \text{supp } \alpha \ni \alpha_0$
$\mathbf{m}$: irreducibly realizable	$\alpha \in \Delta_+, \text{supp } \alpha \ni \alpha_0$ indivisible or $(\alpha \alpha) < 0$
$\mathbf{m}$: basic and monotone	$\alpha \in Q_+ : (\alpha \beta) \leq 0 \ (\forall \beta \in \Pi)$ indivisible
$\mathbf{m}$: simply reducible and monotone	$\alpha \in \Delta_+ : (\alpha \alpha_{\mathbf{m}}) = 1 \ (\forall \alpha \in \Delta(\mathbf{m})_+)$ $(\alpha \beta) \leq 0 \ (\forall \beta \in \Pi')$ $(\alpha \alpha_0) > 0, \alpha \neq \alpha_0, \text{indivisible}$
$\text{ord } \mathbf{m}$	$n_0 : \alpha = n_0 \alpha_0 + \sum_{i,\nu} n_{i,\nu} \alpha_{i,\nu}$
$\text{idx}(\mathbf{m}, \mathbf{m}')$	$(\alpha_{\mathbf{m}} \alpha_{\mathbf{m}'})$
∂_ℓ	s_{α_ℓ}
$\{\lambda_{\mathbf{m}}\}$	$(\Lambda(\lambda), \mathbf{m})$
$ \{\lambda_{\mathbf{m}}\} $	$(\Lambda(\lambda) + \frac{1}{2}\alpha_{\mathbf{m}} \alpha_{\mathbf{m}})$

Theorem 3 (存在定理 [Os4]). $\mathbf{m}$ が *irreducibly realizable* ならば, $\{\lambda_{\mathbf{m}}\}$ という GRS をもつ (3) の形の普遍微分作用素 $P_{\mathbf{m}}(\lambda, g_1, \dots, g_N)$ が存在し, *Fuchs* 条件のもと $\lambda_{j,\nu}$ が *generic*, あるいは既約で局所非退化, あるいは $\mathbf{m}$ が *simply reducible* ならば, $\{\lambda_{\mathbf{m}}\}$ という GRS をもつ *Fuchs* 型微分作用素は, 適当な $(g_1, \dots, g_N) \in \mathbb{C}^N$ による普遍微分作用素 (の有理関数倍) に限る.

$g_1, \dots, g_N$ はアクセサリ・パラメータで

$$N = 1 - \frac{1}{2} \text{idx } \mathbf{m}. \quad (48)$$

$P_{\mathbf{m}}(\lambda, g)$ の係数は (x, λ, g) の多項式で, $(g_1, \dots, g_N)$ に対しては 1 次であり, g_i はある $x^\nu \frac{d^j}{dx^j}$ の係数としてよい.

irreducibly realizable であるスペクトル型 $\mathbf{m}$ で, $\text{idx } \mathbf{m} = 2$ となるものを rigid という (すなわち, アクセサリ・パラメータがないもの).

$\mathbf{m}$ が indivisible とは, $\{m_{j,\nu}\}$ の最大公約数が 1 となること.

basic (すなわち, indivisible で $d_{\max}(\mathbf{m}) \leq 0$) かつ monotone (すなわち $m_{j,1} \geq m_{j,2} \geq m_{j,3} \geq \dots$) となる $\mathbf{m}$ は, $\text{idx } \mathbf{m}$ を決めると (同型を除いて) 有限個しかない (cf. [Os2]). たとえば, $\text{idx } \mathbf{m} = 0$ となるものは affine root 系の $\tilde{D}_4, \tilde{E}_6, \tilde{E}_7, \tilde{E}_8$ に対応した 4 個 (cf. [Ko]) で, $\text{idx } \mathbf{m} = -2$ となるものは 13 個 ([Os2]).

irreducible realizable な $\mathbf{m}$ の reduction (46) において

$$\text{ord } \partial_{\max}^i \mathbf{m} = \text{ord } \partial_{\max}^{i-1} \mathbf{m} - 1 \quad (i = 1, \dots, K) \quad (49)$$

となる場合, $\mathbf{m}$ を simply reducible と定義する.

simply reducible で non-rigid な $\mathbf{m}$ は, $\text{idx } \mathbf{m}$ を決めると有限個しかない (cf. [Os4]). rigid で simply reducible となるものは, 21111, 222, 33 と以下の Simpson のリスト (in [Si]) に限る (cf. [MWZ]).

order	type	name	partitions
n	H_n	hypergeometric family	$1^n, 1^n, n - 11$
$2m$	EO_{2m}	even family	$1^{2m}, mm - 11, mm$
$2m + 1$	EO_{2m+1}	odd family	$1^{2m+1}, mm1, m + 1m$
6	X_6	extra case	111111, 222, 42

rigid なスペクトル型の $\mathbf{m}$ は, $\text{ord } \mathbf{m}$ が 6 以下のものは同型を除いて 49 個, 10 では 306 個, 20 では 10269 個というように沢山ある.

2.4 様々な結果 ([Os4])

定義した方程式や関数の変換を用いて, 最初の節で述べた常微分方程式の基本的問題が解決 (or reduction) される. ここでは若干の例を挙げる.

普遍方程式

$$P_{\mathbf{m}}(\lambda)u = 0 \quad (50)$$

を考察する.

Theorem 4 (既約性). 簡単のため $\mathbf{m}$ は irreducible realizable と仮定すると, 方程式 (50) が既約

となるための必要十分条件は

$$(\Lambda(\lambda)|\alpha) \notin \mathbb{Z} \quad (\forall \alpha \in \Delta(\mathbf{m})_+). \quad (51)$$

ここで

$$\Delta(\mathbf{m})_+ := \Delta(\alpha_{\mathbf{m}})_+. \quad (52)$$

$c_0 = 0, c_1 = 1, m_{0,n_0} = 1$ とする, $x = 0$ での局所解 $u_{0,n_0} \sim x^{\lambda_{0,n_0}}$ を実軸に沿って 1 まで接続していったときの $x = 1$ での局所解 $u_{1,n_1} \sim (1-x)^{\lambda_{1,n_1}}$ に対する接続係数を $c(\lambda_{0,n_0} \rightsquigarrow \lambda_{1,n_1})$ とおく.

Theorem 5 (接続問題). $\ell_0 \neq n_0, \ell_1 \neq n_1$ を満たす $\ell \in \mathbb{Z}_{\geq 1}^p$ に対し, $\{\lambda'_{\mathbf{m}'}\} = \partial_{\ell}\{\lambda_{\mathbf{m}}\}$ とおき, $P_{\mathbf{m}'}(\lambda')v = 0$ に対する同様の接続係数を $c'(\lambda'_{0,n_0} \rightsquigarrow \lambda'_{1,n_1})$ とおくと

$$\frac{c'(\lambda'_{0,n_0} \rightsquigarrow \lambda'_{1,n_1})}{\Gamma(\lambda'_{0,n_0} - \lambda'_{0,1} + 1)\Gamma(\lambda'_{1,1} - \lambda'_{1,n_1})} = \frac{c(\lambda_{0,n_0} \rightsquigarrow \lambda_{1,n_1})}{\Gamma(\lambda_{0,n_0} - \lambda_{0,1} + 1)\Gamma(\lambda_{1,1} - \lambda_{1,n_1})}. \quad (53)$$

特に $\mathbf{m}$ が rigid で $m_{1,n_1} = m_{2,n_2} = 1$ ならば, この定理により接続係数 $c(\lambda_{1,n_1} \rightsquigarrow \lambda_{2,n_2})$ がガンマ関数の積の商の形で具体的に書ける (cf. (46)).

