

多重旗多様体上の軌道の有限性について

Double flag varieties of finite type for a symmetric pair

西山享^{*} (青学大・理工)・落合啓之[†] (九大・数理)

KYO NISHIYAMA AND HIROYUKI OCHIAI

概要. 簡約代数群 G の部分旗多様体とその対称部分群 K の部分旗多様体の直積を考える。これを対称対の二重旗多様体と呼ぶ。二重旗多様体への K の対角的な作用を考えると、この作用が有限軌道を持つための十分条件を与える。この条件を用いて、有限軌道を持つような多重旗多様体を多数構成し、その一例として三重 Grassmann 多様体における軌道の分類について報告する。

INTRODUCTION

G を複素簡約代数群とし、 B をそのボレル部分群とする。またそのリー環を \mathfrak{g} や \mathfrak{b} のように対応するドイツ小文字で表そう。 G/B を旗多様体と呼ぶ。これは G のボレル部分群の全体とみなすこともできるし、あるいはリー環 \mathfrak{g} のボレル部分環の全体とみなすこともできる。この多様体を旗多様体と呼ぶのは、 $G = \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ が一般線型群の場合に、 \mathbb{C}^n の部分空間の旗

$$F_0 = \{0\} \subset F_1 \subset F_2 \subset \cdots \subset F_{n-1} \subset F_n = \mathbb{C}^n \quad \dim F_d = d \quad (0.1)$$

の全体と自然に対応がつくからである。また、ボレル部分群を含むような G の部分群 P を放物型部分群と言う。このとき G/P は部分旗多様体と呼ばれる。この名称の由来も、 $G = \mathrm{GL}_n$ の場合に、 G/P が旗 (0.1) の一部分 (部分旗)

$$F_0 = \{0\} \subset F_{d_1} \subset F_{d_2} \subset \cdots \subset F_{d_k} \subset \mathbb{C}^n \quad (\mathbf{d} = (d_1, d_2, \dots, d_k) \text{ を固定})$$

の全体と考えられるからである。もし $k = 1$ ならば、部分旗多様体は、ある次元 d の部分空間全体を表わすから、これはよく知られた Grassmann 多様体 $\mathrm{Grass}_d(\mathbb{C}^n)$ となり、対応する放物型部分群は極大放物型部分群である。また、一般に部分旗多様体は射影多様体だが、 P が放物型部分群であることと G/P が射影多様体であることは同値である。つまり部分旗多様体は G の等質空間であって、かつ射影多様体になっているものと言ってもよい。

2010 年度表現論シンポジウム (2010/11/09 – 11/12; 於 おおとり荘) 報告集原稿.

^{*}) Supported by JSPS Grant-in-Aid for Scientific Research (B) #21340006.

[†]) Supported by JSPS Grant-in-Aid for Scientific Research (A) #19204011.

さて、Steinberg は [Ste76] において、現在 *Steinberg* 多様体と呼ばれている多様体

$$\text{St} = \{(x, \mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2) \mid x \in \mathfrak{b}_1 \cap \mathfrak{b}_2, x \text{ は冪零}\} \subset \mathfrak{g} \times G/B \times G/B$$

を定義し、その代数多様体としての既約成分が Weyl 群 W_G によってパラメータ付けできることを示した。二重旗多様体 $G/B \times G/B$ 上に G を対角的に作用させるとき、その G -軌道は

$$G \backslash (G/B \times G/B) \simeq B \backslash G/B \simeq W_G$$

のように Bruhat 分解を介して Weyl 群 W_G でパラメータ付けされる。Steinberg 多様体の既約成分は、実はこれらの軌道の余法束によって決まるのである。Steinberg 多様体の構造は、Harish-Chandra 双加群の圏や最高ウェイト加群の圏と密接に関係している (下記例 1.2 参照)。

この類似が対称対においても考えられる。

G の包含的自己同型、つまり $\theta^2 = \text{id}$ となるような自己同型 $\theta \in \text{Aut}(G)$ を取る。このとき θ の固定部分群 $G^\theta = \{g \in G \mid \theta(g) = g\}$ を K と書き、 K を対称部分群、 (G, K) を対称対と呼ぶ。対称部分群 K は旗多様体 G/B 上に有限軌道で働くことがよく知られている (松木 [Mat79, Mat82], Rossmann [Ros79], Springer [Spr85], Wolf [Wol69] 他)。この作用を利用して Steinberg 多様体の対称対への一般化が定義され、その代数多様体としての既約成分は K -軌道の余法束で決まること、その幾何学的情報が Harish-Chandra (\mathfrak{g}, K) -加群の圏の研究に役立つことが、ここ 20~30 年程の間に次々と明らかにされてきた ([LV83], [ABV92], [Tra07] あるいは [CNT09] 等を参照)。

以上見てきたように、旗多様体やそのいくつかの直積 (多重旗多様体と呼ぶ) が有限軌道を持つ場合は、表現論的に興味深い状況が現れており、また Bruhat 順序にはじまる組合せ論的な興味もまた有限軌道の場合に生じる。この報告では、多重旗多様体とその対称対への一般化を考え、軌道の有限性について得られたさまざまな結果を報告する。

1. 多重旗多様体

G を複素数体 \mathbb{C} 上の連結な簡約代数群とし、 P_1, P_2, \dots, P_k を放物型部分群とする。 $\mathfrak{X}_{P_i} = G/P_i$ は部分旗多様体である。部分旗多様体の直積 $\mathfrak{X}_{P_1} \times \dots \times \mathfrak{X}_{P_k}$ を多重旗多様体と呼ぶ。多重旗多様体には G が対角的に働いているが、 G -軌道が有限個であるとき、有限型という。次の問題を考えよう。

問題 1.1. 多重旗多様体 $\mathfrak{X}_{P_1} \times \dots \times \mathfrak{X}_{P_k}$ に G が対角的に働くととき、有限型になるのはいつか? そのような場合を分類せよ。さらに有限型の多重旗多様体に対して、 G -軌道を組合せ論などを用いて具体的に記述せよ。

この問題は比較的長い歴史を持つが、不思議なことに、つい最近まで組織的に調べられてこなかった。我々が扱うのは、多重旗多様体を対称対へ拡張したものであるが、特別な場合をおさらいしておく。

例 1.2 (Bruhat 分解). $k = 2$ の時には

$$G \backslash \mathfrak{X}_{P_1} \times \mathfrak{X}_{P_2} = G \backslash (G/P_1 \times G/P_2) \simeq P_1 \backslash G/P_2$$