(46) において $\{\lambda(k)_{\mathbf{m}(k)}\} = \partial_{\max}^k \{\lambda_{\mathbf{m}}\}$ ($k = 0, \dots, K$) とおき, $\lambda(k)_{j,\max} = \lambda(k)_{j,\ell_{\max}(\mathbf{m}(k))_j}$ とおく. この記号の下で

Theorem 6 (局所解の積分表示とべき級数表示). $\mathbf{m}$ は rigid で, $m_{1,n_1} = 1, c_0 = \infty, c_1 = 1$ と仮定する. $x = 0$ における局所解で特性指数 λ_{1,n_1} に対応するものを $u(x)$ とおく. $u(x)$ を $u(x) \sim x^{\lambda_{1,n_1}}$ となるよう規格化しておく. このとき

$$u(x) := \prod_{k=0}^{K-1} \frac{\Gamma(\lambda(k)_{1,n_1} - \lambda(k)_{1,\max} + 1)}{\Gamma(\lambda(k)_{1,n_1} - \lambda(k)_{1,\max} + \mu(k) + 1)\Gamma(-\mu(k))} \int_0^{s_0} \cdots \int_0^{s_{K-1}} \prod_{k=0}^{K-1} (s_k - s_{k+1})^{-\mu(k)-1} \quad (54)$$

$$\cdot \prod_{k=0}^{K-1} \left(\left(\frac{s_k}{s_{k+1}} \right)^{\lambda(k)_{1,\max}} \prod_{j=2}^p \left(\frac{1 - c_j^{-1} s_k}{1 - c_j^{-1} s_{k+1}} \right)^{\lambda(k)_{j,\max}} \right) \cdot s_K^{\lambda(K)_{1,n_1}} \prod_{j=2}^p \left(1 - \frac{s_K}{c_j} \right)^{\lambda(K)_{j,\max}} ds_K \cdots ds_1 \Big|_{s_0=x}$$

$$= x^{\lambda_{1,n_1}} \prod_{j=2}^p \left(1 - \frac{x}{c_j} \right)^{\lambda(0)_{j,\max}} \cdot \sum_{\substack{(\nu_{j,k}) \\ 2 \leq j \leq p \\ 1 \leq k \leq K \\ \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^{(p-1)K}}}$$

$$\prod_{i=0}^{K-1} \frac{(\lambda(i)_{1,n_1} - \lambda(i)_{1,\max} + 1) \sum_{s=2}^p \sum_{t=i+1}^K \nu_{s,t}}{(\lambda(i)_{1,n_1} - \lambda(i)_{1,\max} + \mu(i) + 1) \sum_{s=2}^p \sum_{t=i+1}^K \nu_{s,t}} \cdot \prod_{i=1}^K \prod_{s=2}^p \frac{(\lambda(i-1)_{s,\max} - \lambda(i)_{s,\max})_{\nu_{s,i}}}{\nu_{s,i}!} \cdot \prod_{s=2}^p \left(\frac{x}{c_s} \right)^{\sum_{i=1}^K \nu_{s,i}}. \quad (55)$$

Theorem 7 (3項間関係式). $\mathbf{m}$ は *rigid* で , $m_{j,n_j} = 1$ ($j = 0, 1, 2$) , $c_0 = \infty$ とし

$$\epsilon_{j,\nu} = \delta_{j,1}\delta_{\nu,n_1} - \delta_{j,2}\delta_{\nu,n_2}, \quad \epsilon'_{j,\nu} = \delta_{j,0}\delta_{\nu,n_0} - \delta_{j,2}\delta_{\nu,n_2} \quad (56)$$

とおく ($j = 0, \dots, p$, $\nu = 1, \dots, n_j$) . $u_\lambda(x)$ を (50) の $x = c_1$ での局所解で , $\lambda_{j,\nu}$ が *generic* なとき

$$u_\lambda(x) \sim (x - c_1)^{\lambda_{1,n_1}} \quad (57)$$

となるものとする . このとき

$$u_\lambda(x) = u_{\lambda+\epsilon'}(x) + (c_1 - c_2) \prod_{\nu=0}^{K-1} \frac{\lambda(\nu+1)_{1,n_1} - \lambda(\nu)_{1,\ell(\nu)_1} + 1}{\lambda(\nu)_{1,n_1} - \lambda(\nu)_{1,\ell(\nu)_1} + 1} \cdot u_{\lambda+\epsilon}(x). \quad (58)$$

これらの結果は , コンピュータ・プログラムとして実現されている (cf. [Os1], [Os5]).

以上は , Gauss の超幾何微分方程式の既約条件

$$\alpha, \beta, \alpha - \gamma, \beta - \gamma \notin \mathbb{Z}$$

Gauss の和公式

$$F(\alpha, \beta, \gamma; 1) = \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma - \alpha - \beta)}{\Gamma(\gamma - \alpha)\Gamma(\gamma - \beta)}$$

積分表示

$$F(\alpha, \beta, \gamma; x) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma - \alpha)} \int_0^x x^{-\gamma+1} (x-s)^{-\alpha+\gamma-1} s^{\alpha-1} (1-s)^{-\beta} ds$$

3 項間関係式

$$F(\alpha + 1, \beta, \gamma; x) - F(\alpha, \beta, \gamma; x) = \frac{\beta x}{\gamma} F(\alpha + 1, \beta + 1, \gamma + 1; x)$$

の一般化になっている .

3 不確定特異点を持つ微分作用素と middle convolution

以上の結果を不確定特異点を持つ方程式に拡張することを考える . まず Fuchs 型の場合と重複するが , Weyl 代数の変換を以下に整理しておく .

K を標数 0 の代数閉体とし , $W[x]$ で一変数の Weyl 代数 , つまり多項式係数の微分作用素環とする . さらに $W(x)$ で係数を有理関数体 $K(x)$ にもつ微分作用素環としよう . 以下にいくつかの基本的な操作を列挙しておく .

Fourier-Laplace transform:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{L}: & W[x] & \longrightarrow W[x] \\ & x & \longmapsto -\partial \\ & \partial & \longmapsto x \end{array}$$

次の操作が代数的 Euler 変換の理論では重要である .

Reduced form^{*16} ($\text{Red}(P)$):

^{*16} この操作が Katz とは異なる . Katz のものと同じにするには , この操作を $\mathcal{D}$ 加群の極小拡大に置き換える .

$P \in W(x)$ に対し, $\text{Red}(P) \in K(x)^\times P \cap W[x]$ を次のように定義する .

$\text{Red}(P) = \sum_{i=0}^n p_i(x) \partial^i$ とかくと, $\gcd_{K[x]}(p_i(x)) = 1$ であり, さらに最高次の係数 $p_n(x)$ はモニックである .

例えば ,

$$P = \frac{3(x-1)}{x^2} \partial + x(x-1)^2 \implies \text{Red}(P) = \partial + \frac{1}{3} x^3 (x-1).$$

Addition: $P \in W(x)$, $f(x) \in K(x)$, $\lambda \in K$ に対し,

$$\text{Ad}(e^{f(x)})P(x, \partial) = P(x, \partial - \frac{d}{dx} f(x)),$$

$$\text{Ad}(x^\lambda)P(x, \partial) = P(x, \partial - \lambda/x)$$

と定義する . これらは単に $e^{f(x)}$ や x^λ をそれらの逆作用素とで両側から共役をとる操作である .

以上の操作を用いて Euler 変換を次のように代数的に定義する .

Euler transform:

$P \in W(x)$ と $\mu \in K$ に対し,

$$E(\mu)P := \mathcal{L} \circ \text{Red} \circ \text{Ad}(x^\mu) \circ \mathcal{L}^{-1} \circ \text{Red}P.$$

ここからは $P = \sum_{i=0}^n p_i(x) \partial^i$, $p_i(x) \in K[x]$ として , 次のようなものを考える .

1. P の特異点は $x = c_1, \dots, c_p$ と $c_0 = \infty$ とする .
2. さらに各特異点 $x = c_i$ ($i = 0, \dots, p$) での局所形式解は次のようになる .

$$\begin{aligned} & e^{f_{i,j}(1/(x-c_i))} (x - c_i)^{\lambda_{i,j,k}} \times \phi_{i,j,k,0}(x - c_i), \\ & e^{f_{i,j}(1/(x-c_i))} (x - c_i)^{\lambda_{i,j,k}+1} \times \phi_{i,j,k,1}(x - c_i), \\ & \vdots \\ & e^{f_{i,j}(1/(x-c_i))} (x - c_i)^{\lambda_{i,j,k}+m_{i,j,k}-1} \times \phi_{i,j,k,m_{i,j,k}-1}(x - c_i). \end{aligned}$$

ここで $j = 1, \dots, k_i$, $k = 1, \dots, l_{i,j}$ とし , $m_{i,j,k} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ は $\sum_{j=1}^{k_i} \sum_{k=1}^{l_{i,j}} m_{i,j,k} = n$ をみたす . さらに $\lambda_{i,j,k} \in \mathbb{C}$ は $\lambda_{i,j,k} - \lambda_{i,j,k'} \notin \mathbb{Z}$, ($k \neq k'$) をみたし , $f_{i,j}(x) \in \mathbb{C}[x]$ は互いに相違なる定数項を持たない多項式とし , さらに $\phi_{i,j,k,l}(x) \in \mathbb{C}[[x]]$ ($l = 0, 1, \dots, m_{i,j,k}$) の定数項は零でないとする .

$x = c_0 = \infty$ に関しても $t = \frac{1}{x}$ に関して同様に考えればよい .

一般には不確定特異点での形式解は $x^{\frac{1}{q}}$ のような分数巾の巾級数を考える必要があるが , ここでは上のように分数巾を要しないで全ての形式解が得られる状況で考えている . このような不確定特異点を不分岐不確定特異点と呼ぶ .

さてこの時特性指数 $\lambda_{i,j,k}$ たちの組を

$$\lambda(P) = \prod_{i=0}^p \prod_{j=1}^{k_i} (\lambda_{i,j,1}, \dots, \lambda_{i,j,l_{i,j}})$$

またそれらの重複度 $(\lambda_{i,j,k} + l \ (l = \dots, m_{i,j,k} - 1))$ たちを同一視した) たちの組を

$$\mathbf{m}(P) = \prod_{i=0}^p \prod_{j=1}^{k_i} (m_{i,j,1}, \dots, m_{i,j,l_{i,j}})$$

と書くことにする．すると $\lambda(P), \mathbf{m}(P)$ はそれぞれ次のようなベクトル空間, $\mathbb{Z}$ 格子の元とみなすことができる．

$$\begin{aligned} \lambda(P) &\in \Lambda(P) = \prod_{i=0}^p \prod_{j=1}^{k_i} \mathbb{C}^{l_{i,j}}, \\ \mathbf{m}(P) &\in L(P) = \left\{ \left((a_{i,j,1}, \dots, a_{i,j,l_{i,j}}) \right)_{\substack{0 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq k_i}} \in \prod_{i=0}^p \prod_{j=1}^{k_i} \mathbb{Z}^{l_{i,j}} \mid \right. \\ &\quad \left. \sum_{j=1}^{k_0} \sum_{k=1}^{l_{0,j}} a_{0,j,k} = \dots = \sum_{j=1}^{k_p} \sum_{k=1}^{l_{p,j}} a_{p,j,k} \right\}. \end{aligned}$$

ここで次のような添字の積集合を定義する．

$$\mathcal{J} = \prod_{i=0}^p \{1, 2, \dots, k_i\}$$

この時この積集合の各元 $\hat{j} = (j_0, \dots, j_p) \in \mathcal{J}$ に対し, 次のような middle convolution を定義する．

Definition 8.

$$\begin{aligned} E(\hat{j}) &= \prod_{i=0}^p \text{Ad}(e^{f_{i,j_i}}) \prod_{i=1}^p \text{Ad}((x - c_i)^{\lambda_{i,j_i,1}}) \\ &\quad \circ E(1 - \lambda(\hat{j})) \prod_{i=1}^p \text{Ad}((x - c_i)^{-\lambda_{i,j_i,1}}) \prod_{i=0}^p \text{Ad}(e^{-f_{i,j_i}}). \end{aligned}$$

ここで

$$\lambda(\hat{j}) = \sum_{i=0}^p \lambda_{i,j_i,1}.$$

Theorem 9. $Q_{\hat{j}} = E(\hat{j})P$ と書くことにすると, そのスペクトル型,

$$\{(\lambda(Q_{\hat{j}})_{i,j,k}); (m(Q_{\hat{j}})_{i,j,k})\} \quad (i = 0, \dots, p, j = 1, \dots, k_i, k = 1, \dots, l_{i,j})$$

は次のようになる．

$$\begin{aligned} m(Q_{\hat{j}})_{i,j,1} &= m_{i,j,1} - d(\hat{j}) && \text{if } (i, j) = (i, j_i), \\ m(Q_{\hat{j}})_{i,j,k} &= m_{i,j,k} && \text{otherwise.} \end{aligned}$$

ここで

$$\begin{aligned} -d(\hat{j}) = & \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^{k_i} (\deg(f_{i,j} - f_{i,j_i}) + 1) \sum_{k=1}^{l_{i,j}} m_{i,j,k} \\ & + \sum_{j=1}^{k_0} (\deg(f_{0,j} - f_{0,j_0}) - 1) \sum_{k=1}^{l_{0,j}} m_{0,j,k} - \sum_{i=0}^p m_{i,j_i,1}. \end{aligned}$$

また同様に, $i \in \{1, \dots, p\}$ に対し,

$$\lambda(Q_{\hat{j}})_{i,j,k} = \begin{cases} \lambda_{i,j,k} & \text{if } (i, j_i) = (i, j) \text{ and } k = 1, \\ \lambda_{i,j,k} - (\deg(f_{i,j} - f_{i,j_i}) + 1)(1 - \lambda(\hat{j})) & \text{otherwise.} \end{cases}$$

さらに $i = 0$ に対し,

$$\lambda(Q_{\hat{j}})_{0,j,k} = \begin{cases} \lambda_{0,j,1} + 2(1 - \lambda(\hat{j})) & \text{if } (0, j_0) = (0, j) \text{ and } k = 1, \\ \lambda_{0,j,k} - (\deg(f_{0,j} - f_{0,j_0}) - 1)(1 - \lambda(\hat{j})) & \text{otherwise.} \end{cases}$$

この定理から $E(\hat{j})$ ($\hat{j} \in \mathcal{J}$) が上で定義した $\Lambda(P), L(P)$ への作用として次のように実現できる.

$$\begin{aligned} \sigma(\hat{j}): \quad L(P) & \longrightarrow L(P) \\ \mathbf{a} = \prod_{i=0}^p \prod_{j=1}^{k_i} (a_{i,j,1}, \dots, a_{i,j,l_{i,j}}) & \longmapsto \prod_{i=0}^p \prod_{j=1}^{k_i} (\tilde{a}_{i,j,1}, \dots, \tilde{a}_{i,j,l_{i,j}}), \end{aligned}$$

ここで

$$\begin{aligned} \tilde{a}_{i,j,1} &= a_{i,j,1} - d(\mathbf{a}; \hat{j}) & \text{if } (i, j) = (i, j_i), \\ \tilde{a}_{i,j,k} &= a_{i,j,k} & \text{otherwise,} \end{aligned}$$

また,

$$\begin{aligned} -d(\mathbf{a}; \hat{j}) = & \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^{k_i} (\deg(f_{i,j} - f_{i,j_i}) + 1) \sum_{k=1}^{l_{i,j}} a_{i,j,k} \\ & + \sum_{j=1}^{k_0} (\deg(f_{0,j} - f_{0,j_0}) - 1) \sum_{k=1}^{l_{0,j}} a_{0,j,k} - \sum_{i=0}^p a_{i,j_i,1}. \end{aligned}$$

さらに $L(P)$ の中に次のような成分の置換を考える.

$$\begin{aligned} \sigma(i_0, j_0, k_0): \quad L(P) & \longrightarrow L(P) \\ a_{i_0, j_0, k_0} & \longmapsto a_{i_0, j_0, k_0+1}, \\ a_{i_0, j_0, k_0+1} & \longmapsto a_{i_0, j_0, k_0}, \\ a_{i, j, k} & \longmapsto a_{i, j, k} & \text{if } (i, j, k) \neq (i_0, j_0, k_0). \end{aligned}$$

さてここで上の作用素たちで生成される群を $\tilde{W}$ と定義すると群 $\tilde{W}$ 作用をもつ $\mathbb{Z}$ 格子 $L(P)$ が得られたことになる.