であるが、一般化された Bruhat 分解によって、

$$P_1 \backslash G / P_2 \simeq W_{P_1} \backslash W / W_{P_2}$$

である。ただし $W = W_G$ は G の Weyl 群、 W_P は放物型部分群 P の Levi 部分群の Weyl 群を表わしている。Weyl 群は有限群であるから、もちろん軌道は有限であって、二重旗多様体 $\mathfrak{X}_{P_1} \times \mathfrak{X}_{P_2}$ は常に有限型である。

特に $P_1 = P_2 = B$ が Borel 部分群のときには $W_B = \{e\}$ となるので、通常の Bruhat 分解 $B \backslash G / B = \sqcup_{w \in W} BwB$ に帰着する。この二重旗多様体には、実は二種類の表現論が絡んでいる。

一つは旗多様体 \mathfrak{X}_B の B -軌道に関係したもので、表現論的には最高ウェイト加群の理論とみることができる。 B 軌道の余法束やモーメント写像を考えることによって Joseph の軌道多様体 (orbital variety) の理論が構築される ([HJ05])。

もう一方は $G \simeq \Delta G \curvearrowright (G \times G) / (B \times B)$ とみなすもので、これは複素リー群 G の Harish-Chandra 双加群の理論と関係している。この場合に G -軌道の余法束とモーメント写像を考えたのは、Steinberg [Ste76] が最初であろう。モーメント写像によるゼロ・ファイバーは Steinberg 多様体と呼ばれ、ラグランジュ部分多様体 (余法束) の和集合となっている。

これら二つの描像において、軌道空間はまったく同じであるから、既約表現の分類などは全く同じパラメータを有しており、相互に深く関係している (Bernstein-Gelfand の圏同値 [BG80])。旗多様体とモーメント写像を用いた、この二つの描像の統一的理解については、[DR09] を参照して欲しい。

例 1.3. $k = 3$ の場合には、球等質多様体と関連して Littelmann [Lit94] の仕事がある。彼は、 G の極大放物型部分群 P_1, P_2 を取るとき、二重旗多様体 $\mathfrak{X}_{P_1} \times \mathfrak{X}_{P_2}$ がいつ球多様体になるかを研究したのだが、これは言い換えると、三重旗多様体 $\mathfrak{X}_{P_1} \times \mathfrak{X}_{P_2} \times \mathfrak{X}_B$ が G の対角的作用に関して有限型になるのはいつかという問題と同値である。そのようなわけで、多重旗多様体の有限性の問題は球等質多様体の理論と関係している。

また、特殊な場合ではあるが、Lagrangian Grassmann 多様体の三重直積について Clerc-Neeb [CN06] の仕事がある。Lagrangian Grassmannian はシンプレクティック群の Siegel 型の放物型部分群による旗多様体であるから、これも三重旗多様体の一種である。この場合には、軌道が Maslov 指数によって分類されることがわかる。興味深いことに 4 つの直積の場合には、軌道は無限個現れるのだが、パラメータ付けによる軌道の分類が可能である。

直積の個数 k が大きいと、多重旗多様体が有限型にならないのは次元を比較するだけでも明らかである。そのような場合でも、おそらく多重旗多様体上の G 軌道のパラメータ付け (不変式論) は大変興味深い問題ではないかと思われるが、いずれにせよ、有限型の多重旗多様体では k は小さな値しか許されない。したがって、その分類は手がつかないほど複雑ではないはずである。

さて、一般の G と一般の k に対しては、この問題はまだ解決されていないが、 G が古典型の代数群のときには、Magyar-Weymann-Zelevinsky [MWZ99, MWZ00] によって有

限軌道になる場合が分類されている (ただし、残念なことに B・D 型の群については“分類できる”と主張されているだけで、結果は記載されていない)。それによれば $k \leq 3$ が必要であり、さらに放物型部分群にも強い制約が課せられる。あとで必要になるので、ここで簡単に Magyar-Weymann-Zelevinsky の分類をまとめておこう。

1.1. **Type A.** $G = \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ を一般線型群とする。以下、しばしばこれを GL_n と略記する。 GL_n の放物型部分群は、サイズが n の合成 (composition) によって分類される。ここで合成 $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_\ell)$ とは、順序づけられていない n の分割のことである。このとき、合成 λ に対して、標準的な放物型部分群 $P = P_\lambda$ を次のように決めよう。

$$P = P_\lambda = \begin{pmatrix} \boxed{\mathrm{GL}_{\lambda_1}} & & * \\ & \boxed{\mathrm{GL}_{\lambda_2}} & \\ & & \ddots \\ 0 & & & \boxed{\mathrm{GL}_{\lambda_\ell}} \end{pmatrix}$$

P_λ はブロック上半三角行列からなる部分群で、ブロック対角状に $\mathrm{GL}_{\lambda_1} \times \mathrm{GL}_{\lambda_2} \times \dots \times \mathrm{GL}_{\lambda_\ell}$ が並んだものが Levi 部分群である。また、ユニポテント根基は上半三角行列の形に表わされる。合成 λ の成分の個数、あるいは対角線上に並んだブロックの個数を $\ell(\lambda)$ で表し、これを λ の長さと呼ぶ。

定理 1.4 ([MWZ99]). $G = \mathrm{GL}_n$ とその放物型部分群 P に対して、 $\mathfrak{X}_P = G/P$ を部分旗多様体とする。

(1) 放物型部分群 P_1, \dots, P_k に対して、多重旗多様体 $\mathfrak{X}_{P_1} \times \mathfrak{X}_{P_2} \times \dots \times \mathfrak{X}_{P_k}$ が有限型ならば $k \leq 3$ である。

(2) 三重旗多様体 $\mathfrak{X}_{P_\lambda} \times \mathfrak{X}_{P_\mu} \times \mathfrak{X}_{P_\nu}$ が有限型であるための必要十分条件は、放物型部分群に対応する合成 λ, μ, ν が次の表の条件を満たすことである。ただし、表において、放物型部分群の順序、および合成の成分の置換を許すものとする。

type	$(\ell(\lambda), \ell(\mu), \ell(\nu))$	付加条件
$S_{q,r}$	$(2, q, r)$	$\lambda = (n-1, 1)$
D_{r+2}	$(2, 2, r)$	
E_6	$(2, 3, 3)$	
E_7	$(2, 3, 4)$	
E_8	$(2, 3, 5)$	
$E_{r+3}^{(a)}$	$(2, 3, r)$	$\lambda = (n-2, 2) \ (n \geq 4)$
$E_{r+3}^{(b)}$	$(2, 3, r)$	$\mu = (\mu_1, \mu_2, 1)$

1.2. **Type C.** 次にシンプレクティック群 $G = \mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{C})$ の場合を考えよう。一般線型群の場合と同じくこれを Sp_{2n} と略記する。

シンプレクティック空間 \mathbb{C}^{2n} における、等方的部分空間の増大列からなる部分旗 $F_1 \subset F_2 \subset \dots \subset F_\ell$ であって、各部分空間の次元を指定したもの全体がなす多様体を等方的部

分旗多様体 (isotropic flag variety) と呼ぶことにする。 $G = \mathrm{Sp}_{2n}$ は、この等方的部分旗多様体に推移的に作用している。

さて、部分空間 F_i のシンプレクティック形式に関する直交部分空間を F_i^\perp と書けば、 F_i は等方的であるから、 $F_i \subset F_i^\perp$ が成り立つ。これより、次の部分旗

$$F_1 \subset F_2 \subset \cdots \subset F_{\ell-1} \subset F_\ell \subset F_\ell^\perp \subset F_{\ell-1}^\perp \subset \cdots \subset F_2^\perp \subset F_1^\perp \quad (1.1)$$

を得る。 G の任意の放物型部分群 P は適当な等方的部分旗をとることにより、部分旗 (1.1) の固定部分群として得られる。また、そのとき P の共役類は等方的部分旗の次元を指定することによって決まる。そこで、放物型部分群 P に対応する $2n$ の合成 λ を次のように定義しよう。まず $\dim F_\ell < n$ のときは¹

$$\begin{cases} \lambda_i = \dim F_i/F_{i-1} & (1 \leq i \leq \ell) \\ \lambda_{\ell+1} = \dim F_\ell^\perp/F_\ell = 2(n - \dim F_\ell) \\ \lambda_{\ell+i+1} = \dim F_{\ell-i}^\perp/F_{\ell-i+1}^\perp = \lambda_{\ell-i+1} & (1 \leq i \leq \ell) \end{cases}$$

とおく。ただし $F_0 = \{0\}$ と解釈する。部分旗が Lagrange 部分空間を含んでいる場合、つまり $\dim F_\ell = n$ ならば、

$$\begin{cases} \lambda_i = \dim F_i/F_{i-1} & (1 \leq i \leq \ell) \\ \lambda_{\ell+i} = \dim F_{\ell-i}^\perp/F_{\ell-i+1}^\perp = \lambda_{\ell-i+1} & (1 \leq i \leq \ell) \end{cases}$$

とおく。この $2n$ の合成 $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots)$ に対して、対応する放物型部分群を $P = P_\lambda$ と書く。 P_λ の Levi 部分群は $\mathrm{GL}_{\lambda_1} \times \cdots \times \mathrm{GL}_{\lambda_\ell} \times \mathrm{Sp}_{\lambda_{\ell+1}}$ に同型であることが容易にわかる。ただし $\dim F_\ell = n$ のときは、 $\mathrm{Sp}_{\lambda_{\ell+1}}$ の成分は現れない。

例 1.5. (1) $\lambda = (n, n)$ ならば、対応する放物型部分群 $P_{(n,n)}$ は Siegel 型の極大放物型部分群で、その Levi 部分群は GL_n と同型である。このとき $P = P_{(n,n)}$ はある Lagrange 部分空間の安定化部分群であるから、 G/P は Lagrangian Grassmann 多様体 $\mathrm{LGrass}(\mathbb{C}^{2n})$ と同型である。

(2) $\lambda = (m, 2(n-m), m)$ ($m < n$) のとき、 $P = P_{(m, 2(n-m), m)}$ はやはり極大放物型部分群であり、Levi 部分群は $\mathrm{GL}_m \times \mathrm{Sp}_{2(n-m)}$ と同型である。 P は m 次元の等方的部分空間の安定化部分群であり、 G/P は等方的 Grassmann 多様体、つまり、次元が m の等方的部分空間全体のなす多様体 $\mathrm{IGrass}_m(\mathbb{C}^{2n})$ と同型である。

この記号のもとに次の定理が成り立つ。

定理 1.6 ([MWZ00]). $G = \mathrm{Sp}_{2n}$ をシンプレクティック群とし、放物型部分群 P に対して、 $\mathfrak{X}_P = G/P$ で部分旗多様体を表わす。

(1) 放物型部分群 P_1, \dots, P_k に対して、多重旗多様体 $\mathfrak{X}_{P_1} \times \mathfrak{X}_{P_2} \times \cdots \times \mathfrak{X}_{P_k}$ が有限型ならば $k \leq 3$ である。

¹ $\dim F_\ell < n$ は、部分旗が極大等方的部分空間 (Lagrange 部分空間) を含まないことと同値である。

(2) 三重旗多様体 $\mathfrak{X}_{P_\lambda} \times \mathfrak{X}_{P_\mu} \times \mathfrak{X}_{P_\nu}$ が有限型であるための必要十分条件は、放物型部分群に対応する合成 λ, μ, ν が次の表の条件を満たすことである。ただし、表において、放物型部分群の順序、および合成の成分の置換を許すものとする。

<i>type</i>	$(\ell(\lambda), \ell(\mu), \ell(\nu))$	付加条件
$\mathrm{Sp}D_{r+2}$	$(2, 2, r)$	$\lambda = \mu = (n, n)$
$\mathrm{Sp}E_6$	$(2, 3, 3)$	$\lambda = (n, n)$
$\mathrm{Sp}E_7$	$(2, 3, 4)$	$\lambda = (n, n)$
$\mathrm{Sp}E_8$	$(2, 3, 5)$	$\lambda = (n, n)$
$\mathrm{Sp}E_{r+3}^{(b)}$	$(2, 3, r)$	$\lambda = (n, n); \mu = (1, 2n - 2, 1); 3 \leq r$
$\mathrm{Sp}Y_{4,r}$	$(3, 3, r)$	$\lambda = \mu = (1, 2n - 2, 1); 3 \leq r$

2. 対称対に付随した二重旗多様体

以下では、対称対の場合に、多重旗多様体上の軌道の有限性の問題の類似を考えてみたい。そのために先ず群多様体の場合 $(G \times G)/\Delta G$ に上の結果を翻訳してみよう。

2.1. 群多様体の場合. G を簡約代数群として、 $\mathbb{G} = G \times G$, $\mathbb{K} = \Delta G$ とおく。このとき \mathbb{K} は \mathbb{G} の包含的自己同型 $\theta(g_1, g_2) = (g_2, g_1)$ に関する固定部分群となっており、 (\mathbb{G}, \mathbb{K}) は対称対である。同型 $\mathbb{G}/\mathbb{K} \simeq G$ が成り立つので、この対称対を群多様体に付随した対称対と呼ぶ。