同様に $\Lambda(P)$ に関しても次のような作用素を考えることができる.

$$\begin{aligned} \sigma(\hat{j}): \quad \Lambda(P) & \longrightarrow \Lambda(P) \\ ((\nu_{i,j,1}, \dots, \nu_{i,j,l_{i,j}}))_{\substack{0 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq k_i}} & \longmapsto ((\tilde{\nu}_{i,j,1}, \dots, \tilde{\nu}_{i,j,l_{i,j}}))_{\substack{0 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq k_i}}. \end{aligned}$$

ここで, $i \in \{1, \dots, p\}$ に対し,

$$\tilde{\nu}_{i,j,k} = \begin{cases} \nu_{i,j,k} & \text{if } (i, j_i) = (i, j) \text{ and } k = 1, \\ \nu_{i,j,k} - (\deg(f_{i,j} - f_{i,j_i}) + 1)(1 - \nu(\hat{j})) & \text{otherwise.} \end{cases}$$

また, $i = 0$ に対し,

$$\tilde{\nu}_{0,j,k} = \begin{cases} \nu_{0,j_0,1} + 2(1 - \nu(\hat{j})) & \text{if } (0, j_0) = (0, j) \text{ and } k = 1, \\ \nu_{0,j,k} - (\deg(f_{0,j} - f_{0,j_0}) - 1)(1 - \nu(\hat{j})) & \text{otherwise.} \end{cases}$$

ここで

$$\nu(\hat{j}) = \sum_{i=0}^p \nu_{i,j_i,1}.$$

また同様に置換 $\sigma(i_0, j_0, k_0)$ を $\Lambda(P)$ に定義できる.

このようにして middle convolution によって群作用をもつベクトル空間 $\Lambda(P)$ と $\mathbb{Z}$ 格子 $L(P)$ をつくることのできた.

4 Kac-Moody root 格子としての実現

ここでは群 $\tilde{W}$ の作用をもつ $\mathbb{Z}$ 格子 $L(P)$ を, ある Kac-Moody Lie 環の Weyl 群とルート格子として実現する. 興味深いことに実現の仕方は現在のところ二通り存在し, 一つは部分格子としての実現と, もう一方は商格子としての実現がある. 以下にそれぞれの実現について解説する.

4.1 部分格子としての実現

$\mathbf{m} \in L(P)$ に対して $\text{rank } \mathbf{m} = \sum_{j=1}^{k_i} \sum_{k=1}^{l_{i,j}} m_{i,j,k}$ ($i = 0, \dots, p$) と定義しよう. すなわち $\mathbf{m}$ は $p+1$ 個の $\text{rank } \mathbf{m}$ の分割を与えている. 次に $m_{i,j,k}$ たちの間にある種の関係を入れて次のような新しい $\text{rank } \mathbf{m}$ の分割を考えてみる. まず $r_i = \max\{\deg f_{i,j} \mid j = 1, \dots, k_i\}$ として, $r = 1, \dots, r_i$ に対してインデックス $j, j' \in \{1, \dots, k_i\}$ が

$$\deg(f_{i,j} - f_{i,j'}) < r$$

をみたす時 $j \stackrel{r}{\sim} j'$ と書くことにする.

このとき $j \stackrel{r}{\sim} j'$ を満たす $j, j' \in J_i = \{1, \dots, k_i\}$ を集めて J_i の互いに共通部分をもたない分割 $J_i = \Pi_{s \in \{1, \dots, n_{i,r}\}} J_{i,s}^{(r)}$ ができる. そして

$$m_{i,s}^{(r)} = \sum_{j \in J_{i,s}^{(r)}} \sum_{k=1}^{l_{i,j}} m_{i,j,k}$$

と定めて, 新しい分割 $\mathbf{m}_i^{(r)} = (m_{i,1}^{(r)}, \dots, m_{i,n_{i,r}}^{(r)})$ を定義する. ここで $\Pi_{s \in \{1, \dots, n_{i,r}\}} J_{i,s}^{(r)}$ は $\Pi_{s \in \{1, \dots, n_{i,r+1}\}} J_{i,s}^{(r+1)}$ の細分となっていることに注意すれば, $\mathbf{m}_i^{(r)}$ は $\mathbf{m}_i^{(r+1)}$ の細分となるこ

ともわかる．さらに $r = 0$ に対しては, $m_{i,s}^{(0)}$ を次のように定める．まず $\{J_{i,1}^{(1)}, \dots, J_{i,k_i}^{(1)}\}$ は $\{1, \dots, k_i\}$ の置換で得られることを注意しておく．そして $\sum_{t'=1}^{t-1} l(i, J_{i,t'}^{(1)}) < s \leq \sum_{t'=1}^t l(i, J_{i,t'}^{(1)})$ を満たす s を考える．但し $t = 0$ の時は上の不等式の左端の和は 0 とした．このとき

$$\begin{aligned} m_{i,s}^{(0)} &= m_{i,j_{i,s},k_{i,s}}, \\ j_{i,s} &= J_{i,t}^{(1)}, \\ k_{i,s} &= s - \sum_{t'=1}^{t-1} l(i, J_{i,t'}^{(1)}) \end{aligned}$$

として, $r = 0$ に関しても分割 $\mathbf{m}_i^{(0)} = (m_{i,1}^{(0)}, \dots, m_{i,n_{i,0}}^{(0)})$ を定義する．ここで $n_{i,0} = \sum_{j=1}^{k_i} l(i, j)$ 従ってこの手順によって格子 $L(P)$ から新しい格子

$$Q_{\text{conf}} = \mathbb{Z}c_0 \times \prod_{i=0}^p \prod_{r=0}^{r_i} \prod_{s=1}^{n_{i,r}-1} \mathbb{Z}c_{i,r,s}$$

への単射準同型

$$\Psi: L(P) \hookrightarrow Q_{\text{conf}}$$

ができる．すなわち $L(P)$ の元

$$\mathbf{a} = ((a_{i,j,1}, \dots, a_{i,j,l_{i,j}}))_{\substack{0 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq k_i}}$$

に対して, Q_{conf} の元を

$$\Psi(\mathbf{a}) = \text{rank } \mathbf{a}c_0 + \sum_{i=0}^p \sum_{r=0}^{r_i} \sum_{s=1}^{n_{i,r}-1} (a_{i,s+1}^{(r)} + a_{i,s+2}^{(r)} + \dots + a_{i,n_{i,r}}^{(r)})c_{i,r,s}$$

となるように対応させる．

さてこの新しい格子に次のように対称双一次形式を入れる．

$$\begin{aligned} \langle c_0, c_0 \rangle &= 2, \\ \langle c_0, c_{i,r,s} \rangle &= \begin{cases} -1 & \text{if } s = 1, \\ 0 & \text{if otherwise,} \end{cases} \\ \langle c_{i,r,s}, c_{i',r',s'} \rangle &= \begin{cases} 2 & \text{if } (i, r, s) = (i', r', s'), \\ -1 & \text{if } i = i', r = r', |s - s'| = 1, \\ 0 & \text{if otherwise.} \end{cases} \end{aligned}$$

これは Fuchs 型微分作用素のスペクトル型から作られる星型 Dynkin 図に他ならないことをここで注意しておく．

さてここで前の章の微分作用素 P に戻る．上で見たようにスペクトル型 $\mathbf{m}(P) \in L(P)$ から新しく $\prod_{i=0}^p \prod_{r=0}^{r_i} \mathbf{m}_i^{(r)}$ ができる．このときある $\hat{j} = (j_0, \dots, j_p) \in \mathcal{J}$ を一つ固定し, 必要ならば適当に順番を入れ替えて $m_{i,1}^{(0)} = m_{i,j_i,1}$ ($i = 0, \dots, p$) となるようにしておく．このとき簡単な計算によって次が確かめられる．

Proposition 10. $d(\hat{j})$ を Theorem 9 で定義した量とすると、次が成り立つ。

$$\langle c_0, \Psi(\mathbf{m}(P)) \rangle = d(\hat{j}).$$

すなわち P に対する middle convolution $E(\hat{j})$ ($\hat{j} \in \mathcal{J}$) が中心の頂点 c_0 による単純鏡映

$$\sigma_{c_0}(\alpha) = \alpha - \langle c_0, \alpha \rangle c_0$$

で実現できる。

4.1.1 Fuchs 型からの合流としての解釈

既に知られているように Fuchs 型の微分作用素のスペクトル型には星型 Dynkin 図に対応するルート系のルートが対応し、さらに Weyl 群が middle convolution 達を統制していた。この類似として、上では不確定特異点のスペクトル型からの星型 Dynkin 図に対応するルート系への埋め込みを作り、さらに単純鏡映によって middle convolution を実現した。この意味で不確定特異点を持つ微分作用素から Fuchs 型微分作用素への埋め込みを与えたといえるかもしれないが、実際にこの対応が特異点の合流として解釈できることを以下に見てみる。

P を上の通りスペクトル型 $\mathbf{m}(P)$ を持つ不確定特異点型微分作用素とする。さらに上に見た方法で構成した新しい分割の組を $\prod_{i=0}^p \prod_{r=0}^{r_i} \mathbf{m}_i^{(r)}$ とする。 $c_i + t_r$ ($i = 0, \dots, p, r = 0, \dots, r_i$) に確定特異点をもち、各 $c_i + t_r$ でのスペクトル型が $\mathbf{m}_i^{(r)}$ であるような Fuchs 型微分作用素 $\tilde{P}$ を次のように定義しよう。ここで $c_i = \infty$ であったなら t_r は $\frac{1}{t_r}$ に置き換えて考える。さらに $\mathbf{m}_{i,s}^{(r)}$ に対応する特性指数 $\lambda_{i,s}^{(r)}$ を次のように定義する。

$$\lambda_{i,s}^{(r)} = \sum_{k=r}^{r_i} \frac{\bar{\lambda}_{r,i,s,k}}{\prod_{\substack{0 \leq u \leq k \\ u \neq k}} (t_r - t_u)}.$$

ここで右辺の $\bar{\lambda}_{r,i,s,k}$ は $r > 0$ に対しては

$$\bar{\lambda}_{r,i,s,k} = \frac{1}{k} \times \{f_{i,j}(t) \text{ の } k \text{ 次の係数}\} \quad \text{for } j \in J_{i,s}^{(r)}$$

で定める。任意の $j \in J_{i,s}^{(r)}$ に関して $f_{i,j}(t)$ の r 次以上の係数は一致するのでこれは well-define であることを注意しておく。さらに $r = 0$ に対しては $\mathbf{m}_{i,s}^{(0)} = \mathbf{m}_{i,j_{i,s},k_{i,s}}$ を満たす $(i, j_{i,s}, k_{i,s})$ に対応する特性指数 $\lambda_{i,j_{i,s},k_{i,s}}$ によって

$$\bar{\lambda}_{0,i,s,k} = \begin{cases} \lambda_{i,j_{i,s},k_{i,s}} & \text{for } k = 0, \\ \frac{1}{k} \times \{f_{i,j_{i,s}}(t) \text{ の } k \text{ 次の係数}\} & \text{for } k > 0 \end{cases}$$

と定める。

以上の準備のもと、Riemann 図式 $\{[\lambda_{i,s}^{(r)}]_{(\mathbf{m}_{i,s}^{(r)})}\}$ を持つ Fuchs 型微分作用素を $\tilde{P}$ とする。すると下の微分作用素 P は $\tilde{P}$ のパラメーター $t_0, \dots, t_{r_i}$ の $t_r \rightarrow 0$ の極限として得られることがわかる。すなわち不確定特異点を持つ微分作用素 P を Fuchs 型の微分作用素 $\tilde{P}$ の特異点の合流として実現することが上のようにしてできる。

これにより不確定特異点を持つ微分作用素の問題を Fuchs 型での理論から研究できるようになる．例えば不確定特異点を持つ微分方程式の Fuchs の関係式を思い出してみる．

Theorem 11 (Bertrand [Be]). P を上で定義した不確定特異点を持つ微分方程式で $\lambda(P), \mathbf{m}(P)$ をそれぞれ特性指数, スペクトル型の組としよう．

このとき

$$\begin{aligned} \delta(\lambda(Q), \mathbf{m}(Q)) &= \sum_{i=0}^p \sum_{j=1}^{k_i} \sum_{s=1}^{l_{i,j}} \frac{m_{i,j,s}(Q)(2\lambda(Q)_{i,j,s} + m(Q)_{i,j,s} - 1)}{2} \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{i=0}^p \sum_{1 \leq j \neq j' \leq k_i} \text{wt}_{c_i}(w_j - w_{j'}) \left(\sum_{s=1}^{l_{i,j}} m_{i,j,s} \right) \left(\sum_{s'=1}^{l_{i,j'}} m_{i,j',s'} \right) \\ &\quad - (p+1) \frac{\text{rank } \mathbf{m}(Q)(\text{rank } \mathbf{m}(Q) - 1)}{2} \end{aligned}$$

と定義すると, 次が成り立つ．

$$\delta(\lambda(P), \mathbf{m}(P)) = -n(n-1). \quad (59)$$

以下にこれを Fuchs 型の場合から証明してみる．まず $\text{idx } \mathbf{m}(P)$ という量を次のように定義する．

$$\begin{aligned} \text{idx } \mathbf{m}(P) &= \sum_{i=0}^p \sum_{1 \leq j \neq j' \leq k_i} \deg(f_{i,j}(t) - f_{i,j'}(t)) \left(\sum_{k=1}^{l_{i,j}} m_{i,j,k} \right) \left(\sum_{k'=1}^{l_{i,j'}} m_{i,j',k'} \right) \\ &\quad + \sum_{i=0}^p \sum_{j=1}^{k_i} \sum_{k=1}^{l_{i,j}} m_{i,j,k}^2 - (p-1)n^2. \end{aligned}$$

これは Katz によるリジッド指数の一般化となっている．この idx を用いると上の関係式 (59) は次のように書き換えられる．

$$\sum_{i=0}^p \sum_{j=1}^{k_i} \sum_{k=1}^{l_{i,j}} \lambda_{i,j,k} m_{i,j,k} = n - \frac{1}{2} \text{idx } \mathbf{m}(P).$$

さて $(\mathbf{m}_i^{(r)})_{\substack{0 \leq i \leq p \\ 0 \leq r \leq r_i}}$ を Fuchs 型微分作用素 $\tilde{P}$ のスペクトル型と見たとき,

$$\text{idx } (\mathbf{m}_i^{(r)})_{\substack{0 \leq i \leq p \\ 0 \leq r \leq r_i}} = \text{idx } \mathbf{m}(P)$$

が容易に確かめられる．従って Fuchs 型の場合の Fuchs の関係式

$$\sum_{i=0}^p \sum_{r=0}^{r_i} \sum_{s=1}^{n_{i,r}} \lambda_{i,s}^{(r)} m_{i,s}^{(r)} = n - \frac{1}{2} \text{idx } (\mathbf{m}_i^{(r)})_{\substack{0 \leq i \leq p \\ 0 \leq r \leq r_i}}$$

より ,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^p \sum_{j=1}^{k_i} \sum_{k=1}^{l_{i,j}} \lambda_{i,j,k} m_{i,j,k} &= \sum_{i=0}^p \sum_{r=0}^{r_i} \sum_{s=1}^{n_{i,r}} \lambda_{i,s}^{(r)} m_{i,s}^{(r)} \\
&= n - \frac{1}{2} \text{idx}(\mathbf{m}_i^{(r)})_{\substack{0 \leq i \leq p \\ 0 \leq r \leq r_i}} \\
&= n - \frac{1}{2} \text{idx} \mathbf{m}(P)
\end{aligned}$$

となって求める式が得られた .