さて、前節のように、 G の多重旗多様体 $\mathfrak{X}_{P_1} \times \mathfrak{X}_{P_2} \times \cdots \times \mathfrak{X}_{P_k}$ を考え、これを対称対 \mathbb{G}/\mathbb{K} の言葉に翻訳してみよう。

まず $k = 2$ の場合には、 $\mathbb{P} = P_1 \times P_2$ とおくと、これは \mathbb{G} の放物型部分群であるから、二重旗多様体 $\mathfrak{X}_{P_1} \times \mathfrak{X}_{P_2} \simeq (G \times G)/(P_1 \times P_2) = \mathbb{G}/\mathbb{P}$ は、単に \mathbb{G} の部分旗多様体を表しているにすぎない。このとき、対角的作用によって G 軌道を調べるということは、 \mathbb{K} 軌道を調べることと同値であり、結局

$$G \backslash \mathfrak{X}_{P_1} \times \mathfrak{X}_{P_2} \simeq \mathbb{K} \backslash \mathbb{G}/\mathbb{P}$$

は古典的な KGP 分解の理論となって、軌道は常に有限で目新しいことは起こらない。

$k = 3$ の場合には、やはり $\mathbb{P} = P_1 \times P_2$ とおいて、 $P_3 \simeq \Delta P_3 \subset \Delta G = \mathbb{K}$ により、 P_3 を \mathbb{K} の放物型部分群とみなすことができる。これを $\mathbb{Q} = \Delta P_3$ と書こう。すると

$$\mathfrak{X}_{P_1} \times \mathfrak{X}_{P_2} \times \mathfrak{X}_{P_3} \simeq (G \times G)/(P_1 \times P_2) \times (G/P_3) \simeq \mathbb{G}/\mathbb{P} \times \mathbb{K}/\mathbb{Q}$$

となり、 G の対角的作用は、 \mathbb{K} の対角的作用に対応する。このとき、直積の第一成分は $\mathbb{G} = G \times G$ の部分旗多様体、第二成分は $\mathbb{K} = \Delta G$ の部分旗多様体と解釈することができる。

$k \geq 4$ の時にも同様の解釈はできるが、軌道が有限にならないと予想される (少なくとも古典型の場合は有限でない)。

2.2. 対称対の二重旗多様体. 以下 G を複素簡約代数群とし、 θ を包含的自己同型、 $K = G^\theta$ をその固定部分群とする。このとき (G, K) を対称対と呼ぶ。たとえば (GL_n, O_n) や $(GL_n, GL_p \times GL_q)$ ($n = p + q$) などが対称対の例である。 P を G の放物型部分群とし、 Q_1, \dots, Q_ℓ を K の放物型部分群とする。部分旗多様体を $\mathcal{X}_P = G/P$ および $\mathcal{Z}_Q = K/Q$ であらわすことにしよう。我々は次の問題を考えたい。

問題 2.1. 部分旗多様体の直積 $\mathcal{X}_P \times \mathcal{Z}_{Q_1} \times \dots \times \mathcal{Z}_{Q_\ell}$ に K が対角的に働くとき、 K 軌道が有限個になるのはいつか？ またそのような場合を分類せよ。

群多様体 $(G \times G, \Delta G)$ を対称対と考えた場合には、すでに説明したように $\ell \geq 2$ ならば無限軌道になることが分かっている (ただし G が古典型のとき)。一般の対称対の場合には $\ell \geq 2$ でも有限軌道になる場合があるかもしれないが、我々は、以下 $\ell = 1$ の場合を考えることにする。そこで、若干の語弊はあるが $\mathcal{X}_P \times \mathcal{Z}_Q$ を対称対に付随した二重旗多様体あるいは単に二重旗多様体と呼ぶことにする。

定義 2.2. 二重旗多様体 $\mathcal{X}_P \times \mathcal{Z}_Q$ 上の K 軌道が有限であるとき、有限型と呼ぶ。

以下、有限型の二重旗多様体について考えよう。

3. 有限型二重旗多様体の構成

一般に、有限型の二重旗多様体をすべて分類するのはかなり難しいように思われる。しかし、我々は [NO11] において、対称対の二重旗多様体の有限性を (対称対でない) 通常の場合の三重旗多様体の有限性に帰着する手法を開発した。この手法には二つあり、限定的ながら、よい場合には有限型二重旗多様体の分類にも成功した。この節では、まず二種類の手法を紹介する。つぎに、それをを用いて有限型の二重旗多様体を多数構成し、分類について解説しよう。

3.1. 第一の方法. G を連結簡約代数群、 θ を包含的自己同型とし、 $K = G^\theta$ を対称部分群とする。 K はまた簡約代数群であることに注意しよう。

我々は二重旗多様体 $\mathcal{X}_P \times \mathcal{Z}_Q = G/P \times K/Q$ を考えるのであるが、これを三重旗多様体に埋め込んで考えたい。そのために、 Q に対応する G の放物型部分群を取る必要がある。それが可能であることを保証するのが次の二つの補題である。

補題 3.1. $Q \subset K$ を K の放物型部分群とすると、 G の θ 安定な放物型部分群 P' が存在して、 $Q = K \cap P'$ と書ける。ここで P' が θ 安定であるとは $\theta(P') = P'$ が成り立つことである。

このように、任意の Q に対して、 θ 安定な放物型部分群 P' で $Q = K \cap P'$ となるものを取りことができるが、このような P' は、たとえ G -共役を考えても一意的ではない。また、 θ 安定でなくとも K との共通部分が Q になるような G の放物型部分群は存在する。

以下、この補題のような θ 安定な放物型部分群 P' を一つ固定して考える。

補題 3.2. G の放物型部分群 P' であって θ 安定なものを一つとる。

- (1) $Q = K \cap P'$ は K の放物型部分群である。このとき $\mathfrak{X}_{P'} = G/P'$ における P' を通る K 軌道は閉軌道であって $Z_Q = K/Q$ に同型である。
- (2) 部分旗多様体 $\mathfrak{X}_{P'}$ の任意の閉 K -軌道は、ある θ 安定な放物型部分群 P'' を通る軌道であって K/Q'' ($Q'' = K \cap P''$) と同型である。

G の θ -安定な放物型部分群 P' を選ぶと、 K の部分旗多様体 Z_Q が決まり、それは G の部分旗多様体 $\mathfrak{X}_{P'}$ 上の閉 K -軌道を考えることと同じである。これが上の補題の主張である。したがって我々の二重旗多様体の有限性の問題は次のように一般化することができる。