また reduction に関しても次のようなことが言える . 簡単のため $l = (1, 1, \dots)$ として (42) の $d_l((\mathbf{m}_i^{(r)})_{\substack{0 \leq i \leq p \\ 0 \leq r \leq r_i}})$ を考えてみる .

$$\begin{aligned}
d_l((\mathbf{m}_i^{(r)})_{\substack{0 \leq i \leq p \\ 0 \leq r \leq r_i}}) &= \sum_{i=0}^p \sum_{r=0}^{r_i} (m_{i,1}^{(r)} - n) + 2n \\
&= \sum_{i=0}^p \left(\sum_{k=1}^{l_{i,j_{i,1}}} m_{i,j_{i,1},k} - n \right) - \sum_{i=0}^p \sum_{r=1}^{r_i} \sum_{j=1}^{k_i} \sum_{\deg(f_{i,j}(t) - f_{i,j_{i,1}}(t)) \geq r} \sum_{k=1}^{l_{i,j}} m_{i,j,k} + 2n \\
&= \sum_{i=0}^p \left(\sum_{k=1}^{l_{i,j_{i,1}}} m_{i,j_{i,1},k} - n \right) - \sum_{i=0}^p \sum_{j=1}^{k_i} \deg(f_{i,j}(t) - f_{i,j_{i,1}}(t)) \sum_{k=1}^{l_{i,j}} m_{i,j,k} + 2n.
\end{aligned}$$

まず必要ならば適切に順序を入れ替えて

$$\sum_{r=0}^{r_i} m_{i,1}^{(r)} \geq \sum_{r=0}^{r_i} m_{i,s} \quad (1 \leq s \leq n_j, i = 0, \dots, p)$$

としておく . すると

$$\sum_{k=1}^{l_{i,j_{i,1}}} m_{i,j_{i,1},k} - \sum_{j'=1}^{k_i} \deg(f_{i,j'} - f_{i,j_{i,1}}) \sum_{k=1}^{l_{i,j}} m_{i,j,k} \geq \sum_{k=1}^{l_{i,j}} m_{i,j,k} - \sum_{j=1}^{k_i} \deg(f_{i,j} - f_{i,j'}) \sum_{k=1}^{l_{i,j'}} m_{i,j',k}$$

となるから

$$\begin{aligned}
0 &\leq \sum_{j=0}^p \left(\sum_{k=1}^{l_{i,j_{i,1}}} m_{i,j_{i,1},k} - \sum_{j'=1}^{k_i} \deg(f_{i,j'} - f_{i,j_{i,1}}) \sum_{k=1}^{l_{i,j'}} m_{i,j',k} \right) n \\
&\quad - \left(\sum_{i=0}^p \sum_{j=1}^{k_i} \left(\sum_{k=1}^{l_{i,j}} m_{i,j,k} \right)^2 - \sum_{i=0}^p \sum_{j=1}^{k_i} \sum_{j'=1}^{k_i} \deg(f_{i,j} - f_{i,j'}) \sum_{k=1}^{l_{i,j}} m_{i,j,k} \sum_{k'=1}^{l_{i,j'}} m_{i,j',k'} \right) \\
&= n \cdot d_l((\mathbf{m}_i^{(r)})_{\substack{0 \leq i \leq p \\ 0 \leq r \leq r_i}}) - \text{idx}(\mathbf{m}_i^{(r)})_{\substack{0 \leq i \leq p \\ 0 \leq r \leq r_i}}.
\end{aligned}$$

これより , $\text{idx}(\mathbf{m}_i^{(r)})_{\substack{0 \leq i \leq p \\ 0 \leq r \leq r_i}} > 0$ ならば $d_l((\mathbf{m}_i^{(r)})_{\substack{0 \leq i \leq p \\ 0 \leq r \leq r_i}}) > 0$ がしたがう . すなわち不確定作用素 P に戻れば $\text{idx} \mathbf{m} > 0$ ならば $d(\hat{j}) > 0$ となる $\hat{j} \in \mathcal{J}$ がある . つまり階数を下げる middle

convolution が必ずあることが従う．これはリジッドな Fuchs 型既約方程式に対する Katz の定理の不確定特異点版の一般化を与える．

この他にも例えば Deligne-Simpson 問題の不確定特異点版は，上のように合流によって対応する Fuchs 型微分作用素の存在問題に帰着できると期待される．さらに Fuchs 型における接続問題に関する結果が，不確定特異点における Stokes 係数の決定等に応用されるであろう．

4.2 商格子としての実現

次のように番号付けられた基底で生成される $\mathbb{Z}$ 格子を Q_{quot} と書くことにする．すなわち，

$$\mathcal{C} = \{c_{\hat{j}} \mid \hat{j} \in \mathcal{J}\} \cup \{c(i, j, k) \mid i = 0, \dots, p, j = 1 \dots, k_i, k = 1, \dots, l_{i,j} - 1\},$$

に対して， $Q_{\text{quot}} = \sum_{c \in \mathcal{C}} \mathbb{Z}c$ と定義する．さらにここに次のような対称双一次形式を定義する．

$$\begin{aligned} \langle c_{\hat{j}}, c_{\hat{j}'} \rangle &= - \sum_{i=0}^p \deg(f_{i,j_i} - f_{i,j'_i}) - (p-1) \\ &\quad + \#\{i \mid j_i = j'_i, i = 0, \dots, p\}, \\ \langle c_{\hat{j}}, c(i, j, k) \rangle &= \begin{cases} -1 & \text{if } (i, j_i) = (i, j) \text{ and } k = 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}, \\ \langle c(i, j, k), c(i', j', k') \rangle &= \begin{cases} 2 & \text{if } (i, j, k) = (i', j', k') \\ -1 & \text{if } (i, j) = (i', j') \text{ and } |k - k'| = 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}. \end{aligned}$$

ここで $\hat{j} = (j_0, \dots, j_p) \in \mathcal{J}$ であった．この双一次形式をもった $\mathbb{Z}$ 格子 Q_{quot} をルート格子とよぶ．さらに Q_{quot} の中に $c \in \mathcal{C}$ に関する鏡映を次のように定義する．

$$\sigma_c(\alpha) = \alpha - \langle c, \alpha \rangle c.$$

そしてこれら鏡映 σ_c ($c \in \mathcal{C}$) で生成される群を W_{quot} とかいて Weyl 群とよぶ．

さてこのように定義した Weyl 群 W_{quot} の作用をもつルート格子 Q_{quot} と微分作用素から定義した $\tilde{W}$ 作用をもつ $L(P)$ は次のような関係にある．

Theorem 12. 次のような $\mathbb{Z}$ 格子の準同型

$$\Phi: Q_{\text{quot}} \longrightarrow L(P)$$

を考える．

$$\alpha = \sum_{\hat{j} \in \mathcal{J}} \alpha_{\hat{j}} c_{\hat{j}} + \sum_{i=0}^p \sum_{j=1}^{k_i} \sum_{k=1}^{l_{i,j}-1} \alpha(i, j, k) c(i, j, k) \in Q_{\text{quot}},$$

に対して, $\Phi(\alpha) = \prod_{i=0}^p \prod_{j=1}^{k_i} (a_{i,j,1}, \dots, a_{i,j,l_{i,j}})$ を

$$\begin{aligned} a_{i,j,1} &= \sum_{\{\hat{j} \in \mathcal{J} | j_i = j\}} \alpha_{\hat{j}} - \alpha(i, j, 1), \\ a_{i,j,k} &= \alpha(i, j, k-1) - \alpha(i, j, k) \quad \text{for } 2 \leq k \leq l_{i,j}. \end{aligned}$$