問題 3.3. 部分旗多様体 $\mathfrak{X}_{P'}$ の K -軌道 \mathcal{O} に対して、 $\mathfrak{X}_P \times \mathcal{O}$ が有限個の K -軌道を持つのはいつか？

この問題は Harish-Chandra 加群の理論から見て興味深いと思われるが、この報告では深入りしないことにする。また、上の二つの補題とその証明については、[BH00] を参照されたい。

さて、次の定理がこの節の主定理の一つである。

定理 3.4. P, P' を G の放物型部分群であって、 P' は θ 安定であるとする。また $Q = P' \cap K$ を K の放物型部分群とする。このとき、三重旗多様体 $\mathfrak{X}_P \times \mathfrak{X}_{\theta(P)} \times \mathfrak{X}_{P'}$ が G の対角的作用に関して有限個の G 軌道を持てば、二重旗多様体 $\mathfrak{X}_P \times Z_Q$ 上の K 軌道は有限である。

定理の証明にはかなりの準備が必要なので、ここでは省くが、Milićić による旗多様体の場合の KGB 分解の有限性の証明 [Mil93, § H.2, Theorem 1] のアイデアがキーポイントである。詳しくは [NO11] を参照されたい。

この定理の仮定を満たすような三重旗多様体は、§ 1 で解説した [MWZ99, MWZ00] の分類を参照すれば多数得られるが、中でも mirabolic な場合はよく知られており、Travkin 等 [Tra09, FGT09] による興味深い研究がある。これらの例については後述する。

3.2. 第二の方法. 引き続き、二つ目の主定理を紹介しよう。この定理の証明は簡単であるが、二重旗多様体と三重旗多様体の関係をよく表わしている。

定理 3.5. P^i ($i = 1, 2, 3$) を G の放物型部分群であって、 $Q := P^2 \cap P^3$ が K の放物型部分群であると仮定する。このとき、もし三重旗多様体 $\mathfrak{X}_{P^1} \times \mathfrak{X}_{P^2} \times \mathfrak{X}_{P^3}$ が有限個の G -軌道を持てば、二重旗多様体 $\mathfrak{X}_{P^1} \times Z_Q$ は有限個の K -軌道を持つ。

さらに、 $P^1 = B$ が G のボレル部分群であって、積 $P_2 P_3$ が G の開集合であれば、逆も正しい。つまり、上の仮定の下に、二重旗多様体 $\mathfrak{X}_B \times Z_Q$ が有限型であることと、三重旗多様体 $\mathfrak{X}_B \times \mathfrak{X}_{P^2} \times \mathfrak{X}_{P^3}$ が有限型であることは同値である。

証明. G の $\mathfrak{X}_{P^2} \times \mathfrak{X}_{P^3}$ への対角的作用を考えると、点 $(P^2, P^3) \in \mathfrak{X}_{P^2} \times \mathfrak{X}_{P^3}$ における固定部分群はちょうど $P^2 \cap P^3 = Q$ になるから、 G -同変な埋め込み $G/Q \hookrightarrow \mathfrak{X}_{P^2} \times \mathfrak{X}_{P^3}$ を得る。これより二重旗多様体の埋め込み

$$K \backslash (\mathfrak{X}_{P^1} \times Z_Q) \cong P^1 \backslash G/Q \simeq G \backslash (\mathfrak{X}_{P^1} \times G/Q) \hookrightarrow G \backslash (\mathfrak{X}_{P^1} \times \mathfrak{X}_{P^2} \times \mathfrak{X}_{P^3}), \quad (3.1)$$

を得るが、最右辺は仮定より有限集合であるから、 $K \backslash (\mathfrak{X}_{P_1} \times \mathcal{Z}_Q)$ の有限性が従う。

次に $P^1 = B$ はボレル部分群で $P_2 P_3 \subset G$ が開集合の場合を考えよう。 $\mathfrak{X}_B \times \mathcal{Z}_Q$ が有限型であるとする。 $K \backslash \mathfrak{X}_B \times \mathcal{Z}_Q \simeq B \backslash G/Q$ であるから、 G/Q には B が有限軌道で作用している。したがって特に G/Q には開 B -軌道が存在する。一方、 $P_2 P_3$ は G の開集合であると仮定したので、埋め込み $G/Q \hookrightarrow \mathfrak{X}_{P_2} \times \mathfrak{X}_{P_3}$ は開埋め込みである。したがって $\mathfrak{X}_{P_2} \times \mathfrak{X}_{P_3}$ 上には開 B -軌道が存在する。これは $\mathfrak{X}_{P_2} \times \mathfrak{X}_{P_3}$ が G の作用に関して球多様体であることを意味するが、これより B -軌道の有限性が従う (Brion [Bri89], Vinberg [Vin86])。

$$G \backslash (\mathfrak{X}_B \times \mathfrak{X}_{P_2} \times \mathfrak{X}_{P_3}) \simeq B \backslash (\mathfrak{X}_{P_2} \times \mathfrak{X}_{P_3})$$

であるから、三重旗多様体 $\mathfrak{X}_B \times \mathfrak{X}_{P_2} \times \mathfrak{X}_{P_3}$ は有限型である。 □

3.3. 有限型二重旗多様体の例. Magyar-Weymann-Zelevinsky による有限型の三重旗多様体のリストがあるから、それを用いて有限型の二重旗多様体を多数構成できる。各タイプごとに有限型二重旗多様体になる (P, Q) のリストを与えておこう。表中 maximal とあるのは極大放物型部分群を表わし、any とあるのは任意の放物型部分群が許されることを意味する。その他の記号は § 1 を参照されたい。

AI 型 : $G/K = \mathrm{SL}_n/\mathrm{SO}_n$ ($n \geq 3$)

P_λ	Q	\mathfrak{X}_P	\mathcal{Z}_Q	extra condition
$(m, n - m)$	any	$\mathrm{Grass}_m(\mathbb{C}^n)$	\mathcal{Z}_Q	
$(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$	Siegel	\mathfrak{X}_P	$\mathrm{LGrass}(\mathbb{C}^n)$	n is even

AII 型 : $G/K = \mathrm{SL}_{2n}/\mathrm{Sp}_{2n}$ ($n \geq 2$)

P_λ	Q	\mathfrak{X}_P	\mathcal{Z}_Q
$(m, 2n - m)$	any	$\mathrm{Grass}_m(\mathbb{C}^{2n})$	\mathcal{Z}_Q
$(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$	Siegel	\mathfrak{X}_P	$\mathrm{LGrass}(\mathbb{C}^{2n})$

AIII 型 : $G/K = \mathrm{GL}_n/\mathrm{GL}_p \times \mathrm{GL}_q$ ($n = p + q$)

$K = \mathrm{GL}_p \times \mathrm{GL}_q$ の直積分解に従って $Q = Q^1 \times Q^2$ と分解しておく。

P_λ	Q_1	Q_2	\mathfrak{X}_P	\mathcal{Z}_Q
any	mirabolic	GL_q	\mathfrak{X}_P	$\mathbb{P}(\mathbb{C}^p)$
any	GL_p	mirabolic	\mathfrak{X}_P	$\mathbb{P}(\mathbb{C}^q)$
$(m, n - m)$	any	any	$\mathrm{Grass}_m(\mathbb{C}^n)$	\mathcal{Z}_Q
$(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$	maximal	maximal	\mathfrak{X}_P	$\mathrm{Grass}_k(\mathbb{C}^p) \times \mathrm{Grass}_\ell(\mathbb{C}^q)$

(注) 表の最後の行で、maximal と表示した部分は GL_p または GL_q 全体でもよい。

CI 型 : $G/K = \mathrm{Sp}_{2n}/\mathrm{GL}_n$ ($n \geq 2$)

P_λ	Q	\mathfrak{X}_P	\mathcal{Z}_Q
Siegel	any	$\mathrm{LGrass}(\mathbb{C}^{2n})$	\mathcal{Z}_Q
$(1, 2n-2, 1)$	any	$\mathbb{P}(\mathbb{C}^{2n})$	\mathcal{Z}_Q

CII 型 : $G/K = \mathrm{Sp}_{2n}/\mathrm{Sp}_{2p} \times \mathrm{Sp}_{2q}$ ($n = p + q$)

P_λ	Q	\mathfrak{X}_P	\mathcal{Z}_Q
Siegel	any	$\mathrm{LGrass}(\mathbb{C}^{2n})$	\mathcal{Z}_Q
$(m, 2n-2m, m)$	Siegel \times Siegel	$\mathrm{IGrass}_m(\mathbb{C}^{2n})$	$\mathrm{LGrass}(\mathbb{C}^{2p}) \times \mathrm{LGrass}(\mathbb{C}^{2q})$

残念ながら、B 型および D 型については有限型三重旗多様体のリストがないため、ただちに表を掲げることができない。まず三重旗多様体の研究が必要である。

3.4. 二重旗多様体の分類. ここでは AIII 型の場合に限って、 $P = B$ がボレル部分群の場合に有限型二重旗多様体の分類とその方針を記す。最近、谷口健二および近藤健介 (青学大・理工) との共同研究によって、エルミート対称対の場合には同様の分類が得られることが分かってきた ([KNOT10]) が、それについては別の機会に報告することにしたい。

$G/K = \mathrm{GL}_n/\mathrm{GL}_p \times \mathrm{GL}_q$ ($n = p + q$) を AIII 型の対称空間とし、 $K = \mathrm{GL}_p \times \mathrm{GL}_q$ の直積分解に従って放物型部分群を $Q = Q^1 \times Q^2$ と分解しておく。また B を $G = \mathrm{GL}_n$ のボレル部分群とする。

定理 3.6. 上の記号の下に、 $q \geq p \geq 1$ と仮定する。このとき、二重旗多様体 $\mathfrak{X}_B \times \mathcal{Z}_Q$ が有限型になるための必要十分条件は $Q = Q^1 \times Q^2$ が次の表で与えられることである。ただし、第 2 列はサイズ p に対する条件を与えている。

Case	p	Q^1	Q^2	\mathcal{Z}_Q
(i)	arbitrary	GL_p	GL_q	{point}
(ii)	arbitrary	GL_p	mirabolic	$\mathbb{P}(\mathbb{C}^q)$
(iii)	1	GL_1	arbitrary	GL_q/Q^2
(iv)	2	GL_2	maximal	$\mathrm{Grass}_m(\mathbb{C}^q)$
(v)	arbitrary	mirabolic	GL_q	$\mathbb{P}(\mathbb{C}^p)$

証明. 定理 3.5 を用いる。 λ を p の合成、 μ を q の合成とする。このとき (λ, μ) は n の合成である。そこで $P^2 = P_{(\lambda, \mu)}$ を合成 (λ, μ) に対応する上半三角の放物型部分群とし、 $P^3 = P_{(p, q)}^\circ$ を合成 (p, q) に対応する下半三角の放物型部分群に取る。我々は標準的に上半三角の放物型部分群を取ることにしたので、ここでは相補的な放物型部分群 P° を取っていることに注意しよう。

すると $Q = P^2 \cap P^3$ は $K = \mathrm{GL}_p \times \mathrm{GL}_q$ の上半三角の放物型部分群で、 $P_\lambda \times P_\mu$ と一致することが容易にわかる。ここで P_λ あるいは P_μ はそれぞれ GL_p および GL_q の放物型部分群である。また $P^2 P^3$ が G の開集合であることも明らかであろう。したがって、 P_2, P_3 は定理 3.5 の仮定を満たしている。

これより、 $\mathfrak{X}_B \times \mathcal{Z}_Q$ が有限型であることと、 $\mathfrak{X}_B \times \mathfrak{X}_{P(\lambda, \mu)} \times \mathfrak{X}_{P(p, q)}$ が有限型であることは同値であることが結論される。あとは $\mathfrak{X}_B \times \mathfrak{X}_{P(\lambda, \mu)} \times \mathfrak{X}_{P(p, q)}$ がいつ有限型になるかを定理 1.4 を使って調べればよい。□

4. 応用: 球多様体

多様体 X に K が作用している時、 X がこの作用に関して球多様体であるとは K のボレル部分群が開かつ稠密な軌道を持つことであった。一般に K 軌道が有限であってもその作用が球作用であるとは限らない。たとえば部分旗多様体 G/P は一般に K の作用に関して球多様体ではない。しかし上の定理を使えば次が分かる。

系 4.1. $\mathfrak{X}_P \times \mathfrak{X}_{\theta(P)}$ が球 G -多様体であれば、 \mathfrak{X}_P は球 K -多様体である。

定理 3.4 を認めれば、系の証明はやさしい。

証明. B を G のボレル部分群とする。

$$G \backslash \mathfrak{X}_P \times \mathfrak{X}_{\theta(P)} \times \mathfrak{X}_B \simeq B \backslash \mathfrak{X}_P \times \mathfrak{X}_{\theta(P)}$$