と定義する．ただし $\alpha(i, j, l_{i,j}) = 0$. この時次が成り立つ．

1. Φ は全射

2. Weyl 群 W_{quot} の Q_{quot} への作用は Φ によって $\tilde{W}$ の $L(P)$ への作用に写される．すなわち,

$$\begin{aligned} \Phi(\sigma_{c_{\hat{j}}}(\alpha)) &= \sigma(\hat{j})\Phi(\alpha), \\ \Phi(\sigma_{c(i,j,k)}(\alpha)) &= \sigma(i, j, k)\Phi(\alpha), \end{aligned}$$

が全ての $\alpha \in Q_{\text{quot}}$ に対して成り立つ．

3. W_{quot} は特性指数の空間 $\Lambda(P)$ にも次のように作用する．すなわち $\mu \in \Lambda(P)$ に対し,

$$\begin{aligned} \sigma_{c_{\hat{j}}}\mu &= \sigma(\hat{j})\mu, \\ \sigma_{c(i,j,k)}\mu &= \sigma(i, j, k)\mu. \end{aligned}$$

したがってこの定理によって微分作用素への middle convolution によって生成される $\tilde{W}$ 作用をもつ格子 $L(P)$ は上で定義された Kac-Moody ルート格子 Q_{quot} の W_{quot} 作用を保つ商格子とみることができる．さらに不確定特異点の数が高々一つならばこの Φ は単射であることも証明できる．すなわちこの場合は $L(P)$ はまさにルート格子そのものと同一視できる．例えば Fuchs 型の時がまさにこの場合である．

次に Q_{quot} のなかのルート系の概念の類似として $L(P)$ の中にルート系を定義しよう． $L(P)$ の中に部分集合

$$\Delta_{\text{re}}^{\Phi} = \bigcup_{\hat{j} \in \mathcal{J}} \tilde{W}\Phi(c_{\hat{j}}),$$

を定義し, この中の元を Φ 実ルートと呼ぶことにする．さらに同様に部分集合

$$F^{\Phi} = \left\{ \mathbf{a} \in L(P) \cap \prod_{i=0}^p \prod_{j=1}^{k_i} \mathbb{Z}_{\geq 0}^{l_{i,j}} \setminus \{0\} \mid \begin{array}{l} a_{i,j,1} \geq a_{i,j,2} \geq \dots \geq a_{i,j,l_{i,j}}, d(\mathbf{a}; \hat{j}) \geq 0 \\ \text{for all } i=0, \dots, p, j=1, \dots, k_i, \hat{j} \in \mathcal{T}(P) \end{array} \right\}.$$

を考え, Φ 虚ルートの集合を

$$\Delta_{\text{im}}^{\Phi} = \tilde{W}F^{\Phi} \cup -(\tilde{W}F^{\Phi})$$

と定義する．そしてこれらの和集合

$$\Delta^{\Phi} = \Delta_{\text{re}}^{\Phi} \cup \Delta_{\text{im}}^{\Phi}$$

と書いて, この中の元を Φ ルートと呼ぶ．ここで Φ がさらに単射ならばこの Φ ルートは Q_{quot} のルートの集合に含まれることが示される^{*17}

^{*17} 虚ルートは完全に一致し, 実ルートは後の定理の主張を簡単にするために少し意図的に削ってある．

また,

$$\Delta^{\Phi+} = \Delta^{\Phi} \cap \prod_{i=0}^p \prod_{j=1}^{k_i} \mathbb{Z}_{\geq 0}^{l_{i,j}}$$

の元を Φ 正ルートとよぶことにする. このようにルート系の類似として $L(P)$ に Φ ルート系を導入することができたが, これはもとの微分作用素 P の既約性と次のように関係している.

Theorem 13. $P \in W[x]$ は前の通りとし, $\lambda(P) \in \Lambda(P)$ は *generic* とする. この時 $P \in W[x]$ が $W(x)$ の中で既約ならば $\mathbf{m}(P) \in \Delta^{\Phi+}$. 逆に $\mathbf{m}(P) \in \Delta^{\Phi+}$ であって $\text{idx } \mathbf{m}(P) \neq 0$, あるいは $\text{idx } \mathbf{m}(P) = 0$ ならば $\mathbf{m}(P)$ に関して $\gcd(m_{i,j,k}(P)) = 1$ がみたされるならば, P は既約である. ここで $\text{idx } \mathbf{m}(P) = \langle \Phi^{-1}(\mathbf{m}(P)), \Phi^{-1}(\mathbf{m}(P)) \rangle$ とした.

これは籐の表現の直既約表現の存在と次元ベクトルが正ルートであることの同値性を示した Kac の定理の弱い形の類似といえる.

またこの応用として既約リジッドな Fuchs 型微分作用素が middle convolution によって階数 1 の微分作用素から構成できるという Katz の定理の不確定特異点版が簡単な系として従う.

Theorem 14. $P \in W[x]$ は定理 13 の通りとし, さらに $W(x)$ で既約とする. このとき $\text{idx } \mathbf{m}(P) = 2$ であることと, $E(\hat{j})$ と $\sigma(i, j, k)$ の繰返しで階数 1 の作用素に帰着できることは同値.

証明は階数 1 の作用素が単純 Φ ルート $c_{\hat{j}} (\hat{j} \in \mathcal{J})$ に対応することに加えて, $\alpha \in \Delta^{\Phi}$ に対し $\langle \alpha, \alpha \rangle = 2$ と $\alpha \in \Delta^{\Phi+}$ が同値であることに注意すればよい.

4.2.1 $\text{idx} = 0, -2$ の微分作用素の分類

$\text{idx } \mathbf{m}(P) = 2$ となるような微分作用素 P はすべて階数 1 の作用素から作れることは Katz の定理からわかったが, その他の場合はどうなるか考えてみる. ここでは特に $\text{idx } \mathbf{m}(P) = 0, -2$ の場合について考える.

まず Fuchs 型の場合を思い出しておく. $\text{idx} = 0$ の場合は Kostov による.

Theorem 15 (Kostov [Ko]). P は既約とする. このとき $\text{idx } \mathbf{m}(P) = 0$ であることと, *middle convolution* と *addition* によって次のいずれかのスペクトル型を持つ微分作用素に帰着できることは同値.

$$(m_{0,1}m_{0,2}; m_{1,1}m_{1,2}; m_{2,1}m_{2,2}; m_{3,1}, m_{3,2}) = (11; 11; 11; 11),$$

$$(m_{0,1} \dots; m_{1,1} \dots; m_{2,1} \dots) = \begin{cases} (111; 111; 111), \\ (22; 1111; 1111), \\ (33; 222; 111111). \end{cases}$$

また $\text{idx} = -2$ の場合は大島による.

Theorem 16 (大島 [Os2])). P は既約とする . このとき $\text{idx } \mathbf{m}(P) = -2$ であることと , *middle convolution* と *addition* によって次のいずれかのスペクトル型を持つ微分作用素に帰着できることは同値 .

$$\begin{aligned} & (11; 11; 11; 11; 11), \quad (21; 21; 111; 111), \quad (31; 22; 22; 1111), \\ & (22; 22; 22; 211), \quad (211; 1111; 1111), \quad (221; 221; 11111), \\ (m_{0,1} \dots; m_{1,1} \dots; \dots) = & (32; 11111; 11111), \quad (222; 222; 2211), \quad (33; 2211; 111111), \\ & (44; 2222; 22211), \quad (44; 332; 11111111), \quad (55; 3331; 22222), \\ & (66; 444; 2222211). \end{aligned}$$

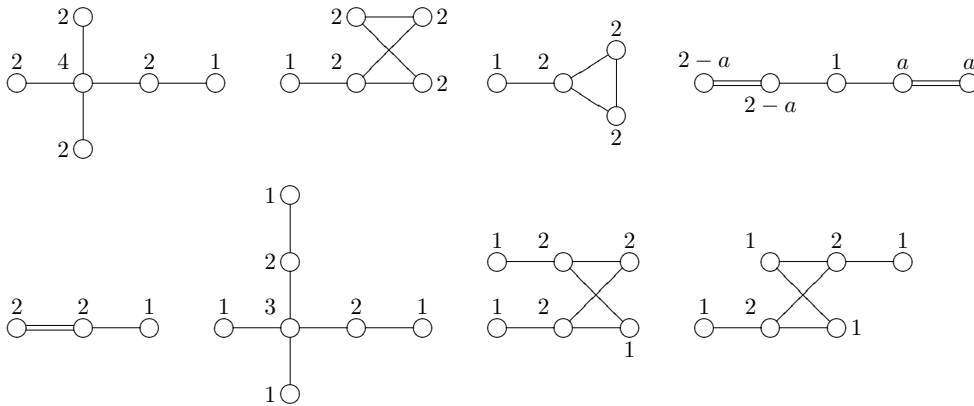
これらの定理を我々のルート系との対応を用いて不確定特異点を持つ微分作用素に拡張する . まず $\text{idx} = 0$ の場合は次のようになる .

Theorem 17. P が既約とする . またスペクトル型 $\mathbf{m}(P)$ は $\gcd\{m_{i,j,s} \mid i = 0, \dots, p, j = 1, \dots, k_i, s = 1, \dots, l_{i,j}\} = 1$ となっているとする . このとき $\text{idx } \mathbf{m}(P) = 0$ であるならば , *middle convolution* と *addition* によって次をみたす微分作用素 $P_{\min}$ に帰着できる . すなわち $\mathbf{m}(P_{\min})$ の Φ による逆像を $\alpha(P_{\min})$ とすると^{*18}その *support* は次のアフィンルート系の拡大 *Dynkin* 図のいずれか .

$$E_8^{(1)}, E_7^{(1)}, E_6^{(1)}, D_4^{(1)}, A_3^{(1)}, A_2^{(1)}, A_1^{(1)}, A_1^{(1)} \oplus A_1^{(1)}.$$

さらに $\text{idx} = -2$ の時は次のようになる .

Theorem 18. P が既約とする . このとき $\text{idx } \mathbf{m}(P) = -2$ であるならば , *middle convolution* と *addition* によって次をみたす微分作用素 $P_{\min}$ に帰着できる . すなわち $\mathbf{m}(P_{\min})$ の Φ による逆像を $\alpha(P_{\min})$ とすると , その *support* は次の *Dynkin* 図のいずれか . また k 各 $\alpha(P_{\min})$ はこの図の中の頂点の上の数字を係数としてもつ .



^{*18} Φ が単射でないときは $P_{\min}$ のスペクトル型から前と同様に定義される格子 $L_{\min} \subset L(P)$ に制限した $\Phi|_{L_{\min}}$ による $\mathbf{m}(P_{\min})$ の逆像をとることとする .

以上で $\text{idx} = 2, 0, -2$ の場合の微分作用素の middle convolution の作用による分類ができたことになるが、一般の idx に対しては次のことがいえる。

Theorem 20. r を 2 以下の整数として固定する。 P を既約とし、 $\text{idx } \mathbf{m}(P) = -r$ であるとする。また $P_{\min}$ を P から middle convolution と addition で得られる微分作用素達の中で階数が最小のものとする。このとき $r > 0$ ならば $P_{\min}$ の取りうるスペクトル型は有限通りである。また $r = 0$ ならば $\mathbf{m}(P_{\min})$ に対して $\gcd\{m_{i,j,s} \mid 0 \leq i \leq p, 1 \leq j \leq k_i, 1 \leq s \leq l_{i,j}\} = 1$ を満たすスペクトル型は有限通り。

参考文献

- [Be] D. Bertrand, *On Andre's proof of the Siegel Shidlovski theorem*, Colloque Franco-Japonais: Théorie des nombres transcendants, Sem. Math. Sci. 27 (Keio University, Yokohama, 1999).
- [CB] W. Crawley-Boevey, *On matrices in prescribed conjugacy classes with no common invariant subspaces and sum zero*, Duke Math. J. **118** (2003), 339–352.
- [DG] M. Dettweiler and S. Reiter, *An algorithm of Katz and its applications to the inverse Galois problems*, J. Symbolic Comput. **30** (2000), 761–798.
- [DG2] M. Dettweiler and S. Reiter, *Middle convolution of Fuchsian systems and the construction of rigid differential systems*. J. Algebra **318** (2007), 1–24.
- [Ha] Y. Haraoka, *Integral representations of solutions of differential equations free from accessory parameters*, Adv. Math. **169** (2002), 187–240.
- [Ha2] 原岡喜重, 「超幾何関数」, すうがくの風景 7, 朝倉書店, 2002.
- [HF] Y. Haraoka and G. M. Filipuk, *Middle convolution and deformation for Fuchsian systems*, J. Lond. Math. Soc. **76** (2007), 438–450.
- [Hi] K. Hiroe, *Linear differential equations on $\mathbb{P}^1$ and root systems*, arXiv:1010.2580v3, 2011.
- [Kc] V. C. Kac, *Infinite dimensional Lie algebras*, Third Edition, Cambridge Univ. Press 1990.
- [Ka] N. M. Katz, *Rigid Local Systems*, Annals of Mathematics Studies **139**, Princeton University Press, 1995.
- [Ko] V. P. Kostov, *The Deligne-Simpson problem for zero index of rigidity*, Perspective in Complex Analysis, Differential Geometry and Mathematical Physics, World Scientific 2001, 1–35.
- [MWZ] P. Magyar, J. Weyman and A. Zelevinski, *Multiple flag variety of finite type*, Adv. in Math. **141** (1999), 97–118.
- [MUI] 森口繁一, 宇田川銈久, 一松信, 数学公式 III – 特殊函数 –, 岩波全書, 岩波書店, 1960.

- [Os1] T. Oshima, Okubo, a computer program for Katz/Yokoyama/Oshima algorithms on MS-Windows, <ftp://akagi.ms.u-tokyo.ac.jp/pub/math/okubo/okubo.zip>, 2007-8.
- [Os2] T. Oshima, *Classification of Fuchsian systems and their connection problem*, arXiv:0811.2916, preprint, 2008, 29pp.
- [Os3] T. Oshima, *Katz's middle convolution and Yokoyama's extending operation*, arXiv:0812.1135, 2008, 18pp.
- [Os4] T. Oshima, *Fractional calculus of Weyl algebra and Fuchsian differential equations*, arXiv:1102.2792v1, 195pp, <http://akagi.ms.u-tokyo.ac.jp/~oshima>.
- [Os5] T. Oshima, *muldif.rr*, a library of the calculation of differential operators for computer algebra Risa/Asir, <ftp://akagi.ms.u-tokyo.ac.jp/pub/math/muldif/>, 2009-2010.
- [Os6] 大島利雄 述, 廣惠一希 記, “特殊関数と代数的線型常微分方程式”, Lecture Notes in Mathematical Sciences **11** (2011), 東京大学, 111pp.
- [OS] T. Oshima and N. Shimeno, Heckman-Opdam hypergeometric functions and their specializations, *RIMS Kôkyûroku Bessatsu* **B20** (2010), 129–162.
- [Si] C. T. Simpson, *Products of Matrices*, Canadian Math. Soc. Conference Proceedings **12**, AMS, Providence RI (1991), 157–185.
- [Si2] C. T. Simpson, *Katz's middle convolution algorithm*, 53 pp, arXiv:math/0610526.
- [WW] E. T. Whittaker and G. N. Watson, *A Course of Modern Analysis, Fourth Edition*, 1927, Cambridge University Press.
- [Yo] T. Yokoyama, *Construction of systems of differential equations of Okubo normal form with rigid monodromy*, Math. Nachr. **279** (2006), 327–348.