であるから、多重旗多様体 $\mathfrak{X}_P \times \mathfrak{X}_{\theta(P)} \times \mathfrak{X}_B$ が有限個の G 軌道を持つことと $\mathfrak{X}_P \times \mathfrak{X}_{\theta(P)}$ が球 G -多様体であることは同値である。一方、 K のボレル部分群 S は G の θ 安定なボレル部分群 B を用いて $S = K \cap B$ と書けるから、定理 3.4 によって $\mathfrak{X}_P \times \mathcal{Z}_S$ 上の K 軌道は有限である。ところが $K \backslash \mathfrak{X}_P \times \mathcal{Z}_S \simeq S \backslash \mathfrak{X}_P$ だからこれは \mathfrak{X}_P が球 K -多様体であることを意味する。□

系 4.1 の表現論的解釈を試みよう。

まず V_λ を最高ウェイトが λ の G の有限次元表現、 $v_\lambda \in V_\lambda$ をゼロでない最高ウェイトベクトルとする。 V_λ を射影化したものを $\mathbb{P}(V_\lambda)$ と書き、 $[v_\lambda]$ で v_λ を通る直線のなす同値類、つまり $\mathbb{P}(V_\lambda)$ 上の点を表わす。 V_λ は G の有限次元表現であるから、 G は射影空間 $\mathbb{P}(V_\lambda)$ に自然に作用する。このとき、 $[v_\lambda]$ を通る G -軌道は $\mathbb{P}(V_\lambda)$ における G -軌道の中で最低次元を持っており、閉軌道になることがわかる。したがってそれ自身が射影多様体となり、コンパクトである。これから、 $[v_\lambda]$ の固定部分群は放物型部分群であり、 G -軌道 $G \cdot [v_\lambda]$ は部分旗多様体である。

逆に、任意の放物型部分群 $P \subset G$ に対して、 P が固定部分群

$$P = \{g \in G \mid g \cdot [v_\lambda] = [v_\lambda]\} = \{g \in G \mid g \cdot v_\lambda \in \mathbb{C}v_\lambda\}$$

となるように最高ウェイト λ が選べることはよく知られている。そこで、我々の P に対して、そのような λ を選んでおく。また、包含的自己同型 θ で V_λ を捻った既約表現を考え、その最高ウェイトを λ^θ と書く。 λ^θ は放物型部分群 $\theta(P)$ に対応する最高ウェイトである。

上の系 4.1 を言い換えると次のようになる。

系 4.2. 上のように、放物型部分群 P に対して、 λ を選んでおく。このとき、すべての自然数 $k, \ell \geq 0$ に対してテンソル積 $V_{k\lambda} \otimes V_{\ell\lambda^\theta}$ が G の表現として重複度自由に分解する

ならば、任意の $m \geq 0$ に対して K への制限 $V_{m\lambda}|_K$ は、 K の表現として重複度自由に分解する。

5. AIII 型対称空間の二重旗多様体とその軌道

$G/K = \mathrm{GL}_n/\mathrm{GL}_p \times \mathrm{GL}_q$ ($p+q=n$) とする。 GL_n の放物型部分群は n の合成 (順序を考慮した分割) λ によって決まるので、それを P_λ と書くのであった。

§3.3 の表によれば、 P が $G = \mathrm{GL}_n$ の極大放物型部分群ならば、二重旗多様体 $\mathcal{X}_P \times \mathcal{Z}_Q$ は任意の放物型部分群 $Q \subset K$ に対して有限型である。以下、特別な場合として、 $P = P_{(d,n-d)}$ が G の極大放物型部分群、 $Q = P_{(r,p-r)} \times P_{(s,q-s)}$ が $\mathrm{GL}_p, \mathrm{GL}_q$ の極大放物型部分群の直積の場合を考えることにする。このとき

$$\begin{aligned} \mathcal{X}_P \times \mathcal{Z}_Q &= \mathrm{GL}_n/P_{(d,n-d)} \times \mathrm{GL}_p/P_{(r,p-r)} \times \mathrm{GL}_q/P_{(s,q-s)} \\ &\simeq \mathrm{Grass}_d(\mathbb{C}^n) \times \mathrm{Grass}_r(\mathbb{C}^p) \times \mathrm{Grass}_s(\mathbb{C}^q) \end{aligned}$$

である。ただし $\mathrm{Grass}_d(\mathbb{C}^n)$ は \mathbb{C}^n 中の d 次元部分空間のなすグラスマン多様体を表す。そこで $V = \mathbb{C}^n$ とおき、 $K = \mathrm{GL}_p \times \mathrm{GL}_q$ に合わせてその直和分解を

$$V = V^+ \oplus V^- \quad (V^+ = \mathbb{C}^p, V^- = \mathbb{C}^q)$$

とする。また $\mathrm{Grass}_d(V) \times \mathrm{Grass}_r(V^+) \times \mathrm{Grass}_s(V^-)$ の点を

$$(L; W^+, W^-) \quad L \subset V, W^+ \subset V^+, W^- \subset V^-$$

と表わす。ここで $\dim L = d$, $\dim W^+ = r$, $\dim W^- = s$ である。 $(L; W^+, W^-)$ を通る K -軌道を $\mathbb{O}(L; W^+, W^-)$ と書こう。これらの軌道は有限個であるが、それは次のように分類できる。

定理 5.1. 三重グラスマン多様体

$$\mathrm{Grass}_d(V) \times \mathrm{Grass}_r(V^+) \times \mathrm{Grass}_s(V^-)$$

への $K = \mathrm{GL}(V^+) \times \mathrm{GL}(V^-)$ の対角的作用を考える。このとき $(L; W^+, W^-)$ を通る K -軌道 $\mathbb{O}(L; W^+, W^-)$ は、次の次元 (不変量) によって分類される。

$$\begin{aligned} d_1 &= \dim L \cap W, \\ p_1 &= \dim L \cap V^+, & q_1 &= \dim L \cap V^-, \\ r_1 &= \dim L \cap W^+, & s_1 &= \dim L \cap W^-, \\ r_2 &= \dim L \cap (W^+ \oplus V^-), & s_2 &= \dim L \cap (V^+ \oplus W^-) \end{aligned}$$

また、上で与えた軌道の不変量は以下の不等式を満たす。

$$\begin{aligned} 0 \leq r_1 \leq p_1 \leq p, \quad 0 \leq s_1 \leq q_1 \leq q, \quad 0 \leq r_1 \leq r, \quad 0 \leq s_1 \leq s, \\ r_1 \leq d_1 \leq r_2 \leq d, \quad s_1 \leq d_1 \leq s_2 \leq d, \\ r_2 \leq r + q_1, \quad s_2 \leq s + p_1, \\ r_1 + s_1 \leq d_1, \quad d_1 + q_1 \leq r_2 + s_1, \quad d_1 + p_1 \leq r_1 + s_2, \\ r_2 + s_2 \leq d + d_1, \quad r + d \leq p + r_2, \quad s + d \leq q + s_2 \end{aligned}$$

逆に不変量がこれらの不等式を満たせば、その不変量を持つ K 軌道が存在する。

軌道についてはいろいろと調べることはあるが、ここでは次元についての公式をあげておく。

命題 5.2. 上のように与えられた K 軌道 $\mathbb{O}(L; W^+, W^-)$ の次元は

$$\begin{aligned} \dim \mathbb{O}(L; W^+, W^-) &= d(p + q - d) + r(p - r) + s(q - s) \\ &\quad - (r - r_2 + q_1)q_1 - (s - s_2 + p_1)p_1 \\ &\quad - (p - r + r_2 - d)r_2 - (q - s + s_2 - d)s_2 \\ &\quad - (r_2 - d_1 + s_1 - q_1)s_1 - (s_2 - p_1 - d_1 + r_1)r_1 - (d_1 - r_2 - s_2 + d)d_1 \end{aligned}$$

で与えられる。

REFERENCES

- [ABV92] Jeffrey Adams, Dan Barbasch, and David A. Vogan, Jr., *The Langlands classification and irreducible characters for real reductive groups*, Progress in Mathematics, vol. 104, Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 1992.
- [BG80] J. N. Bernstein and S. I. Gel'fand, *Tensor products of finite- and infinite-dimensional representations of semisimple Lie algebras*, Compositio Math. **41** (1980), no. 2, 245–285.
- [BH00] Michel Brion and Aloysius G. Helminck, *On orbit closures of symmetric subgroups in flag varieties*, Canad. J. Math. **52** (2000), no. 2, 265–292.
- [Bri89] Michel Brion, *Spherical varieties: an introduction*, Topological methods in algebraic transformation groups (New Brunswick, NJ, 1988), Progr. Math., vol. 80, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1989, pp. 11–26.
- [CN06] Jean-Louis Clerc and Karl-Hermann Neeb, *Orbits of triples in the Shilov boundary of a bounded symmetric domain*, Transform. Groups **11** (2006), no. 3, 387–426.
- [CNT09] D. Ciubotaru, K. Nishiyama, and P. E. Trapa, *Regular orbits of symmetric subgroups on partial flag varieties*, math.RT/0903.1039 (2009).
- [DR09] J. Matthew Douglass and Gerhard Röhrle, *The Steinberg variety and representations of reductive groups*, J. Algebra **321** (2009), no. 11, 3158–3196.
- [FGT09] Michael Finkelberg, Victor Ginzburg, and Roman Travkin, *Mirabolic affine Grassmannian and character sheaves*, Selecta Math. (N.S.) **14** (2009), no. 3-4, 607–628.
- [HJ05] Vladimir Hinich and Anthony Joseph, *Orbital variety closures and the convolution product in Borel-Moore homology*, Selecta Math. (N.S.) **11** (2005), no. 1, 9–36.

- [KNOT10] Kensuke Kondo, Kyo Nishiyama, Hiroyuki Ochiai, and Kenji Taniguchi, ”部分旗多様体上の閉軌道と有限型多重旗多様体”, 日本数学会 2010 年度秋季総合分科会 (於名古屋大学) 函数解析分科会 一般講演, September 2010.
- [Lit94] Peter Littelmann, *On spherical double cones*, J. Algebra **166** (1994), no. 1, 142–157.
- [LV83] George Lusztig and David A. Vogan, Jr., *Singularities of closures of K -orbits on flag manifolds*, Invent. Math. **71** (1983), no. 2, 365–379.
- [Mat79] Toshihiko Matsuki, *The orbits of affine symmetric spaces under the action of minimal parabolic subgroups*, J. Math. Soc. Japan **31** (1979), no. 2, 331–357.
- [Mat82] ———, *Orbits on affine symmetric spaces under the action of parabolic subgroups*, Hiroshima Math. J. **12** (1982), no. 2, 307–320.
- [Mil93] Dragan Miličić, *Localization and Representation Theory of Reductive Lie Groups*, available at <http://www.math.utah.edu/~milicic/Eprints/book.pdf>, 1993.
- [MWZ99] Peter Magyar, Jerzy Weyman, and Andrei Zelevinsky, *Multiple flag varieties of finite type*, Adv. Math. **141** (1999), no. 1, 97–118.
- [MWZ00] ———, *Symplectic multiple flag varieties of finite type*, J. Algebra **230** (2000), no. 1, 245–265.
- [NO11] K. Nishiyama and H. Ochiai, *Double flag varieties for a symmetric pair and finiteness of orbits*, J. Lie Theory **21** (2011), 079–099. [[math.RT/1009.5279](https://arxiv.org/abs/math.RT/1009.5279)]
- [Ros79] W. Rossmann, *The structure of semisimple symmetric spaces*, Canad. J. Math. **31** (1979), no. 1, 157–180.
- [Spr85] T. A. Springer, *Some results on algebraic groups with involutions*, Algebraic groups and related topics (Kyoto/Nagoya, 1983), Adv. Stud. Pure Math., vol. 6, North-Holland, Amsterdam, 1985, pp. 525–543.
- [Ste76] Robert Steinberg, *On the desingularization of the unipotent variety*, Invent. Math. **36** (1976), 209–224.
- [Tra07] Peter E. Trapa, *Leading-term cycles of Harish-Chandra modules and partial orders on components of the Springer fiber*, Compos. Math. **143** (2007), no. 2, 515–540.
- [Tra09] Roman Travkin, *Mirabolic Robinson-Schensted-Knuth correspondence*, Selecta Math. (N.S.) **14** (2009), no. 3-4, 727–758.
- [Vin86] È. B. Vinberg, *Complexity of actions of reductive groups*, Funktsional. Anal. i Prilozhen. **20** (1986), no. 1, 1–13, 96.
- [Wol69] Joseph A. Wolf, *The action of a real semisimple group on a complex flag manifold. I. Orbit structure and holomorphic arc components*, Bull. Amer. Math. Soc. **75** (1969), 1121–1237.

DEPARTMENT OF PHYSICS AND MATHEMATICS, AOYAMA GAKUIN UNIVERSITY, FUCHINOBE 5-10-1, CHUO, SAGAMIHARA 252-5258, JAPAN

E-mail address: kyo@gem.aoyama.ac.jp

FACULTY OF MATHEMATICS, KYUSHU UNIVERSITY, 744, MOTOOKA, NISHI-KU, FUKUOKA 819-0395, JAPAN

E-mail address: ochiai@math.kyushu-u.ac.jp